





# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”**

**“ESTUDIO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN  
DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN UN  
SISTEMA DE ESTADOS PUERTA EN  
MICROESFERAS MULTICAPA”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**LIC. EDUARDO ALEJANDO VALDEZ TORIJA**

**ASESOR:**

**DR. ALFREDO DÍAZ DE ANDA**

**AGOSTO 2017**

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Descripción de sistemas con estados puerta y el fenómeno de función de fuerza</b>	<b>8</b>
<b>3. Solución a sistemas microesfera multicapa por el método de matriz de transferencia</b>	<b>14</b>
3.1. Método de la matriz de transferencia para el apilado de capas de una microesfera . . . . .	17
<b>4. Resultados numéricos.</b>	<b>22</b>
4.1. Comportamiento del coeficiente de transmisión con el incremento en la densidad de estados del sistema denso . . . . .	23
4.2. Estudio del coeficiente de transmisión al colocar la capa generadora de estados puerta en diferentes posiciones . . . . .	25
4.3. Distribución espacial del campo electromagnético en una microesfera multicapa . . . . .	27
4.4. Diferencias en el coeficiente de transmisión al aumentar la densidad estados puerta . . . . .	29
4.5. Modificación del acoplamiento entre el sistema de estados puerta y el sistema con mar de estados . . . . .	34
<b>5. Resultados numéricos para el caso <math>\lambda/4</math></b>	<b>37</b>
5.1. Comportamiento del coeficiente de transmisión al incremento en la densidad de estados al sistema denso en la microesfera multicapa para el caso $\lambda/4$ . . . . .	37
5.2. Estudio del coeficiente de transmisión al colocar la capa generadora de estados puertas en diferentes posiciones a lo largo de la microesfera multicapa con proporciones de $\lambda/4$ para cada una de sus capas . . . . .	39

5.3. Análisis del coeficiente de transmisión al aumentar el espesor de la capa generadora de estados puerta en proporciones de $\lambda/4$ . . . . .	40
5.4. Diferencias en el coeficiente de transmisión al cambiar el acoplamiento entre capa generadora de estados puerta y el sistema con mar de estados respetando las proporciones de $\lambda/4$ .	44
5.5. Creación de bandas prohibidas partiendo de tener una sola capa generadora de estados puerta . . . . .	46
<b>6. Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>Referencias</b>	<b>54</b>
<b>A. Método del potencial de Debye para ver el comportamiento de los campos electromagnéticos en una microesfera</b>	<b>56</b>
<b>B. Polarización del campo electromagnético</b>	<b>62</b>
<b>C. Metodología para la obtención de la ecuación de Helmholtz</b>	<b>64</b>
<b>D. Funciones de Hankel</b>	<b>67</b>
<b>E. Modelo matemático del fenómeno de estados puerta cuántico</b>	<b>69</b>

# Resumen

El mecanismo de estados puerta surge siempre que dos sistemas –uno de ellos con densidad de estados pequeña (estados puerta) y otro con una densidad de estados mucho mayor (mar de estados) - estén acoplados y tengan ambos sistemas sus estados en el mismo intervalo de frecuencia o de energía.

Los estados puerta se dispersan entre los estados del sistema completo modulándolos, obteniendo así una mayor amplitud para aquellos estados del sistema completo cercanos a ellos. A este efecto se le conoce como función de fuerza y se ha encontrado a distintas escalas métricas tanto en sistemas clásicos como en cuánticos por lo que lo hace importante debido a su universalidad.

Por otro lado los sistemas microesfera poseen propiedades ópticas únicas; de estos dispositivos; los multicapa tienen facultades para cada composición de capas que los hacen candidatos prometedores para desarrollar nuevas tecnologías.

El estudio del coeficiente de transmisión de estos sistemas desde el punto de vista del fenómeno estados puerta, nos permitirá estudiar fenómenos que podrían ser útiles para el prediseño de los mismos.

En esta tesis obtendremos numéricamente los coeficientes de transmisión vía el método de la matriz de transferencia para estos sistemas de microesferas multicapa.

En los resultados se observó que en los sistemas de microesfera multicapa existen parámetros que al modificarse no cambian el coeficiente de transmisión. Además se estudia el corrimiento de los picos de las Lorentzianas en la transmisión así como su anchura de esta en función de cambios en la estructura de estos sistemas.

También modificó el acoplamiento entre la capa generadora de estados puerta y el sistema con mar de estados en la microesfera, haciendo variar el índice de refracción en una de ellas, observando el cambio en la anchura

---

de la Lorentziana del coeficiente de transmisión como función del índice de refracción de esta capa.

Finalmente trataremos la generación de bandas prohibidas en el coeficiente de transmisión de los sistemas de microesfera multicapa localmente periódicos, siempre desde el punto de vista del fenómeno de estos estados puerta.

# Abstract

The doorway states mechanism appears whenever two oscillating systems - one of them with a low density of states (doorway states) and the other one with a much higher density of states (with sea of states) – couple together and both systems have their states in the same frequency or energy range.

The doorway states have been dispersed among the states of the complete system by modulating them, obtaining a greater amplitude for those states of the complete system near them. This effect is known as the strength function and has been found at different metric scales in both classical and quantum systems, making it important because of its universality.

On the other hand the microspherical systems possess unique optical properties; Of these devices; Multilayers have faculties for each of the layer compositions that make the candidates promising to develop new technologies.

The study of the coefficient of transmission of these systems from the point of view of the phenomenon of doorway states, which allow to study the phenomena that serve the predecessor of the same ones.

In this thesis we will obtain numerically the transmission coefficients via the transfer matrix method for these multilayer microsphere systems.

In the results it was observed that in the multilayer microsphere systems there are parameters that do not modify the transmission coefficient. In addition, the Lorentzian displacement of peaks is studied in the transmission as well as its anchor of this as a function of changes in the structure of these systems.

It also modified the coupling between, the doorway state generating layer and the system with sea of states in the microsphere, was modified by varying the refractive index in one of the layers, we observed that the change in the Lorentziana width of the transmission coefficient is a function of the

---

index of refraction of this layer.

Finally we will study the generation of band gaps in the transmission coefficient of the multilayer microspheres systems locally periodic, always from the point of view of the phenomenon of doorway states.

# Capítulo 1

## Introducción

Las nano y micro estructuras han recibido mucha atención estas décadas, debido a su utilidad en la tecnología y a sus propiedades únicas.

En su mayoría, los avances tecnológicos provienen de estudiar fenómenos en sistemas de manera profunda y de manejar las propiedades de distintos materiales. Controlar las propiedades ópticas de sistemas microscópicos con distintos materiales garantiza el desarrollo de nuevas tecnologías.

En las últimas décadas, ha crecido el interés de poder controlar las propiedades ópticas de materiales y sistemas. Por ejemplo, crear sistemas que permitan la propagación únicamente de determinadas ondas electromagnéticas, podría ser muy útil para las tecnologías de telecomunicaciones. Otro ejemplo de mucho interés para el diseño de nuevas tecnologías es el confinamiento y localización de ondas en regiones específicas.

El análogo de cristales semiconductores en fotónica es el denominado cristal fotónico. En este tipo de sistemas lo que para semiconductores es el potencial periódico, equivaldría a variaciones periódicas en el valor de las constantes dieléctricas.

Los cristales fotónicos son materiales que poseen un diagrama de difracción discreto, además tienen estructuras con variación en el índice de refracción a lo largo de este, ya sea asimétricas, periódicas, aperiódicas o con defectos.

Por otro lado, los sistemas de multicapas planas que alternan materiales con diferentes índices de refracción de películas delgadas de distintos materiales tienen propiedades ópticas únicas y han sido ampliamente estudiados. Los sistemas de microesferas multicapa, tienen un amplio rango de aplicaciones como grabación de medios de almacenamiento óptico y diseño

de cristales fotónicos. [1]

Otra tecnología de sistemas de microesferas multicapa, con variaciones periódicas del índice de refracción en sus capas son los resonadores ópticos. Estos resonadores al tener una interacción única con luz incidente pueden ser utilizados en cavidades electromagnéticas y en nuevos dispositivos tales como switches y filtros ópticos. En estos resonadores, el confinamiento de la luz en las capas de un sistema de microesfera ocurre a través de la reflexión de Bragg, análogamente a un cristal fotónico. Para cada composición particular de las capas de la microesfera uno puede mejorar o disminuir la dispersión de la luz. Es decir, un cambio pequeño en su estructura, como cambiar el material o su geometría; puede dar lugar a propiedades únicas en estos sistemas.[2]

El porqué de que estos sistemas multicapa esféricos con variación radial del índice de refracción puedan ser usados como resonadores ópticos, reside en el hecho de que estos sistemas poseen un band gap fotónico. Por lo que un prediseño del material a sintetizar, podrá ayudar a obtener aquella sección de dispersión que tenga las características ópticas deseadas; esto teniendo en cuenta el alcance de estos dispositivos. He aquí una motivación para el estudio de las propiedades de transmisión de estos sistemas de microesferas.

Esta tesis abordara el estudio del coeficiente de transmisión de sistemas multicapa esféricos desde el punto de vista de estados puerta. Por ello en el capítulo 2 nombraremos algunas referencias donde se muestra el efecto de estados puerta. Estos ejemplos ayudan a entender este fenómeno de la modulación de amplitud causada por los estados puerta. Además de mostrar que el fenómeno de función de fuerza que ocurre tanto en sistemas cuánticos como clásicos y a diferentes escalas.

En el capítulo 3 se describe el sistema a estudiar y la metodología para obtener el coeficiente de transmisión por el método de la matriz de transferencia.

En los capítulos 4 y 5 se muestran los resultados numéricos obtenidos y la interpretación de los mismos desde el punto de vista del fenómeno de estados puerta.

En el capítulo 6 mostraremos las conclusiones obtenidas de estudiar los cambios en los coeficientes de transmisión de distintas configuraciones hechas a los sistemas de microsferas multicapa.

Esta tesis cuenta además con cuatro apéndices. El apéndice A describe el método del potencial de Debye que se usa para obtener la solución de las

ondas electromagnéticas en cualquier punto dentro de una capa arbitraria de la microesfera.

El apéndice B describe brevemente la polarización TM y TE de las ondas electromagnéticas

EL apéndice C parte de la ecuación que describe el comportamiento del potencial de Debye en sistemas con simetría esférica (vista en apéndice A). Y mediante el uso del método de separación de variables, se obtienen la solución a esta ecuación para el potencial de Debye, misma que finalmente se relaciona con la solución de las componentes del campo electromagnético en cualquier punto de una capa arbitraria contenida en la microesfera.

El apéndice D contiene algunas propiedades de las funciones de Hankel, las cuales son solución a la parte radial del campo electromagnético.

En el apéndice E se muestra un modelo de estados puerta cuántico por medio de teoría de perturbación que sirvió para describir las resonancias gigantes en la década de los 50's y posteriores.

## Capítulo 2

# Descripción de sistemas con estados puerta y el fenómeno de función de fuerza

El mecanismo de estados puerta aparece cuando dos sistemas oscilantes (uno de ellos con una densidad baja de estados; llamados estados puerta y el otro con una densidad de estados mucho mayor; llamado sistema con mar de estados) están acoplados.

Lo que se obtiene de este mecanismo se le conoce como función de fuerza; que es la mejora importante en la amplitud de la oscilación, y por tanto de la energía, para las frecuencias de los estados de alta densidad alrededor de las frecuencias de los estados puerta.

El fenómeno de estados puerta (doorway state phenomena) se estudió por primera vez en 1948 en un trabajo de física nuclear [6] de M. Goldhaber y E. Teller; donde tratan de interpretar las resonancias gigantes de dipolos en analogía con las frecuencias residuales que tienen los cristales con polarización electromagnética. En aquellos años observaron frecuencias de resonancias gigantes en reacciones  $(\lambda, \eta)$  y de foto-fisión, donde el pico de amplitud máxima en la sección transversal observada en varios experimentos tiene lugar en frecuencias determinadas. Este pico de amplitud gigante es causado por la función de fuerza y ocurre en una frecuencia característica determinada por el estado puerta.

En el año de 1963, Los investigadores Block y Feshbach [7] unen sus esfuerzos para identificar la estructura de los estados puerta y crear una teoría rigurosa del fenómeno de las resonancias gigantes. Ellos modelan la interacción entre un neutrón (u otro proyectil) y un núcleo de blanco mediante un potencial de interacción complejo, lo que reproduce muy bien lo

observado experimentalmente para las masas cercanas a  $A=115$  y a  $A=70$  como lo muestra la figura 2.1, en la que se grafica la función de onda 'S' en función de la anchura del núcleo puesto de blanco.

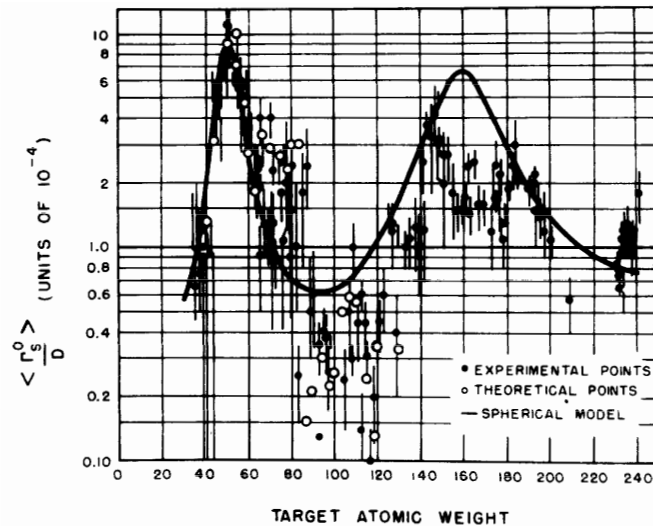


Figura 2.1: <sup>2</sup>Función de fuerza de la onda s del neutrón como función de la anchura del átomo puesto de objetivo en una colisión

La dificultad con la teoría de Block-Feshbach es que no parece haber conexión entre los estados puerta y la resonancia gigante convencional de la visión de Lane, Thomas y Wigner. La dificultad de ver a los estados puerta como una estructura según la visión de Lane fue estudiada por Robson en 1967 [8] donde explica cómo se relacionan las resonancias gigantes y los estados puerta describiendo ambos fenómenos con el mismo formalismo. La conexión está en la elección de operadores básicos y apropiadas condiciones de contorno, lo que sugiere que la estructura fina y ordinaria sea la relación entre dichos fenómenos, es decir, que el fenómeno de estados puerta es una estructura intermedia entre la estructura fina y la convencional.

Entre los trabajos recientes en el ámbito de sistemas nucleares tenemos la referencia [12] donde el trabajo de Auerbach et al, toma a los estados puerta como una estructura intermedia entre la estructura ordinaria y la fina. Para así, calcular reacciones nucleares de baja energía viendo el fenómeno de estados puerta como una manifestación súper radiante; resultado de la colectividad con la amplitud de ciertos estados intrínsecos inestables a canales comunes de decaimiento.

---

<sup>2</sup>B. Block and H. Feshbach, Ann. Phys. (N. Y.) **23**, 47, 1963

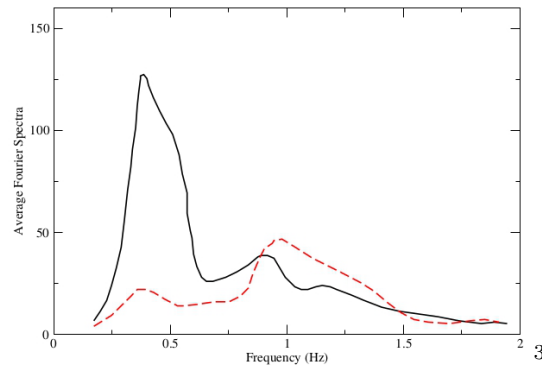
A lo mencionado de que el fenómeno de estados puerta ocurre en sistemas tanto clásicos como cuánticos y a diferentes escalas tenemos en la referencia [5], donde en 1989 Flores et al, observan a los terremotos en la ciudad de México como un fenómeno de estados puerta. Donde el sistema de estados puerta corresponde a la arcilla blanda (por llamar así a depósitos de arcilla o lodo lacustre) lugar donde se se asienta la mayoría de la ciudad de México y que se encuentra rodeada (acoplada) de un sistema montañoso o zona rocosa que funge para el fenómeno de estados puerta como aquel sistema que tiene una densidad de estados vasta; lugar donde no hubo daños aparentes en el terremoto.

La cuenca del valle de México se aprecia en la figura 2.2(c), como ya se dijo, rodeada de un sistema rocoso, Y como se aprecia en 2.2(b) en la zona rocosa el sismo no tiene un incremento significativo en la amplitud. Mientras que el incremento significativo se dio en la zona de arcilla blanda donde dejó edificios derrumbados (Ver figura 2.2(a)).

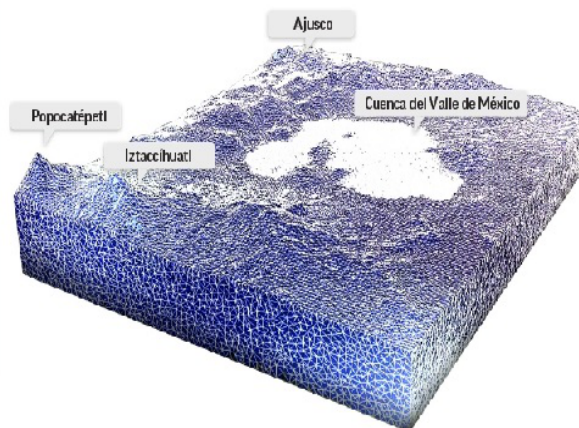
La propuesta del modelo consiste en tomar a la velocidad de la onda elástica en el medio blando como "P", y la velocidad de la onda que es reflejada de la zona rocosa como "R". El modelo PR como es llamado nos dice que el sistema acoplado entra en resonancia cuando la velocidad R se acerca a la velocidad P en la interfaz y esto hace que se cree una tremenda amplificación de los modos "P" lo que dio lugar a un movimiento estrepitosos en la zona de arcilla blanda, llevando a la destrucción masiva de los edificios que entraron en resonancia con estos modos.



(a) Edificios de la ciudad de México con características en común derrumbados en el sismo del 25 de Abril 1989



(b) Espectro de Fourier promediado del sismograma obtenido del sismo de magnitud 6.9 (25 de Abril 1989, Ciudad de México). Línea punteada corresponde a zona rocosa, mientras que la línea continua corresponde a la zona de arcilla blanda



(c) Mapa Geográfico de la ciudad de México en el que se aprecia la figura de la cuena del valle de México formada de arcilla blanda y rodeada de un sistema rocoso

Otros ejemplos de sistemas clásicos con estados puerta pero a escalas macroscópicas de centímetros se tienen en la referencia [4] donde se muestran 3 sistemas clásicos. El primer sistema consta  $N_1$  osciladores acoplados con otros  $N_2$  osciladores. Este acoplamiento manifiesta el fenómeno de función de fuerza como origen del traslape de la amplitud del primer y segundo modo puerta con los modos del sistema completo (Figura 2.2 a), b) y c)). Para el segundo sistema de la barra y la muesca, los picos de la función de

<sup>3</sup>J.A. Franco, Doorway states and Billiards, 2010

fuerza son debidos a la excitación de los modos compresionales que corresponden a las frecuencias del sistema completo, cada pico pertenece a una frecuencia de resonancia como se puede ver en la figura 2.2 e); las primeras dos frecuencias corresponden a 55KHz y 105KHz.

Para el tercer sistema, que es un sistema óptico de placas que consta de dos capas, una de  $Al_2O_3$  con un espesor de  $h \approx 0.67\mu m$  y la otra  $WO_3$  de espesor  $H \approx 8.75\mu m$  separadas por dos películas finas de aproximadamente  $10nm$  de  $Al$  (Ver figura 2.2 f)); los cálculos de la función de fuerza para este sistema se realizan con el método de la matriz de transferencia para obtener el coeficiente de transmisión. La figura 2.2 g) compara los espectros del experimento con la teoría, la línea punteada es el coeficiente de transmisión obtenido por el método de matriz de transferencia y la línea sólida corresponde a la transmisión del arreglo experimental de la figura 2.2 f).

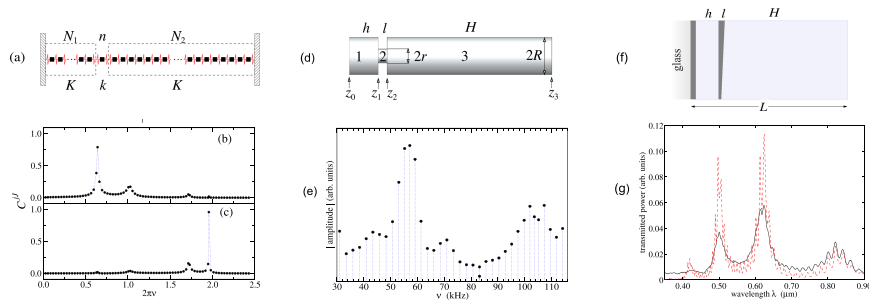


Figura 2.2: a) Esquema de cadena de osciladores. b) Función de fuerza para el primer modo puerta. c) Función de fuerza para el primer modo puerta. d) Esquema de barra con muesca. e) Respuesta de la barra con muesca al excitar los primeros dos modos del sistema completo. g) Línea punteada, transmisión calculada con matriz de transferencia. Línea sólida, transmisión del arreglo experimental. <sup>5</sup>

Cada uno de los sistemas mostrados en esta referencia, tiene orígenes muy distintos, como los modos de resonancia mecánicos para el primero, modos compresionales acústicos para el segundo y para el tercero eigenfrecuencias de excitación electromagnética. Pero cada uno de ellos manifiesta picos debidos a la interacción de estados puerta dispersos sobre los demás estados, que modulan a los demás estados del sistema completo; que es el mecanismo de estados puerta.

Finalmente, en el apéndice D se presenta el desarrollo de un modelo cuántico del mecanismo de estados puerta muy general, que pudiera aclarar

<sup>5</sup>Díaz-de-Anda, A., Volke-Sepúlveda, et al, American Journal of Physics, **83**, 12, 2015

la visión del como ocurre el fenómeno de función de fuerza del método de estados puerta. En este modelo se tienen dos sistemas acoplados (uno con densidad de estados pequeña y otra con una densidad de estados mucho mayor). Los estados puerta (estados del sistema con densidad de estados menor) se ven favorecidos al dispersarse por los estados del sistema completo y modulan a los mismos, dando lugar a una expansión en amplitud, lo que se muestra en los experimentos al medir la sección transversal en reacciones nucleares y que se manifiesta como una resonancia gigante, que en su expresión más simple tiene la forma de la distribución de Breit-Wigner.

## Capítulo 3

# Solución a sistemas microesfera multicapa por el método de matriz de transferencia

Los sistemas de microesferas multicapa son estructuras esféricas que poseen un núcleo de radio  $r_o \neq 0$ , sobre el cual se apilan capas concéntricas de distintos materiales dieléctricos (Figura 3.1), donde el radio total de la microesfera es menor a  $100\mu m$ .

Hasta hace unos años las técnicas para el desarrollo de estos materiales era compleja, conseguir la geometría esférica parecía muy complicado en materiales dieléctricos, en años recientes han aparecido cada vez más artículos sobre síntesis de estos sistemas.

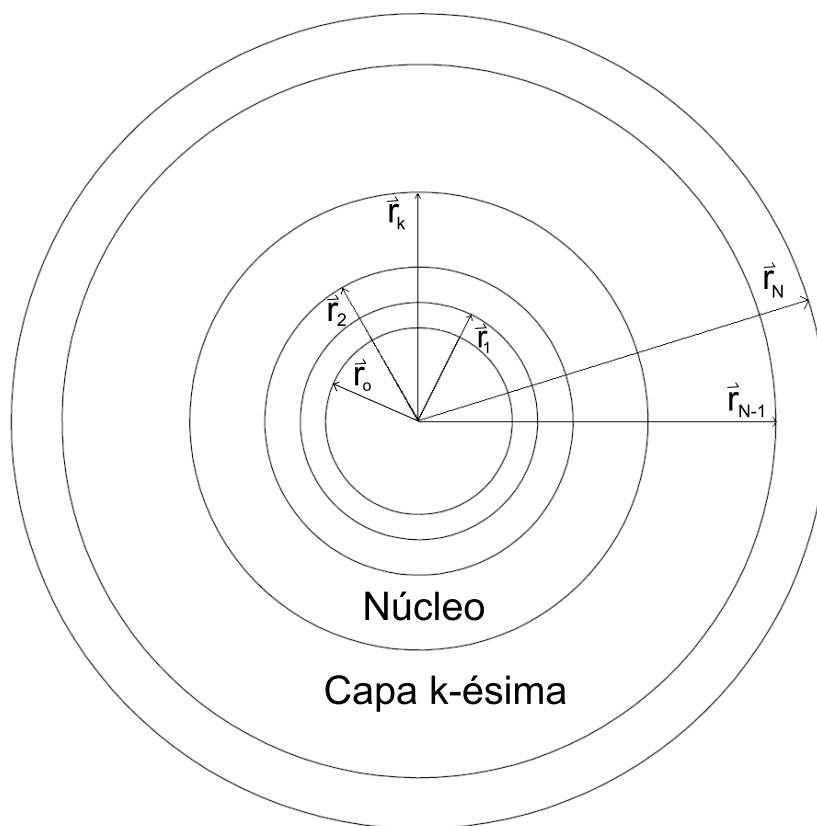


Figura 3.1: Geometría de la microesfera multicapa

En la referencia [1] se logró hacer microesferas de polímeros de un diámetro menor a  $1\mu m$  con puntos cuánticos en su núcleo, estos dispositivos sintetizados pueden ser utilizados como resonadores ópticos. En la referencia [2] se sintetizan resonadores con variación radial de índice de refracción a base de polímeros. Estas microesferas multicapa en las que alternan poliestireno y metacrilato de trifluoroetilo, tienen un diámetro menor a una micra y el apilado es de 5 capas. Cada capa tiene una anchura entre 20 y 150  $nm$ , además de ser resonadores ópticos esféricos pueden ser usados como switches ópticos.

En la referencia [24] J. Son et al, sintetizan microesferas con 3 capas, Gadolino ( $Gd$ ), Ernio ( $Er$ ) e Itrio ( $Y$ ). Logrando un diámetro total de 1.70  $\mu m$  y una calidad impresionante en cuanto a su geometría esférica, debido al uso de procesos cuidadosos en la síntesis de cada capa. Si bien esta referencia muestra que pueden construirse microesferas con capas metálicas, sintetizarlas con dieléctricos hace que no se recurra a técnicas sofisticadas además de reducir los costos del desarrollo de estas.

Teniendo en cuenta que la biografía crece día con día, no sorprende que cada vez el factor de calidad en estos sistemas sea más alto, así que el análisis numérico de los espectros de transmisión, ayudará a la comprensión de los fenómenos que ocurren en estos sistemas.

El comportamiento de la luz en estos sistemas está regido por las ecuaciones de Maxwell. Por tener geometría esférica, el método que ayuda a su descripción del comportamiento del campo electromagnético en estas estructuras se da por medio del potencial de Debye (Ver apéndice A).

La metodología que se sigue para solucionar las ecuaciones de Maxwell acopladas en coordenadas esféricas parte de proponer al potencial vectorial magnético de la forma  $A_M = (\Pi_M, 0, 0)$  donde  $\Pi_M$  es potencial Debye.

Eligiendo que la propagación de las ondas en los sistemas de microesferas multicapa sea desde el núcleo además de que el modo de propagación sea transversal magnético TM (Ver apéndice B)(Se procede de manera análoga en el caso del modo TE). Se llega a obtener una relación entre el potencial escalar y el potencial de Debye, lo que favorece la obtención de una ecuación en términos solamente del potencial de Debye. Resolverla proporcionará el valor de las componentes del campo electromagnético en cada punto de nuestro sistema con simetría esférica. La expresión en términos únicamente del potencial de Debye es a siguiente:

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Pi_{M+\epsilon(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Pi_{M+\frac{\epsilon\omega^2}{c}} \Pi_M = 0. \quad (3.1)$$

La ecuación de segundo grado 3.1 se resuelve por el método de separación de variables, proponiendo  $\Pi_M(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ . Consiguiendo para la parte radial la diferencial de Helmholtz(Ver apéndice C) que tiene por solución las funciones de Hankel. Mismas que se denotan de la siguiente forma:

$$H_l^{(1,2)}(\rho) = P_l^{(1,2)}(\rho)e^{\pm i\rho}. \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{d\rho} H_l^{(1,2)}(\rho) = G_l^{(1,2)}(\rho)e^{\pm i\rho}, \quad (3.3)$$

donde  $P_l^{(1,2)}(\rho)$  es el factor racional pre-exponencial de la función de Hankel y  $G_l^{(1,2)}(\rho)$  es el factor racional preexponencial de la derivada de la función de Hankel.

Como se esperaba la solución para la parte angular del potencial de Debye está dada en término de los armónicos esféricos. Dejando la solución

homogénea para el potencial de Debye como:

$$\Pi(r, \theta, \phi) = \sum_l \sum_{m=-l}^{m=l} R_l(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.4)$$

Si se ignora la dependencia angular ya que la simetría de las microesferas es radial. La parte radial de las componentes del campo electromagnético para el caso TM están dadas por:

$$H_\phi = i\eta \left[ aP_l^{(2)}(\rho)e^{-i\rho} + bP_l^{(1)}(\rho)e^{i\rho} \right], \quad (3.5)$$

$$E_\theta = aG_l^{(2)}(\rho)e^{-i\rho} + bG_l^{(1)}(\rho)e^{i\rho}, \quad (3.6)$$

Para el apilado de capas esféricas concéntricas se debe cumplir que en cada interfaz se cumplan las condiciones de frontera a las componentes de los campos según el modo de propagación. Además de que las capas inicial y final deberán cumplir la condición de Sommerfeld adecuadamente según sea el caso. Esto se tratará en el siguiente apartado usando el método de la matriz de transferencia que tiene la veracidad de obtener las propiedades de la onda transmitida siempre que se conozca la onda incidente.

### 3.1. Método de la matriz de transferencia para el apilado de capas de una microesfera

Consideremos ahora nuestro sistema a tratar, una estructura esférica multicapa, que consta de una microesfera dieléctrica de radio  $r_0$  y un sistema de capas esféricas concéntricas en contacto con esta microesfera, es decir apiladas a ella (Figura 3.1).

La capa  $k$ -ésima del apilado se encuentra a una distancia  $r_k$  del centro, donde el espesor de dicha capa está dado por  $d_k = r_{k+1} - r_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Teniendo en cuenta que la luz en la microesfera multicapa se propaga desde el centro y con propagación de modos TM, el valor para las componentes del campo electromagnético en cada capa está dado por las ecuaciones (3.7) y (3.8).

Para mostrar el método general de la matriz de transferencia en sistemas esféricos, el espesor de cada una de las películas depositadas en la microesfera tendrán una anchura arbitraria <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Este método es similar al conocido ampliamente método matricial para capas planas [Born and Wolf, 1980, Sakaguchi and Kubo, 1999]

Partiendo del valor de las componentes del campo electromagnético únicamente para la parte radial y en una capa arbitraria:

$$H_\phi = i\eta \left[ aP_l^{(2)}(\rho)e^{-i\rho} + bP_l^{(1)}(\rho)e^{i\rho} \right], \quad (3.7)$$

$$E_\theta = aG_l^{(2)}(\rho)e^{-i\rho} + bG_l^{(1)}(\rho)e^{i\rho}, \quad (3.8)$$

donde,  $\rho = k_0\eta r$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $\eta = \eta(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$  es el índice de refracción de una capa arbitraria y que en general es distinto para cada capa. Y  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias determinadas por condiciones de contorno.

El término  $P_l^{1,2}(y)$  corresponde a la parte racional de las funciones esféricas de Hankel (Ver apéndice D):

$$h_l^{1,2}(\rho) = P_l^{1,2}(\rho)e^{\pm i\rho} \quad (3.9)$$

Y a su vez,  $G_l^{1,2}(\rho)$  es la derivada parcial de las funciones esféricas de Hankel

$$h_l^{1,2}(\rho) = G_l^{1,2}(\rho)e^{\pm i\rho} \quad (3.10)$$

La representación matricial de los campos incidentes en cada capa, está dada por:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} H_\phi \\ E_\theta \end{pmatrix} = \hat{D} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \hat{D} \cdot \vec{q}, \quad (3.11)$$

donde la matriz  $\hat{D}$  es la matriz de transferencia para una sola capa:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} i\eta P_l^2(\rho)e^{i\rho} & i\eta P_l^1(\rho)e^{-i\rho} \\ G_l^2(\rho)e^{i\rho} & G_l^1(\rho)e^{-i\rho} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Para aplicar las condiciones de continuidad, tomemos dos puntos límite cualesquiera en la capa  $k$ -ésima, que tendrán una distancia al centro de  $r_k$  y  $r_{k+1}$  respectivamente como se observa en la figura 3.2. A lo largo de la capa  $k$  se cumple:

$$\vec{q}_k = \hat{D}_k^{-1}(r_k) \cdot \vec{u}_k(r_k) = \hat{D}_k^{-1}(r_{k+1}) \cdot \vec{u}_k(r_{k+1}), \quad (3.13)$$

esto ya que para todos los puntos en la capa  $k$ ,  $\vec{q}_k$  es constante.

Por continuidad de los campos se tiene:

$$\vec{u}_k(r_{k+1}) = \vec{u}_{k+1}(r_{k+1}) \quad (3.14)$$

Con lo supuesto hasta ahora, se tiene:

$$\hat{D}_k(r_k) \cdot \vec{q}_k = \vec{u}_k(r_k) = \hat{D}_k(r_k) \hat{D}_k^{-1}(r_{k+1}) \cdot \vec{u}_k(r_{k+1}) \quad (3.15)$$

$$= \hat{D}_k(r_k) \hat{D}_k^{-1}(r_{k+1}) \cdot \vec{u}_{k+1}(r_{k+1}) \quad (3.16)$$

$$= \hat{M}_k \cdot \vec{u}_{k+1}(r_{k+1}), \quad (3.17)$$

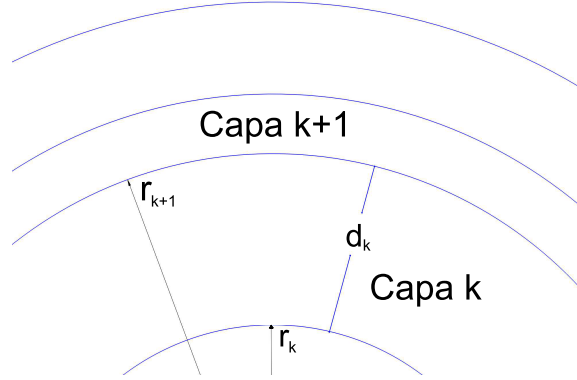


Figura 3.2: dos puntos en la capa k-ésima

donde denotamos  $\hat{M}_k = \hat{D}_k(r_k)\hat{D}_k^{-1}(r_{k+1})$ .

En el caso general, la matriz  $\hat{M}_k$  es determinada por el índice de refracción  $\eta_k$ , el espesor de la capa  $d_k$  y la distancia del centro de la esfera a la capa k-ésima;  $r_k$ .

En el caso simple en el que el modo esférico  $l = 1$  los elementos de la matriz  $\hat{M}_k$  son:

$$\hat{M}_{11} = \frac{(\rho_2 - \rho_1 + \rho_1\rho_2^2) \cos \Phi_k}{\rho_1^2\rho_2} + \frac{(-1 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2) \sin \Phi_k}{\rho_1^2\rho_2}, \quad (3.18)$$

$$\hat{M}_{12} = i\eta_k \frac{(\rho_2 - \rho_1) \cos \Phi_k}{\rho_1^2} - i\eta_k \frac{(1 + \rho_1\rho_2) \sin \Phi_k}{\rho_1^2}, \quad (3.19)$$

$$\hat{M}_{21} = -\frac{i}{\eta_k} \frac{(1 + \rho_2\rho_1)(-\rho_2 + \rho_1) \cos \Phi_1}{\rho_2\rho_1^3} - \frac{i}{\eta_k} \frac{(1 - \rho_2^2 + \rho_2\rho_1 - \rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2^2) \sin \Phi_k}{\rho_1^3\rho_2}, \quad (3.20)$$

$$\hat{M}_{22} = \frac{(-\rho_2 + \rho_1 + \rho_1^2\rho_2) \cos \Phi_k}{\rho_1^3} + \frac{(1 + \rho_1\rho_2 - \rho_1^2) \sin \Phi_k}{\rho_1^3}. \quad (3.21)$$

Donde,  $\rho_1 = \rho_{k,k}$ ;  $\rho_2 = \rho_{k,k+1}$ ;  $\rho_{k,l} = k_o\eta_k\eta_k r_l = \frac{\omega\eta_k r_l}{c}$ ;  $\rho_2 - \rho_1 = \Phi_k = k_o\eta_k d_k$ ;  $d_k$  es el espesor de la capa k-ésima.

Hay que notar que en el caso en que  $r_k \gg d_k$  o  $\rho_1 \sim \rho_2 \gg 1$  obtenemos la expresión para ondas planas:

$$\hat{M}_k = \begin{pmatrix} \cos \Phi_k & -i\eta_k \sin \Phi_k \\ -\frac{i}{\eta_k} \sin \Phi_k & \cos \Phi_k \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Nótese que para estas aproximaciones los elementos de la matriz no dependen en absoluto de los valores de coordenadas, sino únicamente del espesor de la capa  $k$  y del índice de refracción de la misma.

Es importante recordar que el caso anterior es solo para una capa y no para el apilado de capas, además que en el caso más general, la posición de cada capa con respecto al centro es importante y habrá diferencias en cuanto a su colocación y a su espesor.

La ecuación 3.17 puede extenderse al caso general en el que se tienen  $N - 1$  capas apiladas.

Partiendo desde la capa interior se tiene:

$$\vec{u}_1 = \hat{M}_1 \cdot u_2 = \hat{M}_1 \cdot \hat{M}_2 \cdot \vec{u}_3 \quad (3.23)$$

$$= \hat{M}_1 \cdot \hat{M}_2 \cdot \hat{M}_3 \cdot \vec{u}_4 \quad (3.24)$$

$$= \hat{M}_1 \cdot \hat{M}_2 \cdot \dots \cdot \hat{M}_{N-1} \cdot \vec{u}_N \quad (3.25)$$

$$= \hat{M} \cdot \vec{u}_N \quad (3.26)$$

La ecuación 3.26 corresponde al apilado de  $N$  capas. Donde :

$$\hat{M} = \prod_{k=1}^{N-1} \hat{M}_k \quad (3.27)$$

$\hat{M}$  es la matriz de transferencia que contiene la información de las interfaces entre la capa interna y la capa externa del apilado. Recuerde que las interfaces están determinadas por condiciones a la frontera y por el índice de refracción correspondiente para cada capa, así como de su anchura.

La utilidad de la matriz de transferencia está en que nos permite calcular los valores de los campos en el exterior del apilado cuando conocemos los valores internos o incidentes.

Hasta aquí se ha descrito la metodología de la matriz de transferencia. Obtendremos ahora los coeficientes de transmisión y reflexión.

De la ecuación 3.26 que expresa la solución de las componentes del campo electromagnético, se reescribe en términos de los vectores  $\vec{q}$  de la siguiente forma:

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \hat{D}_1^{-1} \cdot \hat{M} \cdot \hat{D}_{N-1} \cdot \vec{q}_N = \hat{Q} \cdot \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

donde definimos:

$$\hat{Q} = \hat{D}_1^{-1} \cdot \hat{M} \cdot \hat{D}_{N-1}. \quad (3.29)$$

con el fin de obtener el valor de estas cantidades desconocidas, debido a que la ecuación (3.26) es homogénea, uno puede normalizar una de estas cantidades igualándola a 1.

La condición de radiación de Sommerfeld se toma para la interface final en la que sólo tenemos ondas salientes y no tenemos ondas entrantes, por lo que  $b_N = 0$ .

Como resultado, las amplitudes de onda tienen la forma:

$$\vec{q}_1 = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \hat{D}_1^{-1} \cdot \hat{M} \cdot \hat{D}_{N-1} \cdot \vec{q}_N = a_1 \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_N}} \cdot \hat{Q} \cdot \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Aquí introducimos dos cantidades,  $R$  que es el coeficiente de reflexión del apilado esférico, el cual se calcula como la proporción entre la amplitud de onda saliente y la amplitud de onda entrante.

$$R = \frac{b_1}{a_1}. \quad (3.31)$$

Y el coeficiente de transmisión del apilado dado por:

$$T = \frac{a_N}{a_1} \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_N}} \quad (3.32)$$

donde,  $\eta_1$  es el índice de refracción de la primera capa interna;  $\eta_N$  es el índice de refracción de la última capa del apilado;  $a_k$  es la amplitud de la onda entrante de la capa  $k$ -ésima;  $b_k$  es la amplitud de la onda saliente de la capa  $k$ -ésima.

Finalmente, de la ecuación (3.30) obtenemos  $R$  y  $T$  en términos de los coeficientes de la matriz  $\hat{Q}$  que están dados por:

$$R = \frac{Q_{21}(\omega)}{Q_{11}(\omega)}, \quad T = \frac{\eta_1}{\eta_N} \frac{1}{Q_{11}(\omega)}. \quad (3.33)$$

## Capítulo 4

# Resultados numéricos.

Recordando que el mecanismo de estados puerta aparece siempre que dos sistemas resonantes – uno de ellos con una densidad de estados mucho mayor que el otro – estén acoplados.

Es por eso que los sistemas de microesfera multicapa a analizar convenientemente constan de un núcleo de radio mayor a  $1\mu m$  y un apilado de dos capas en principio. Donde además la capa intermedia deberá tener un espesor aproximadamente 1 orden de magnitud más pequeño que el radio del núcleo. Esto con el fin de que el núcleo y la capa exterior sean el sistema que tiene una densidad de estados mucho mayor y que la capa intermedia sea la capa generadora de los estados puerta. Un esquema de los sistemas de microesferas multicapa a analizar se muestra en la figura 4.1.

Para cada configuración de microesfera multicapa, se graficará el coeficiente de transmisión correspondiente únicamente a la parte radial y para un número fijo de momento angular  $l = 1$  modo que tiene el máximo valor para la componente de campo eléctrico en el centro de la esfera, que es de donde se emite la luz. Es decir, se estudia el caso ideal sin pérdidas y de un solo canal  $l = 1$ .

En estos primeros resultados la capa exterior y el núcleo serán del mismo material. Se comprenderá que en analogía con el modelo del apéndice E, este sistema de núcleo y capa exterior será el que contiene una densidad de estados mucho mayor en comparación con la capa intermedia, llamado en lo siguiente como sistema con mar de estados.

Mediante varios cálculos numéricos se llegó a la conclusión de que la capa contenida en medio del sistema con mar de estados (Capa verde en figura 4.1) es la capa que genera estados puerta.

La variación en anchura o material en estas capas nos darán distintos

resultados en los coeficientes de transición.

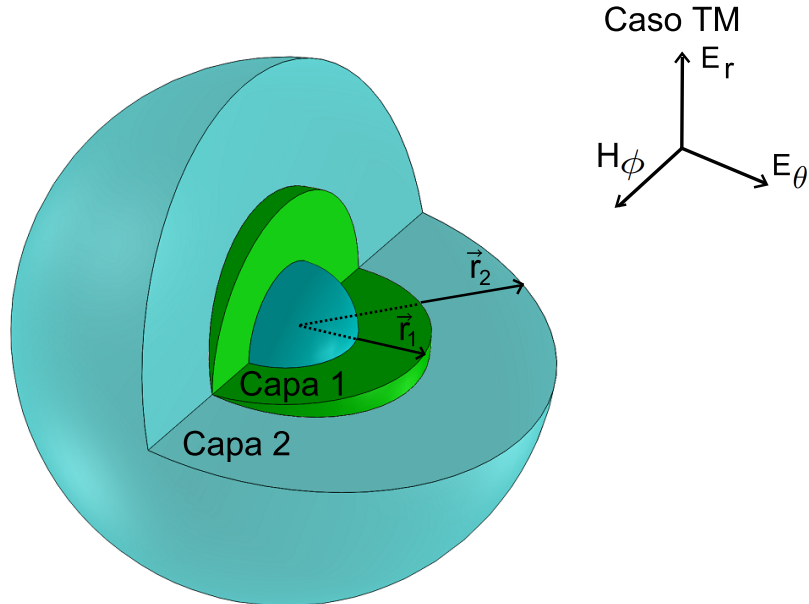


Figura 4.1: Geometría de una microesfera con dos capas.

#### 4.1. Comportamiento del coeficiente de transmisión con el incremento en la densidad de estados del sistema denso

Para aumentar los estados al sistema con un gran número de estados en la microesfera multicapa, se recurre a aumentar las dimensiones de la capa externa dejando fijas las dimensiones de la capa generadora de estados puerta y el núcleo.

La figura 4.2 muestra el cálculo de los coeficientes de transmisión para 6 diferentes anchuras de la capa externa. En cada configuración, se mantiene fijo el radio del núcleo de  $SiO_2$  de  $1\mu m$  y la capa generadora de estados puerta de  $TiO_2$  de  $0.2\mu m$  de espesor.

El aumento de estados se dará en la capa externa de  $SiO_2$ , que pasa de tener un espesor de  $1.8\mu m$  a  $9\mu m$  lo que equivale a decir que el radio total de la microesfera cambia de  $r_T = 3\mu m$  a  $r_T = 10.2\mu m$  que es como se muestra en la figura.

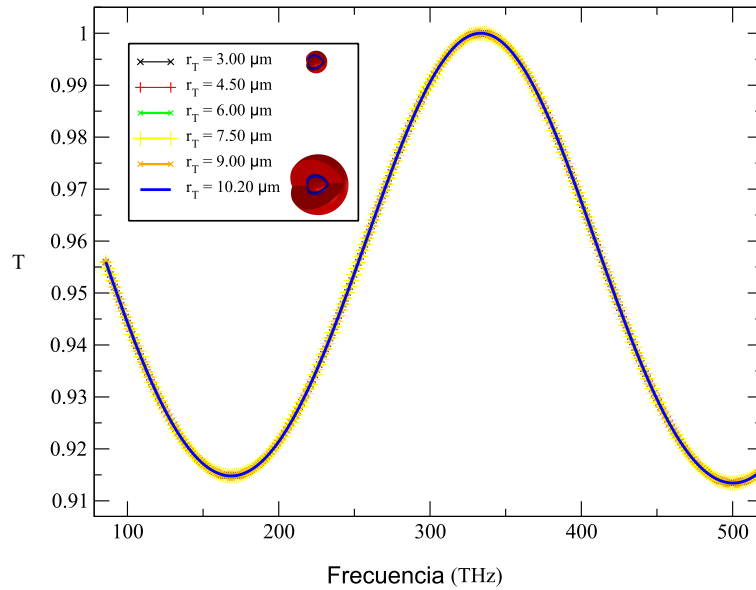


Figura 4.2: Coeficientes de transmisión para una variación de la capa 2 de las microesferas multicapa que hace que la microesfera cambie de un radio total de  $3\mu\text{m}$  a uno de  $10.2\mu\text{m}$ . El núcleo y la capa 2 están compuestas de  $\text{SiO}_2$  y la capa generadora de estados puerta es de  $\text{TiO}_2$  con índices de refracción de 1.46 y 2.25 respectivamente

Los resultados encontrados numéricamente para los sistemas con 2 capas, en los que la capa exterior y el núcleo son del mismo material, y la capa intermedia de otro material tenga un espesor mucho menor comparado con el radio del núcleo (aprox. 1 orden de magnitud). Se encuentra que las dimensiones de la capa exterior no modifican el coeficiente de transmisión.

En general, para aun sistema microesferico multicapa. El tamaño del sistema con mar de estados no modifica el coeficiente de transmisión, siempre que sea este sistema mayor en comparación con el de estados puerta.

Este resultado concuerda con el punto de vista de estados puerta (Ver apéndice E), ya que los estados puerta son los que se dispersan o extienden a lo largo del mar de estados del sistema completo para modular los estados alrededor del estado puerta. Se muestra que el fenómeno de estados puerta es evidente para estos sistemas y lo que muestra el cálculo numérico es que

no hay cambio en anchura de la Lorentziana, ni en la posición del pico de la misma al cambiar el espesor del sistema con mar de estados. Es importante destacar que no hay cambio alguno en los coeficientes de transmisión, sin importar la configuración de materiales del sistema, siempre y cuando mantengan el índice de refracción constante en cada capa.

## 4.2. Estudio del coeficiente de transmisión al colocar la capa generadora de estados puerta en diferentes posiciones

En esta sección estudiaremos el comportamiento del coeficiente de transmisión cuando la capa generadora de estados puerta es colocada en diferentes posiciones después del núcleo.

La Figura 4.3 muestra los coeficientes de transmisión del sistema microesfera multicapa formado por un sistema de núcleo y capa externa de  $SiO_2$  y una capa intermedia generadora de estados puerta de  $TiO_2$  a diferentes posiciones y con espesor fijo de  $0.2\mu m$ .

En cada gráfica del coeficiente de transmisión los cambios en la estructura de la microesfera son en el radio del núcleo y el espesor de la última capa, a modo que no cambie el radio total de la microesfera multicapa, es decir, a medida que el núcleo incrementa su radio, el espesor de la capa 2 disminuirá en las mismas proporciones. Con esto, se logra que la capa generadora de estados puerta se ubique a diferentes posiciones de la microesfera sin que cambie radio total de  $10\mu m$ .

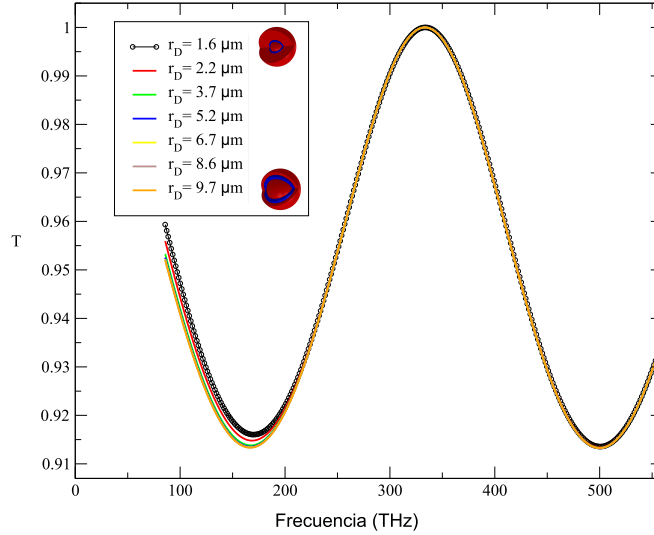


Figura 4.3: Coeficientes de transmisión para una variación en la ubicación de la capa generadora de estados puerta de  $TiO_2$  inmersa en el sistema con densidad de estados mayor de  $SiO_2$ . Donde el radio total de la microesfera multicapa es de  $10\mu m$ , y la capa de  $TiO_2$  de  $0.2\mu m$  de espesor cambia su ubicación de  $2\mu m$  hasta  $8\mu m$  del centro.

Los resultados del cálculo para coeficientes de transmisión de la figura 4.3 muestran que no hay cambio alguno en el coeficiente de transmisión para frecuencias mayores de  $200THz$ .

La pequeña perturbación que se observa en la gráfica de los coeficientes de transmisión para frecuencias menores a  $200THz$  se debe a que la capa generadora de estados puerta cambia en volumen cada que se coloca a diferentes posiciones ya que se ha fijado a un espesor de  $0.2\mu m$ .

La estructura esférica y su simetría radial de estos sistemas multicapa hacen que este resultado no tenga análogo con sistemas de geometría distinta. El resultado de esta sección como de la sección anterior 4.1 son mucha ayuda para el prediseño de estos sistemas ya que indican que cambios al sistema denso no provocan cambios en los coeficientes de transmisión de las microesferas multicapa. Estos resultados dejan en claro que en la fabricación de estas microesferas multicapa la precisión deberá exigirse para la capa generadora de estados puerta y no para el sistema acoplado completo.

### 4.3. Distribución espacial del campo electromagnético en una microesfera multicapa

El método de la matriz de transferencia para estos sistemas multicapa con simetría radial nos permite conocer los valores del campo eléctrico y magnético en cada punto de la microesfera.

Con el fin de observar el comportamiento de los campos en las frecuencias deseadas y en específico para aquellas frecuencias donde se sitúa el pico de la Lorentziana, construimos un sistema que consta de un núcleo de  $SiO_2$  de  $5.19\mu m$  de radio, seguida de una capa de  $Si$  con  $0.1\mu m$  de espesor y apilada sobre ésta, una capa de  $5\mu m$  de espesor del material  $SiO_2$ . Este sistema tiene un coeficiente de transmisión apropiado para ver el comportamiento de los campos, mismo que se muestra en la figura 4.4.

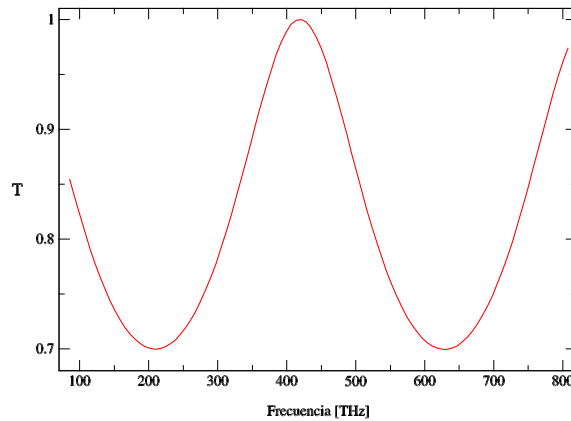


Figura 4.4: Coeficiente de transmisión del sistema acoplado, donde la capa generadora de estados puerta es  $Si$  y espesor  $0.1\mu m$  y el sistema con mar de estados de  $SiO_2$  con índices de refracción de 3.58 y 1.46 respectivamente.

De la gráfica del coeficiente de transmisión de la figura anterior nos interesa saber cómo es el cambio alrededor de la frecuencia del pico que es  $419THz$  que es donde se sitúa el pico del estado puerta.

El comportamiento del campo eléctrico para las regiones espaciales de  $2\mu m$  hasta  $7\mu m$  comprende parte de la capa generadora de estados puerta y una parte de la capa final; como se muestra en la figura 4.5.

La parte que nos interesa observar es en las frecuencias donde se encuentra el pico del fenómeno de la función de fuerza, que es alrededor de  $419THz$

Además en la región espacial donde se encuentra la capa generadora de estados puerta ubicada de  $5.19\mu m$  a  $5.29\mu m$ . En la figura 4.5 se muestra dicha región.

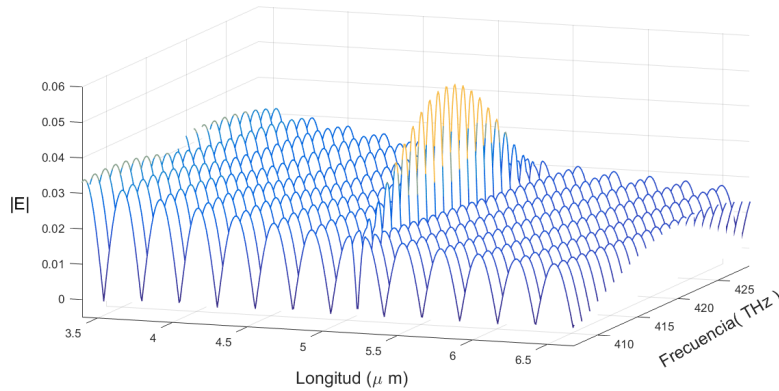


Figura 4.5: Comportamiento espacial del campo eléctrico a lo largo de la microsfera multicapa

La figura 4.5 muestra la amplitud del campo eléctrico alrededor de la frecuencia del pico a  $149THz$ . Para las regiones tanto del núcleo ( por debajo de  $5.19\mu m$ ) como fuera de la capa generadora de estados puerta (arriba de  $5.29\mu m$ ). el campo eléctrico tiene una amplitud modulada. Mientras que el comportamiento del campo  $|E|$  en la capa con estados puerta se nota un crecimiento en la amplitud en forma Gaussiana en las cercanías a  $419THz$  y el motivo es el efecto de función de fuerza, que hace que aquellos estados puerta se distribuyan a lo largo de todos los estados del sistema completo.

El cálculo para el campo magnético muestra en la figura 4.6 en donde se nota que el campo magnético tiene una amplitud dos órdenes menor que la del campo eléctrico. Además para la parte del núcleo, el campo oscila pero disminuyendo en amplitud conforme se aumenta la longitud. En la capa generadora de estados puerta sufre una disminución para crecer un poco en amplitud al salir e ir decreciendo en la capa final pero sin oscilar.

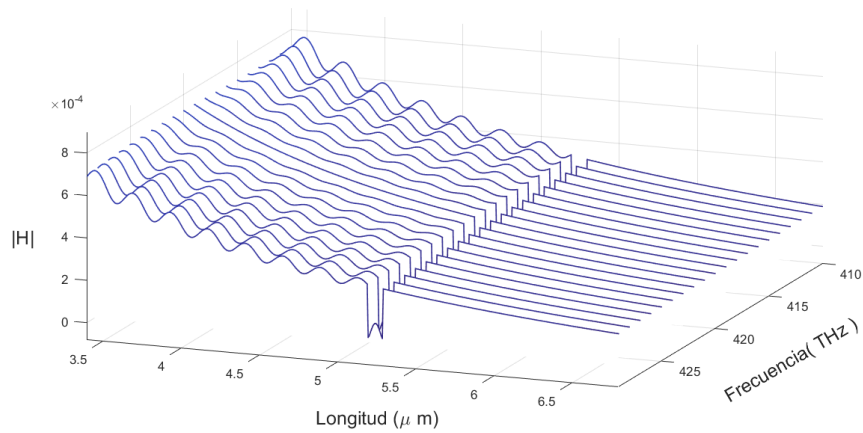


Figura 4.6: Comportamiento espacial del campo magnético a lo largo de la microesfera multicapa

#### 4.4. Diferencias en el coeficiente de transmisión al aumentar la densidad estados puerta

Para agregar estados puerta. Se recurre a aumentar el espesor de la capa intermedia en una microesfera de 2 capas.

Como se podrá ver en los siguientes ejemplos, es posible agregar estados al sistema de microesfera multicapa aumentando el espesor de la capa generadora de estados puerta. De esta manera, habrá más picos en el coeficiente de transmisión.

En este primer ejemplo tenemos un apilado que consta de un núcleo de  $SiO_2$  seguido de una capa de  $Si$  (capa amarilla) la cual ira cambiando en espesor. Finalmente se apila sobre de esta una capa con espesor mucho mayor de  $SiO_2$ . Es importante recordar que el sistema con mar de estados corresponde al núcleo y a la capa externa ambos de  $SiO_2$  (capa roja).

En la figura 4.7 se muestran los coeficientes de transmisión en los que la capa generadora de estados puerta cambia de espesor, de  $0.10\mu m$  a  $0.25\mu m$ .

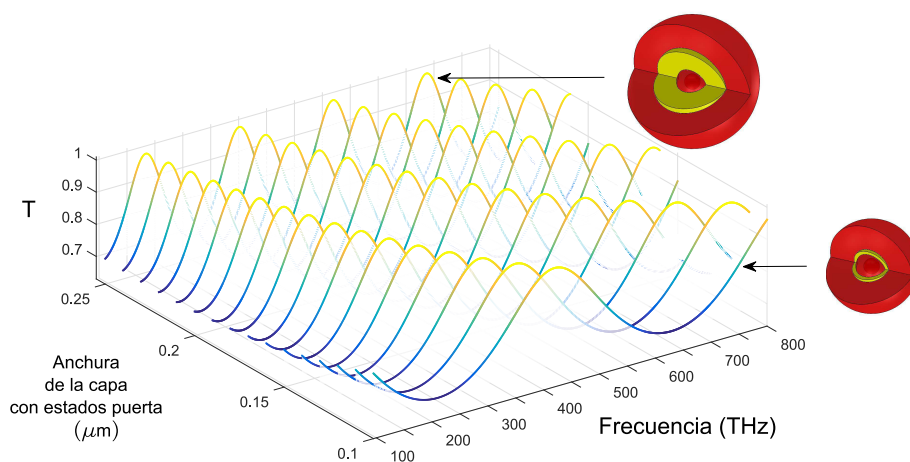


Figura 4.7: Variación del espesor de la capa generadora de estados puerta de  $Si$  en un mar de estados de  $SiO_2$

En la figura 4.7 observamos que partimos de un solo pico en el coeficiente de transmisión para un espesor de  $0.1\mu m$  en la capa que genera los estados puerta ( $Si$ ). Mientras que para un espesor de  $0.25\mu m$  se tienen cuatro picos en el espectro de transmisión. Además conforme la capa generadora de estados puerta se ensancha, los picos se comienzan a desplazar en la frecuencia.

Sin duda el comportamiento en el coeficiente de transmisión es el mismo sin importar los materiales de la microesfera multicapa. La figura 4.8 muestra el cambio de la anchura de las Lorentzianas para 6 sistemas de microesferas distintos que tienen en común al sistema con mar de estados de  $SiO_2$  con  $\eta = 1.46$ .

La composición para todos estos sistemas consiste de un núcleo de  $SiO_2$  seguido la capa correspondiente de estados puertas con  $\eta = 2.25, 2.46, 2.86, 3.04, 3.58, 3.83$  que cambia en espesor y finalmente, se le apila una capa bastante gruesa nuevamente de  $SiO_2$  como capa final. Todos los sistemas de microesferas comparten un radio total aproximado de  $10\mu m$  (Recordemos que variaciones en el espesor de la última capa no afectan el coeficiente de transmisión).

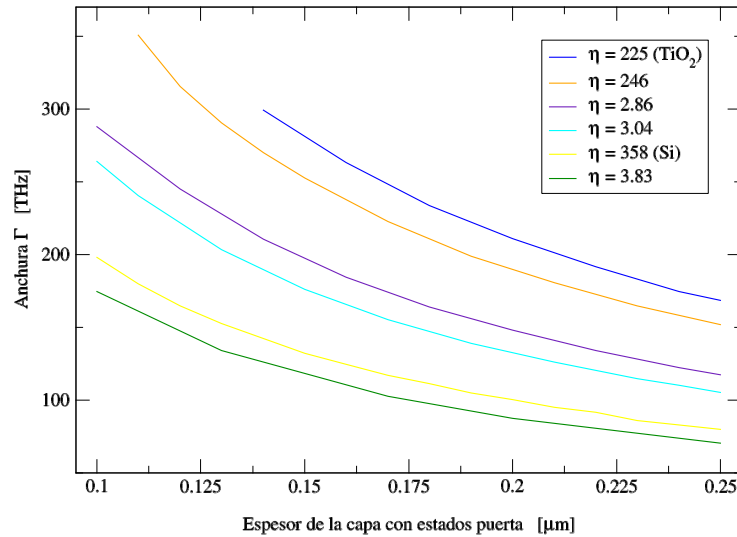


Figura 4.8: Análisis de la anchura de la primera Lorentziana para sistemas multicapa que tienen en común al sistema con mar de estados de  $\text{SiO}_2$ .

Si ahora nos fijamos una microesfera multicapa formada por una capa generadora de estados puerta de  $\text{SiO}_2$  con  $\eta = 1.46$  y un sistema con mar de estados de  $\text{Si}$  con  $\eta = 3.58$  (materiales intercambiados a los del coeficiente de transmisión de la figura 4.7). Los cálculos para los coeficientes de transmisión al variar el espesor de la capa generadora de estados puerta de  $0.15\mu\text{m}$  a  $0.50\mu\text{m}$  se muestran en la figura 4.9.

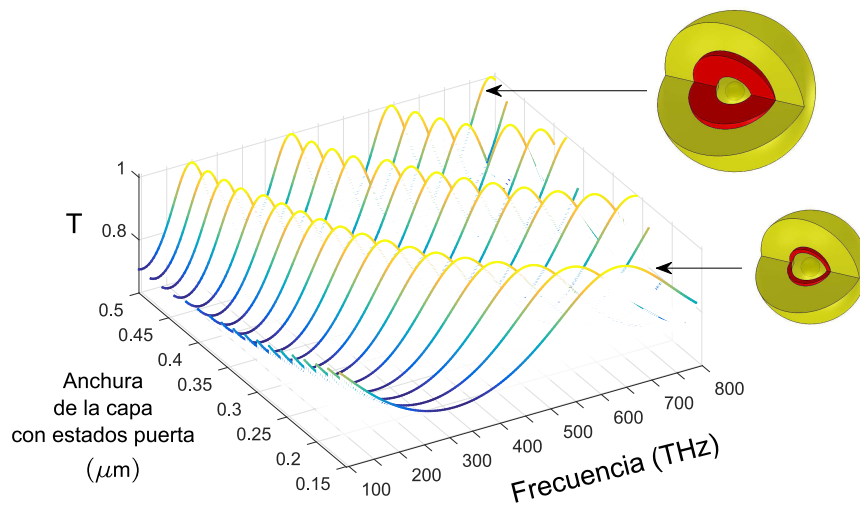


Figura 4.9: Variación de la anchura en la capa generadora de estados puerta de  $\text{SiO}_2$  y sistema con mar de estados de  $\text{Si}$

El comportamiento de la figura 4.9 es similar a los espectros de la figura 4.7 ya que se parte de un pico en el coeficiente de transmisión esta vez cuando el espesor de la capa generadora de estados puerta es de  $0.15\mu\text{m}$ .

A un espesor de  $0.5\mu\text{m}$  se tienen sólo 3 picos en el coeficiente de transmisión. También los picos se desplazan a frecuencias más bajas conforme se aumenta el espesor de la capa generadora de acoplamiento.

En estos dos ejemplos distintos, notamos que el comportamiento es similar a pesar de los cambios físicos.

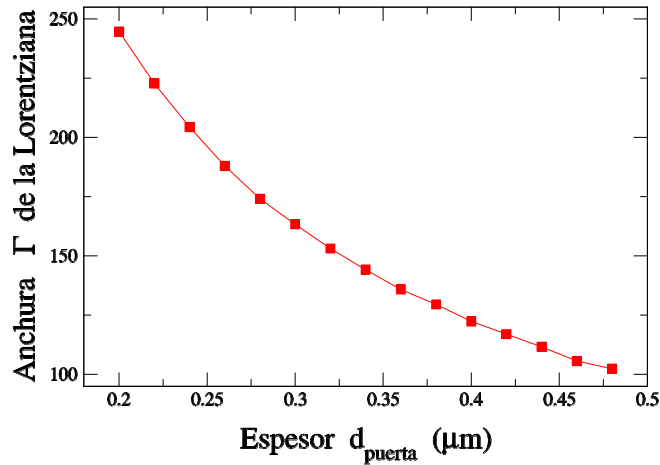


Figura 4.10: Anchura  $\Gamma$  de la Lorentziana en función del espesor de la capa generadora de estados puerta de  $SiO_2$  y sistema con mar de estados de  $Si$

Así pues, si se cambia la densidad de estados puerta en los sistemas de microesfera multicapa, el comportamiento de la anchura en la Lorentziana en función del espesor de la capa generadora de estados tiene la dependencia  $\Gamma \approx 1/d_{puerta}$  como se muestra en la figura 4.10.

De similar manera, la ubicación del pico de la Lorentziana, se recorre en frecuencia como  $1/d_{puerta}$  como se muestra en la figura 4.11, donde  $d_{puerta}$  es el espesor de la capa generadora de estados puerta.

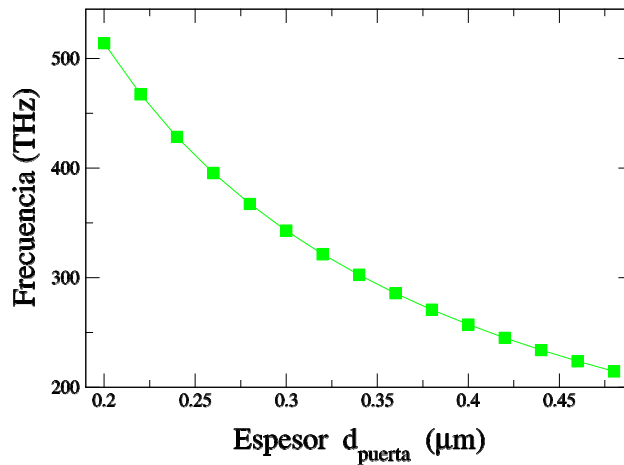


Figura 4.11: Variación de la anchura en la capa generadora de estados puerta de  $SiO_2$  y sistema con mar de estados de  $Si$

Como podemos ver en las anteriores figuras de esta sección, el aumento de espesor de la capa generadora de estados puerta genera estados puerta mismos que crean Lorentzianas en el coeficiente de transmisión. Donde este efecto hace que la anchura de la Lorentziana disminuya y el del pico de la Lorentziana se desplaza a frecuencias más bajas conforme aumentamos el espesor de la capa generadora de estados puerta.

#### 4.5. Modificación del acoplamiento entre el sistema de estados puerta y el sistema con mar de estados

Para empezar esta sección, nuevamente trabajaremos con 2 sistemas acoplados en una microesfera de 2 capas. El sistema de estados puerta formado por la capa intermedia y el sistema con una densidad de estados mucho mayor formado por el núcleo y la capa final que son del mismo material.

Se propone que el acoplamiento entre estos dos sistemas este dado por el cambio en el índice de refracción de la capa generadora con estados puerta. Entonces los sistemas están perfectamente acoplados si todas las capas son

del mismo material, es decir, las capas y el núcleo tienen el mismo índice de refracción. Además podemos decir que los sistemas se irán desacoplando conforme cambia el índice de refracción de la capa generadora de estados puerta.

Cada gráfica del coeficiente de transmisión en la figura 4.12 corresponde a un sistema formado por un núcleo de  $TiO_2$  de espesor  $1\mu m$ , apilado sobre este núcleo la capa generadora de estados puerta de espesor  $0.1\mu m$  y apilada a esta, la capa exterior de  $TiO_2$  de espesor  $9\mu m$ . Donde se hace el barrido del índice de refracción de la capa generadora de estados puerta comenzando con  $\eta = 1$  hasta  $\eta = 4.3$ .

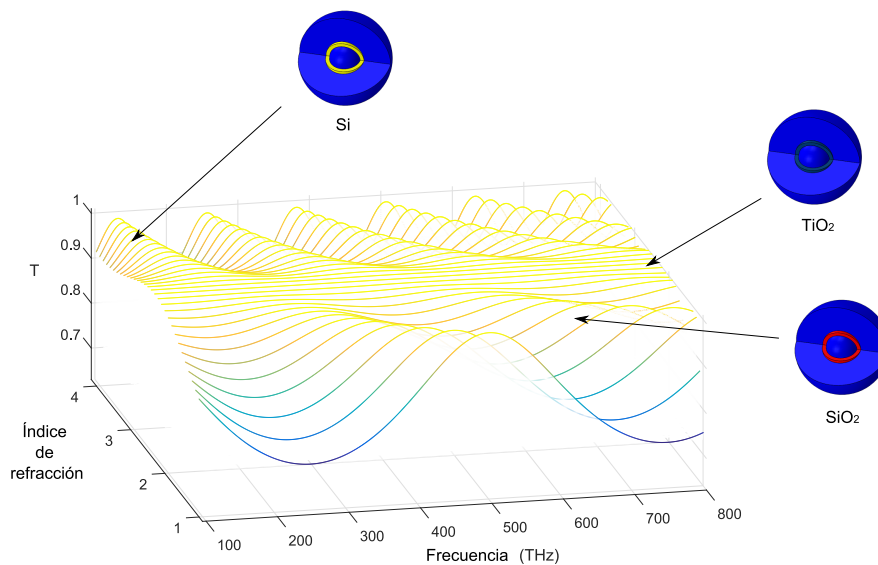


Figura 4.12: Barrido en el índice de refracción para la capa generadora de estados puerta, desde  $\eta = 1$  hasta  $\eta = 4.3$ . Donde el sistema con mar de estados es de  $TiO_2$

Como puede verse en la figura 4.12. El barrido en índices de refracción para la capa generadora de estados puerta pasa por distintos materiales, de los que resaltamos  $SiO_2$  (rojo) con  $\eta = 1.46$ ,  $TiO_2$  (azul) con  $\eta = 2.25$  y  $Si$  (amarillo) con  $\eta = 3.58$ .

La figura 4.12 también muestra que la transmisión es 1 para todo el rango de frecuencias en el que la capa generadora de estados puertas está constituida de  $TiO_2$ . Esto ya se había predicho y es lo que da origen a tener a la microesfera totalmente acoplada.

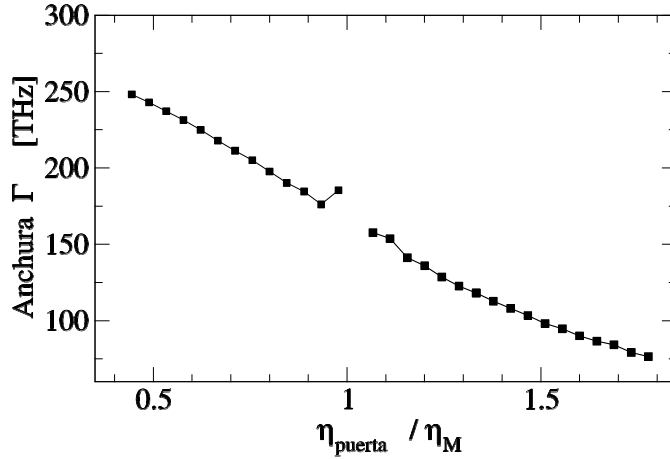


Figura 4.13: Comportamiento del acoplamiento de la microesfera del barrido en el índice de refracción para la capa generadora de estados puerta, desde  $\eta = 1$  hasta  $\eta = 4.3$ . Donde el sistema con mar de estados es de  $TiO_2$

El comportamiento del acoplamiento se muestra en la figura 4.13, se observa que para  $\eta_{puerta} > \eta_M$  donde  $\eta_M$  es el índice de refracción del sistema con mar de estados y  $\eta_{puerta}$  es el índice de refracción de la capa generadora de estados puerta, se estrecha la anchura de la Lorentziana a medida que  $\eta - puerta$  crece como se muestra en la figura 4.13. Además de que se crean nuevos picos de estados puerta y los picos se desplazan a frecuencias menores.

Para el caso en que  $\eta_{puerta} < \eta_M$ , la anchura de la Lorentziana comienza muy ancha (tendiendo al infinito para  $\eta_{puerta} \approx \eta_M$ ) pero se estrecha conforme se aumenta el valor de  $\eta_{puerta}$  hasta llega a un punto crítico en el que la anchura nuevamente comienza a crecer, este cambio se muestra mejor cuando  $\eta_{puerta}/\eta_M < 1$  en la figura 4.13.

Es importante resaltar que en este caso la generación de más Lorentzianas asociadas a los estados puerta, no dependen del espesor de la capa generadora de estados puerta a diferencia de los picos de la sección anterior (sección 4.4), surgen como manifestación del acoplamiento entre el sistema de estados puerta y el sistema con mar de estados.

## Capítulo 5

# Resultados numéricos para el caso $\lambda/4$

El apartado anterior de la sección 4 mostramos los cambios que surgen en el coeficiente de transmisión debidos a modificaciones en los materiales o en la configuración de su estructura de manera general y sin ninguna restricción.

En esta sección se mostraran resultados interesantes que tienen una restricción que brinda un comportamiento distinto al coeficiente de transmisión. Por supuesto estos resultados son de utilidad para el diseño de estas estructuras microesferas multicapa.

La restricción de la que se habla es tener una condición para el espesor de cada capa del apilado de nuestros sistemas y es que en cada capa se deberá cumplir

$$d\eta = \lambda_o/4. \quad (5.1)$$

Donde  $d$  es el espesor de cada capa,  $\eta$  el valor correspondiente del índice de refracción de cada capa. En analogía con ondas planas el caso cuarto de onda es muy interesante ya que se ha mostrado en muchos artículos que corresponde a una reflectancia y transmitancia especular adecuada.[31]. Para estructuras localmente periódicas se encontró que el valor correspondiente a  $\lambda_o = 0.175\mu m$  [28]

### 5.1. Comportamiento del coeficiente de transmisión al incremento en la densidad de estados al sistema denso en la microesfera multicapa para el caso $\lambda/4$

Partiremos nuevamente de un sistema con dos capas como en la figura 4.1. Los sistemas constan de un núcleo de donde se emite luz y dos capas

apiladas sobre él. La capa final y el núcleo son del mismo material y forman el sistema con mar de estados. Este sistema está acoplado a una capa intermedia de otro material diferente que genera los estados puerta, esta capa intermedia posee un espesor muy pequeño en comparación con la capa final.

En este primer apartado queremos conocer el fenómeno que ocurre en el coeficiente de transmisión al aumentar la densidad de estados en la capa exterior. Para obtener un ejemplo de este fenómeno se construye un sistema multicapa que consta de un núcleo de  $SiO_2$  de radio fijo de  $1 \times 10^{-6} m$  y capa intermedia generadora de estados puerta de espesor fijo de  $0.12 \mu m$  de  $Si$  (Silicio); este espesor cumple la condición de la ecuación (5.1).

En lo que respecta a la capa exterior de  $SiO_2$  la cual varía en espesor, parte de tener un espesor de  $0.29 \mu m$  hasta  $2.03 \mu m$ . Cumpliendo con incrementos de  $d_\lambda = \lambda_o / 4\eta_{SiO_2} = 0.29 \mu m$ . Los coeficientes de transmisión con respecto de la frecuencia de estos sistemas son los observados en la figura 5.1

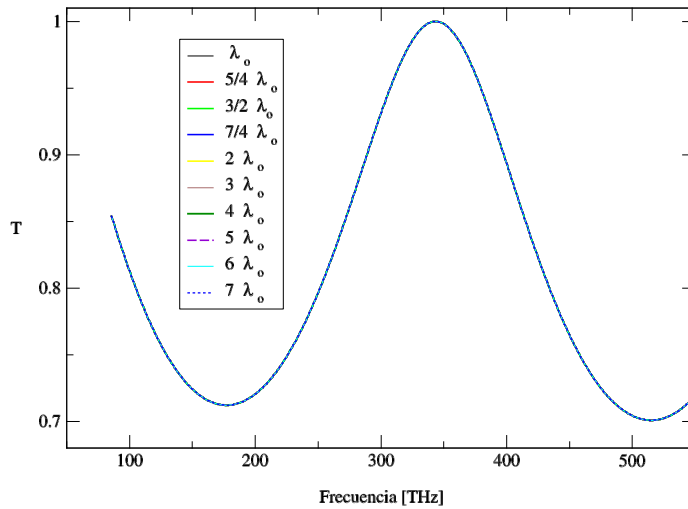


Figura 5.1: Coeficientes de transmisión de las microesferas multicapa, con núcleo de  $SiO_2$ , capa generadora de estados puerta de  $Si$  de espesor  $0.12 \mu m$  y  $\eta = 3.58$ . Con capa final de espesor variable de  $SiO_2$  de  $\eta = 1.46$ . Denotando  $d_\lambda = \lambda_o / (4\eta_{SiO_2}) = 0.29 \mu m$ .

Al igual que en la sección 4.1. El que los coeficientes de transmisión de cada configuración no cambien ante un cambio en el espesor de la capa

exterior, significan que al aumentar estados al sistema con mar de estados estos nuevos estados sirven para ser modulados por el mismo estado puerta pero que no ayudan a generar ningún tipo de amplificación distinta a la que se tenía con los ya vastos estados para la configuración donde la capa externa de mínimo espesor (para este caso  $d_{ext} = 0.29\mu m$ ). Y es que la mayoría de los estados en el sistema con mar de estados es aportada por el núcleo que posee un volumen mayor en comparación con la capa generadora de estados puerta

## 5.2. Estudio del coeficiente de transmisión al colocar la capa generadora de estados puertas en diferentes posiciones a lo largo de la microesfera multicapa con proporciones de $\lambda/4$ para cada una de sus capas

Otra factor que no altera los coeficientes de transmisión como ya se probó en la sección 4.2 es la ubicación de la capa generadora de estados puerta.

Las configuraciones en las microesferas para las cuales se muestran los coeficientes de transmisión de la figura 5.2 constan de una capa intermedia de *Si* con espesor  $0.12\mu m$  (cumpliendo con la ecuación (5.1)). El sistema con mar de estados consta del núcleo y la capa final hecha de *SiO<sub>2</sub>* que para cumplir con la ecuación (5.1) el núcleo parte de un radio  $1\mu m$  para la primera configuración y para las demás configuraciones incrementa en radio proporcionalmente a  $d_\lambda = 0.29\mu m$ ; mientras que la capa exterior decrece en espesor la misma cantidad proporcional a  $d_\lambda = 0.29\mu m$ . con tal de conservar en cada configuración el radio total de la microesfera.

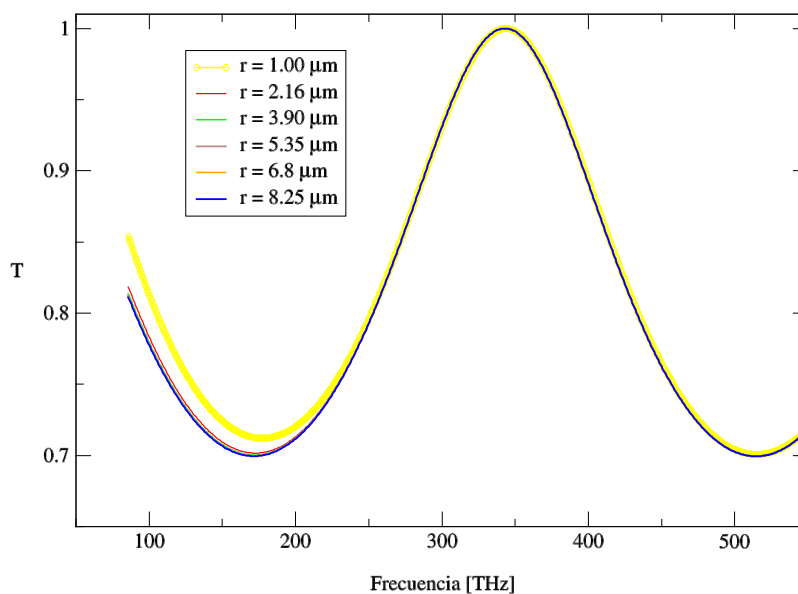


Figura 5.2: Coeficientes de transmisión para sistemas con capa intermedia de  $Si$  y sistema con mar de estados de  $SiO_2$ , la colocación desde el centro a la capa de  $Si$  cambia de  $1\mu$  y aumenta en proporciones de  $5d_\lambda = 1.45\mu m$ .

### 5.3. Análisis del coeficiente de transmisión al aumentar el espesor de la capa generadora de estados puerta en proporciones de $\lambda/4$

Lo que se analiza en esta sección es el fenómeno que le ocurre al coeficiente de transmisión cuando se aumenta la densidad de estados puerta, Para aumentar la densidad de estados puerta aumentamos el espesor de la capa generadora de estados puerta en proporciones de  $\lambda_o/4\eta_{puerta}$ . Un esquema de la variación que se propone lo muestra la figura 5.3.

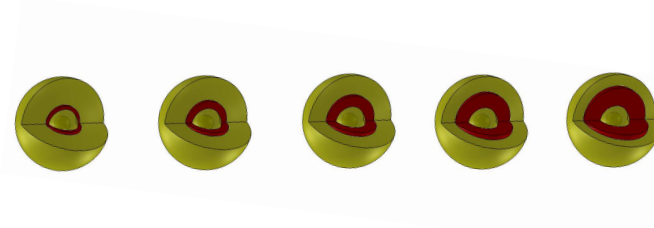


Figura 5.3: Esquema de la variación de espesor en la capa generadora de estados puerta

Como se ve en el esquema, en cada configuración de microesfera tiene un núcleo siempre de un radio de  $1\mu m$  del mismo material que la capa externa. Se le apila sobre el núcleo la capa generadora de estados puerta (caracterizada como la capa roja en el esquema de la figura (5.1) y de otro material distinto al del núcleo o la capa final) y sobre esta capa se le apila la capa exterior.

Lo que cambia en esta sección es el espesor de la capa con estados puerta, que irá aumentando en proporciones de  $\lambda/(4 \eta_{puerta})$ . Este espesor lo denotamos anteriormente como  $d_\lambda$ , que es distinto para cada material, por ejemplo, el valor para el material Silicio es  $d_\lambda = 0.12\mu m$ ; para el material  $TiO_2$   $d_\lambda = 0.19\mu m$  y para  $SiO_2$   $d_\lambda = 0.29\mu m$  (Recordar que  $\lambda_o = 0.175\mu m$ ).

La capa final, debe tener un espesor proporcional a  $d_\lambda = \lambda_o/(4 \eta_{mar})$  para cumplir con la ecuación (5.1). También, el espesor de la capa final debe ser tal, que el radio total de la microesfera multicapa sea aproximado de  $10\mu m$ <sup>1</sup> y ser del mismo material que el núcleo.

<sup>1</sup>Como ya se vio en la sección 5.1 el espesor de la capa con mar de estados no cambia el coeficiente de transmisión

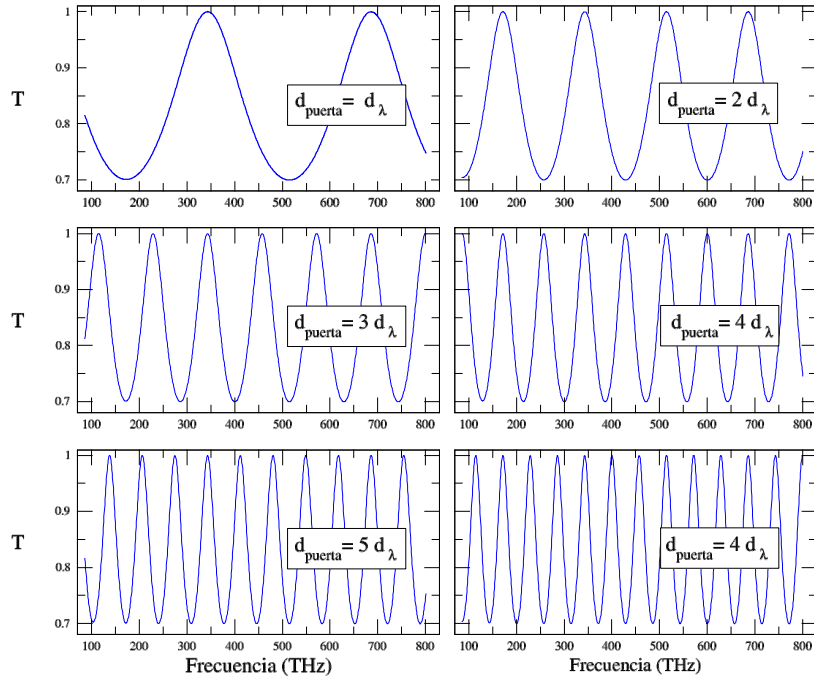


Figura 5.4: Variación en el espesor de la capa de  $Si$  en proporciones de  $d_\lambda$ . El sistema de mar de estados es de  $SiO_2$ .

La figura 5.5 muestra el coeficiente de transmisión de otra microesfera en la que el sistema de mar de estados es  $SiO_2$  y la capa generadora de estados puerta es de  $TiO_2$ .

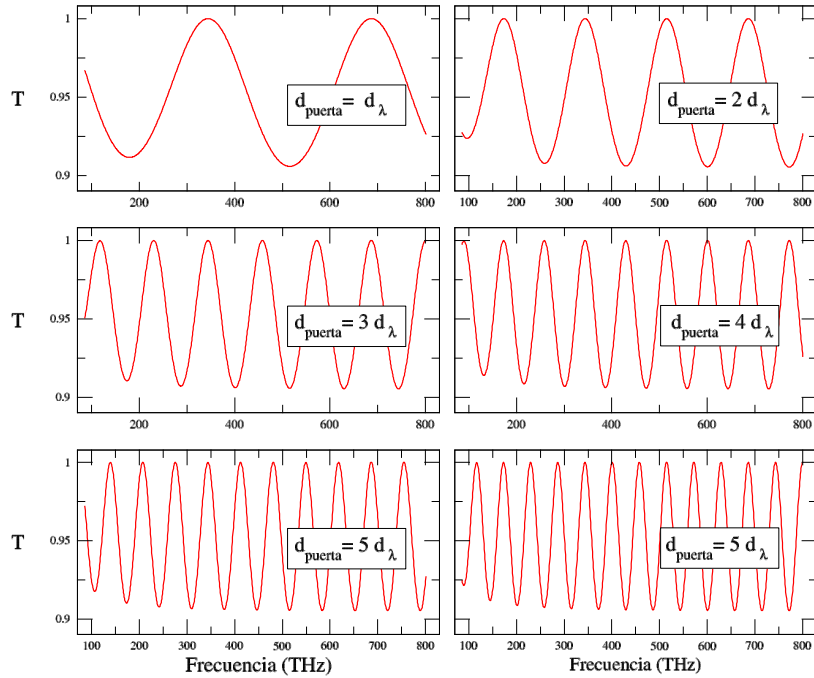


Figura 5.5: Variación en el espesor de la capa de  $TiO_2$  en proporciones de  $d_\lambda$ . El sistema de mar de estados es de  $SiO_2$ . con índice de refracción 2.25 y 1.46 respectivamente.

La figura 5.6 nos muestra ahora los coeficientes de transmisión para otro sistema de microesfera multicapa en el que también se hace variar el espesor de la capa generadora de estados puerta en proporciones de  $d_\lambda$ , este tiene una capa generadora de estados puerta de  $TiO_2$  con  $\eta = 2.25$  y el sistema con mar de estados es de  $Si$  con  $\eta = 3.58$ .

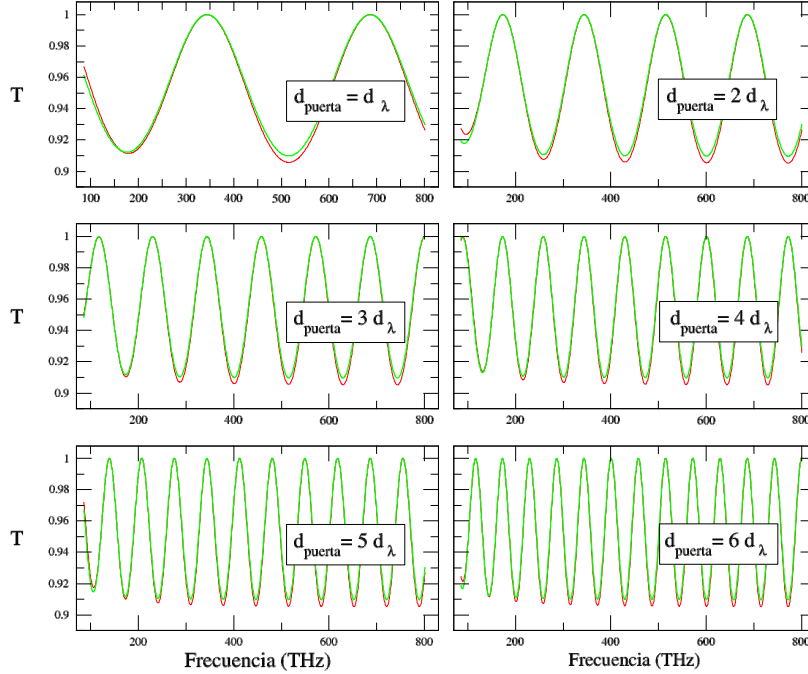


Figura 5.6: Variación en el espesor de la capa de  $TiO_2$  en proporciones de  $d_\lambda$ . El sistema de mar de estados es de  $Si$ . Con índices de refracción de 2.25 y 3.58 respectivamente.

Un patrón emerge de aumentar el espesor de la capa generadora de estados puerta en proporciones de  $\lambda_o/4$  y es que sin importar la configuración de materiales de la microesfera multicapa. Para cada incremento  $d_\lambda$  en la capa generadora de estados puerta se generan dos Lorentzianas (dos estados puerta más), además de que el pico de las Lorentzianas se localiza en la misma frecuencia para cualquier configuración de materiales y la única alteración que caracteriza entre un coeficiente de transmisión y otro está en la altura y la anchura de las Lorentzianas.

#### 5.4. Diferencias en el coeficiente de transmisión al cambiar el acoplamiento entre capa generadora de estados puerta y el sistema con mar de estados respetando las proporciones de $\lambda/4$

En la sección 4.5 se propone el acoplamiento de los sistemas de microesfera multicapa el cual depende del índice de refracción de la capa generadora

de estados puerta. Donde se propone que si el sistema esta acoplado es porque el índice de refracción de la capa generadora de estados puerta  $\eta_{puerta}$  es similar a el índice del sistema con mar de estados  $\eta_M$  ( $|\eta_{puerta} - \eta_M| \ll 1$ ). Entonces mientras más crece la diferencia entre los índices de refracción de un sistema y otro se dice que el sistema de microesfera multicapa se va desacoplando.

En esta sección haremos un barrido al índice de refracción de la capa generadora de estados puerta cumpliendo que en la construcción de nuestros sistemas de microesferas de 2 capas se cumpla la ecuación 5.1.

La figura 5.7 se muestran 32 gráficas de los coeficientes de transmisión correspondientes a sistemas que constan de un núcleo de  $SiO_2$  de radio  $1\mu m$  donde se apila la capa generadora de estados puerta que tendrá un espesor  $d_\lambda$  adecuado para cada índice de refracción. Finalmente sobre la capa generadora de estados puerta se apila una capa de  $SiO_2$  de espesor  $30d_\lambda = 8.7\mu m$ .

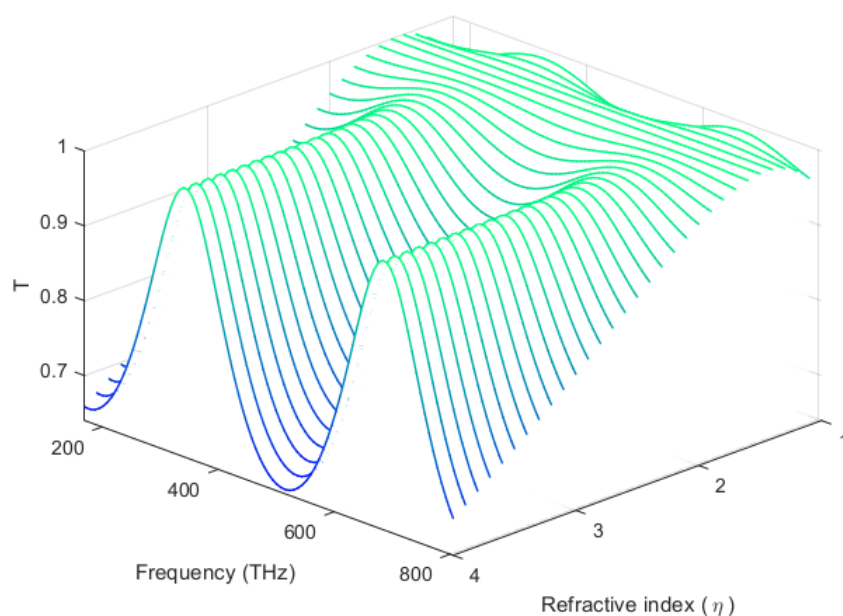


Figura 5.7: Barrido de coeficientes de transmisión correspondientes a sistemas con una capa generadora de estados puerta de espesor  $d_\lambda$  donde cada uno de ellos tiene un índice de refracción distinto en un sistema con mar de estados de  $SiO_2$ .

Como era de esperar en los resultados del cálculo de los coeficientes de transmisión. Se observa que solo se generan dos picos de estados puerta y

además esos dos picos están siempre a la misma frecuencia de 340 THz y 680 THz sin importar el valor del índice de refracción de la capa generadora de estados puerta, lo que concuerda con lo visto en la sección anterior. Los únicos factores que cambian en cada coeficiente de transmisión son la anchura y la altura de la Lorentziana.

Sabemos de la sección anterior que no se generan más picos porque las capas tienen un espesor  $d_\lambda$  adecuado para cada índice de refracción por lo que para el caso  $\lambda_o/4$  el acoplamiento de las microesferas multicapa depende solo de la anchura de la Lorentziana del coeficiente de transmisión (siempre que se deje a un lado la altura de la Lorentziana como identificador del acoplamiento). Por lo que se concluye lo mismo que en la sección 4.5.

## 5.5. Creación de bandas prohibidas partiendo de tener una sola capa generadora de estados puerta

En esta sección introduciremos un sistema más complejo con un número de capas mayor a 2. Nuevamente analizaremos la diferencia en el coeficiente de transmisión al ir aumentando capas a nuestro sistema.

Partiremos con un sistema con un núcleo esférico de material "A" apilada sobre este una capa de material "B" y sobre esta capa se apila una capa final "A".

Después tendremos un sistema que consta igualmente de un núcleo de material "A" después se le apila una capa de material "B" y luego una de material "A". Luego se le apila una secuencia más de una capa "B" seguida de una capa final de material "A". Este sistema de 3 capas se caracterizara solo por el número de capas "B" que son las capas que hemos llamado capas de estados puerta.

Iremos creando sistemas de ese tipo, cada vez, añadiendo una secuencia más de capas "B" seguida de "A". En donde el núcleo tiene un radio fijo de  $1\mu m$ , cada capa intermedia tendrá un espesor  $d_\lambda$  adecuado y la capa final de material "A" tendrá un espesor igual a  $10d_\lambda$ .

La figura 5.8 muestra como es el sistema de microesfera multicapa con 5 capas "B".

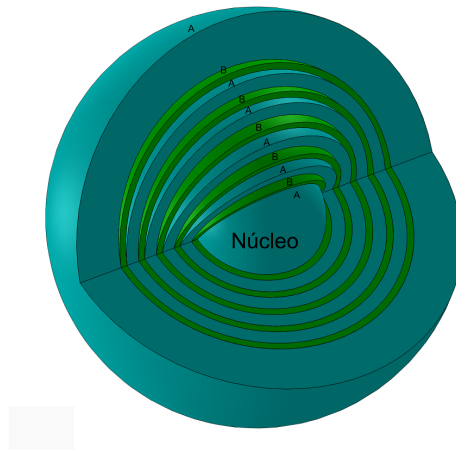


Figura 5.8: Esquema de una microesfera multicapa localmente periódica con 5 capas de estados puerta

En la imagen 5.9 se muestran los coeficientes de transmisión de los sistemas multicapa descritos en los que el material "A" es  $TiO_2$  con  $\eta = 2.25$  y el material "B" está hecho de  $Si$  con  $\eta = 3.58$ . En esta figura se nota como para el sistema con solo una capa "B" se tiene un coeficiente con dos Lorentzianas como los obtenidos anteriormente.

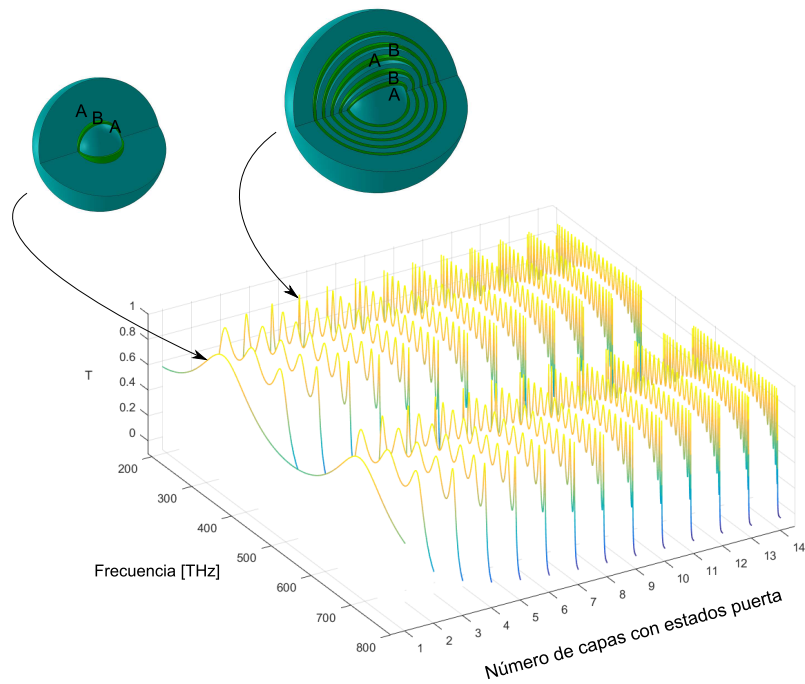


Figura 5.9: Creación de bandas a partir de capas con estados puertas. Sistema de estados puerta de  $Si$ , sistema con mar de estados de  $TiO_2$ .

Conforme agregamos más secuencias de capas "B" y "A" se crean bandas que tienen estrecho intervalo de frecuencias permitidas y otros en donde no hay transmisión. Además se nota que la anchura del intervalo de frecuencias permitido está relacionado con la anchura de la Lorentziana y que el número de picos en el intervalo de frecuencias permitidas está relacionado con el número de capas "B".

En la figura 5.10 aclara la relación entre la anchura del intervalo de frecuencias permitidas y la Lorentziana (La anchura de la banda  $215.1THz$  y la anchura de la Lorentziana es  $144.3THz$ ), donde el número de capas acopladas se refiere al número de capas "B".

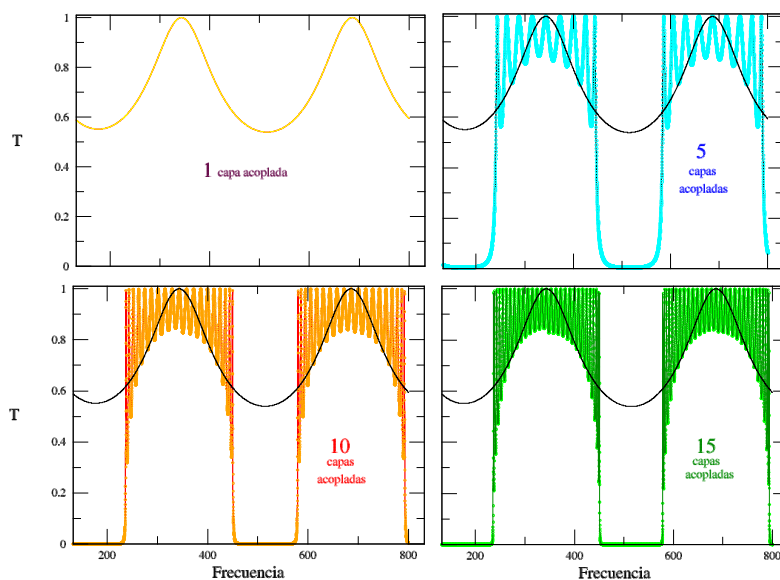


Figura 5.10: Bandas a partir de capas con estados puerta. Sistema de estados puerta de  $Si$ , sistema con mar de estados de  $TiO_2$ .

También se muestra en la figura 5.10 que hay  $2n - 1$  picos en el intervalo de frecuencias permitidas, donde "n" es el número de capas "B" en la microesfera.

Recordando que en nuestros anteriores análisis, el número de picos en el coeficiente de transmisión es el número de estados puerta, indica que en el intervalo de frecuencias permitidas tenemos  $2n - 1$  estados puerta superpuestos por cada intervalo de frecuencias permitidas de lo que se puede concluir es que cada capa incluyendo las de material "A" forman un estado puerta. Y que el sistema con mar de estados lo forma la capa exterior y el núcleo.

Además tomando lo analizado en la sección 5.4 de acuerdo al tipo de materiales a usarse en las microesferas multicapa se tendrá un ancho de banda distinto como se muestra en la imagen 5.11. Esta diferencia en la anchura y la altura de la Lorentziana en cada coeficiente de transmisión, se interpretará como el acoplamiento entre el sistema de estados puerta (capas internas) y el sistema con mar de estados (núcleo y capa externa).

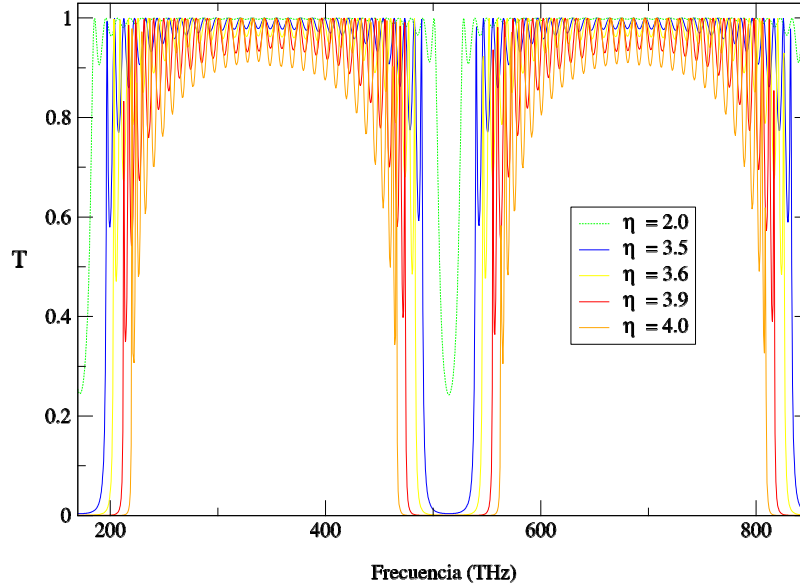


Figura 5.11: estrechamiento de bandas al modificar el índice de la capa generadora de estados puerta  $\eta_{puerta}$  para microesfera con 30 capas. Sistema de mar de estados de partir de capas con estados puertas. Sistema con mar de estados de  $TiO_2$  con  $\eta = 2.25$ .

Hasta este momento solo se había hecho uso de un solo canal  $l=1$  pues el efecto de tomar modos  $l > 1$  para el coeficiente de transmisión crearía distorsiones que impediría ver los picos de resonancia de la forma Breit-Wigner, así como también podría perderse fenómeno que se muestra en el coeficiente de transmisión al cambiar la estructura de la microesfera.

En el caso real el cálculo numérico debe tomar en cuenta el mayor número de contribuciones de  $l$  así como los factores de pérdidas en el material además de tomar el índice de refracción como  $\eta = \eta_r + i\eta_{im}$ , es decir, tomar en cuenta también una parte imaginaria para el índice de refracción de los materiales. Estos factores harían imposible saber con exactitud el valor del espesor para el caso  $\lambda_o/4$ .

Con la metodología para el cálculo numérico de los coeficientes de transmisión para sistemas de microesfera multicapa localmente periódicos como los narrados al principio de esta sección, podemos tomar en cuenta valores de  $l > 1$  como los que se muestran en figura 5.12, esperando así tener una idea de los cambios que sufre el coeficiente de transmisión en un caso real, aunque en este caso no se toman pérdidas ni índices de refracción complejos.

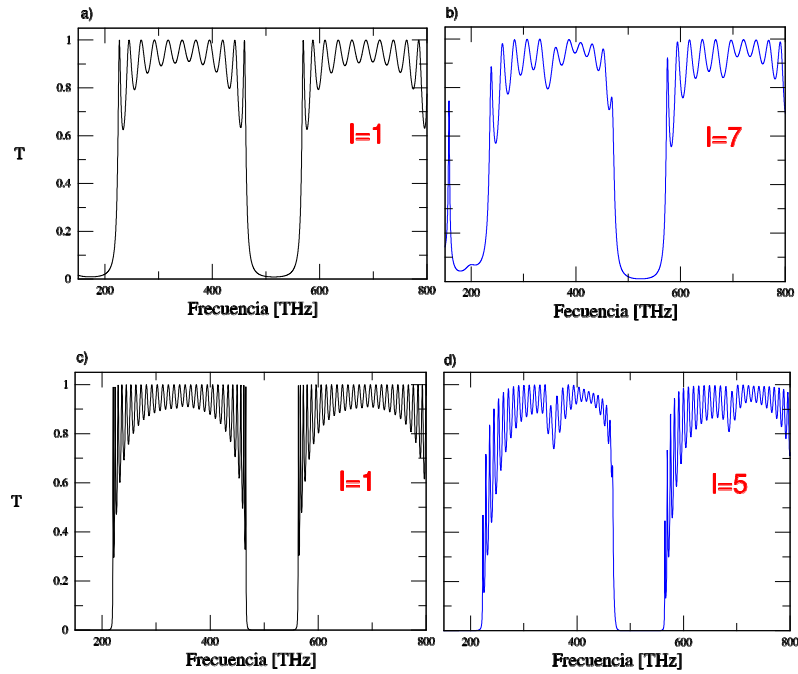


Figura 5.12: Comparación en el coeficiente de transmisión de sistemas localmente periódicos al tomar distintos valores de  $l$ . a) se compara con b), ambos con 6 capas "B". c) se compara con d) ambos con 15 capas "B". En todos la capa "B" es de  $Si$ , mientras que el material "A" es de  $TiO_2$ .

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo presentamos un sistema de multicapas esféricas dieléctricas que presenta el fenómeno de estados puerta. El sistema de microesferas se describe mediante las ecuaciones de Maxwell. Calculamos los coeficientes de transmisión de la radiación electromagnética para diferentes configuraciones de las multicapas.

En primera instancia mostramos que un sistema formado por un núcleo, una capa delgada y una capa gruesa, presentan el fenómeno de estados puerta. Encontrando que la capa delgada acoplada al núcleo y a la capa gruesa, funciona como capa generadora de estados puerta.

Encontramos que el ancho de la Lorentziana que describe la resonancia gigante, es independiente de la densidad de estados del sistema con mar de estados.

Encontramos que para  $r > r_o$  ( $r_o$  radio del núcleo de la microesfera multicapa) la ubicación de la capa generadora de estados puerta no altera el coeficiente de transmisión y el ancho de la Lorentziana de la resonancia no cambia.

El incremento en el espesor de la capa generadora proporciona un aumento en el número de estados puerta. En 5.3, aumentos de  $d_\lambda/2$  al espesor de la capa generadora, da origen a una Lorentziana más, lo que se relaciona con el surgimiento de un estado puerta más. Además este surgimiento de nuevos estados hace que se vayan recorriendo los picos de las Lorentzianas, para que puedan coexistir en el mismo intervalo de frecuencias.

El acoplamiento entre la capa generadora de estados puerta y el sistema con mar de estados repercute en el ancho de las resonancias gigantes. Cuando el acoplamiento entre las capas es grande, es decir, cuando los índices

de refracción  $\eta_{puerta}$  y  $\eta_M$  son iguales (siendo  $\eta_{puerta}$  y  $\eta_M$  los índices de refracción de la capa generadora de estados puerta y del sistema de estados puerta respectivamente), el ancho de las Lorentzianas tiende a infinito. Mientras que si el acoplamiento tiende a ser pequeño ( $\eta_{puerta} \neq \eta_M$ ) se tienen dos casos:

Cuando  $\eta_{puerta}/\eta_M < 1$ . Se tiene que conforme el valor de  $\eta_{puerta}/\eta_M$  se aproxima a 1 la anchura de la Lorentziana decrece hasta el punto crítico donde la anchura es infinita.

Para valores  $\eta_{puerta}/\eta_M > 1$ . El ancho de la Lorentziana decrece conforme aumenta el valor de  $\eta_{puerta}/\eta_M$ .

Por último, generamos un sistema de microesfera localmente periódico en sus capas basándonos en los sistemas de estados puerta con un núcleo, una capa delgada y otra gruesa. Encontramos que el número de picos en el coeficiente de transmisión está directamente relacionado con el número de capas generadoras de estados puerta. Si se considera el número de capas de estados puerta como ' $n$ ', entonces el número de picos es  $2n - 1$ .

Para este tipo de sistemas de microesferas multicapa no hay reporte alguno de estudios sistemáticos hechos para configuraciones como las vistas en las secciones 3.5 y 3.6, ni de observaciones como las mostradas en las secciones 4.3 – 4.5.

# Bibliografía

- [1] Petukhova A., Paton A. S., Wei Z., et al, *Adv. Funct. Mater.*, **18**, 1961–1968, 2007.
- [2] Gourevich I., Field L. M., Wei Z., Petukhova A., et al, *Macromolecules*, **39**, 4, 1449-1454, 2006.
- [3] Sánchez-Pérez C. , Volke-Sepúlveda K., Flores J., Marrakesh Morocco, *Mar.* **20–23**, 209, 2011.
- [4] Díaz-de-Anda, A., Volke-Sepúlveda, et al, *American Journal of Physics*, **83**, 12, 2015.
- [5] Flores J., Seligman T. H., Alvarez-Tostado J. M., Novaro O, Mateos J. L., *Doorway States in Classical Physics* Springer Berlin Heidelberg, 239-251, 1992.
- [6] Goldhaber M., Teller E., *Phys. Rev.* **74**, 1046, 1948.
- [7] B. Block and H. Feshbach, *Ann. Phys. (N. Y.)* **23**, 47, 1963.
- [8] Robson D., Lane A. M., *Phys. Rev.* **161**, 982, 1967.
- [9] Lejeune A., Mahaux C., *Zeitschrift fur Physik* 207, 35-46, 1967.
- [10] Birbrair B. L., Ryazanov, V. I., *Physics of Atomic Nuclei*, **64**, 3, 416-422, 2015.
- [11] Gamarra R. F., Josebachuili M., Zurita P., Gil S., *American Journal of Physics*, **75**, 12, 1073-1077, 2007.
- [12] Auerbach N., Vladimir Zelevinsky, *Phy. Rev C*, **90**, 034315, 2014.
- [13] Feshbach H., *American Physical Society*, **46**, 1-5, 1974.
- [14] Fleisher A.J., Bird R. G, Zaleski D. P., *J. Phys. Chem. B*, **117** (16), 4231–4240, 2013.
- [15] Bliokh Y. P., Freilikher V., Shi Z., et al, *New J. Phys.*, **17**, 113009, 2015.

- [16] Laarmann T., Shchatsinin I., et al, *Phy. Rev. Lett.*, **98**, 058302, 2007.
- [17] Aberg S., et al, *Phy. Rev. Lett.*, **100**, 204101, 2008.
- [18] Hertel I. V., Shchatsinin I., Laarmann T., Zhavoronkov N., Ritze H., Schulz C. P., *Phy. Rev. Lett.*, **102**, 023003, 2009.
- [19] Kilcoyne A. L. D., Aguila A., et al, *Phy. Rev. Lett.*, **105**, 213001, 2010.
- [20] Morales A., Díaz de-Anda A., et al, *EPL (Europhysics Letters)*; **99**, 5, 54002, 2012
- [21] Bohr A., Mottelson B. R., *Nuclear Structure Vol 1: Single Particle Motion*, Word Scientific, 302-307, 1997.
- [22] Torres Guzmán J. C., Díaz de-Anda A., Flores J. Monsivais G., Gutiérrez L. Morales A., *EPL (Europhysics Letters)*. En revisión (2016).
- [23] Yano T., Kumagai T., *Applied Glass Science*, 6, 375-386, 2015.
- [24] Son J., Lee H. J., Oh M., *Chem. Eur. J.*, 19, 6546-6550, 2013.
- [25] Burlak G., Zamudio-Lara G., Juarez D., *Phys. Lett. A*. **289**,99 2001.
- [26] Burlak G, Zamudio-Lara A., Castro-Beltran H., Rivera-Lopez A., *Optics Communications*, **206**, 1-3, 27-37, 2002.
- [27] Burlak G., *Physics Letters A*, **299**, 1, 94-101, 2002.
- [28] Burlak G., Koshevaya S., Sanchez-Mondragon J, Grimalsky V, *Optics Communications*, **180**, 1-3, 49-58, 2000.
- [29] Burlak G., Koshevaya S., Sanchez-Mondragon J., Grimalsky V, *Optics Communications*, **187**, 1-3, 91-105, 2001.
- [30] Burlak G., *The Classical And Quantum Dynamics Of The Multispherical nanostructures*, Imperial College Press, London, 2004
- [31] P. Voarino, C. Deumié, C. Amra, *O.S.A.*, **12**, 19, 4476-4482, 2004

## Apéndice A

# Método del potencial de Debye para ver el comportamiento de los campos electromagnéticos en una microesfera

Para la propagación de ondas electromagnéticas en procesos con simetría esférica es conveniente usar el potencial de Debye, potencial desarrollado en los trabajos de Debye y Mie[30].

Para llegar a la obtención sencilla que nos permita comprender el proceso de propagación de ondas electromagnéticas en sistemas esféricos, es necesario escribir las ecuaciones que rigen la electrodinámica.

Las ecuaciones de Maxwell para  $\rho = 0$  medios isotrópicos y no magnéticos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0; \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}; \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.4})$$

Donde  $\vec{B}$  y  $\vec{D}$  son los vectores de desplazamiento del campo magnético y eléctrico respectivamente y  $\vec{H}$  y  $\vec{E}$  son los campos magnético y eléctrico

respectivamente.  $\vec{j}$  es la corriente eléctrica y  $\rho$  la carga eléctrica.

Además de estas 4 ecuaciones que rigen la teoría electromagnética, se tienen las relaciones de los campos eléctricos y magnéticos en términos de los potenciales escalar y vectorial. Esta representación de los campos en términos de potenciales posee la utilidad de simplificar cálculos así como de aprovechar la simetría geométrica de los sistemas a estudiar.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_M, \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{D} = -\frac{\partial \vec{A}_M}{\partial t} - \nabla f_M. \quad (\text{A.6})$$

Donde  $\vec{A}_M$  y  $f_M$  son el potencial vectorial y el potencial escalar respectivamente.

Para la propagación de ondas electromagnéticas se usan las relaciones constituyentes de los campos  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  y  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  donde  $\epsilon$  y  $\mu$  en general son tensores (medios anisotrópicos no lineales).

Para nuestro sistema multicapa propuesto, se estudian sistema isotrópicos, no magnéticos, por lo que  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon$  y  $\mu = \mu_0$ .

Para el caso de las ondas TM se usan las ecuaciones A.3 y A.4 y A.5 para obtener:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}_M = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}_M}{\partial t^2} + \mu \vec{j} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \nabla f_M}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz dada por  $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$ .

A partir de este punto, nos interesará aprovechar la simetría radial de nuestro sistema, por lo que la permitividad dieléctrica depende solamente del radio, es decir  $\epsilon = \epsilon(r)$ . Además de esto, se buscaran soluciones para el potencial vectorial, de la siguiente forma:

$$\vec{A}_M = (\Pi_M, 0, 0) \quad (\text{A.8})$$

Es esta función  $\Pi_M = \Pi_M(r, \theta, \psi)$  es el llamado potencial de Debye.

Para visualizar este potencial de Debye en esta simetría veamos el campo  $\vec{B}$  en términos de este potencial, esto se logra sustituyendo explícitamente cualquier operador en coordenadas esféricas, así:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_M \quad (\text{A.9})$$

$$= \hat{\theta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_M}{\partial \psi} + \hat{\psi} \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.10})$$

De la misma forma, evaluando la ecuación (A.7) explícitamente en coordenadas esféricas, vemos, que término a término obtenemos las siguientes ecuaciones. Para la dirección  $\hat{r}$  los términos son:

$$\left[ -\frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Pi_M = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f_M}{\partial r} + \mu_0 j_r. \quad (\text{A.11})$$

Para los términos del vector unitario  $\hat{\theta}$  obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \Pi_M}{\partial r} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial f_M}{\partial t} \right) = \mu_0 j_{\theta r}. \quad (\text{A.12})$$

Y finalmente para la dirección  $\hat{\psi}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \Pi_M}{\partial r} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial f_M}{\partial t} \right) = \mu_0 j_{\psi r} \sin \theta. \quad (\text{A.13})$$

La similitud en estas últimas dos ecuaciones (ecuación (A.12) y (A.13)), hace que después de integrarlas respectivamente para  $\theta$  y para  $\psi$  den como resultado:

$$\frac{\partial \Pi_M}{\partial r} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial f_M}{\partial t} = \tilde{\Phi}_M(r, t). \quad (\text{A.14})$$

La integración deja a  $\tilde{\Phi}_M(r, t)$  una función arbitraria; convenientemente se elige a

$$\tilde{\Phi}_M(r, t) = \epsilon(r) \int \frac{\Phi_M}{\epsilon(r)}. \quad (\text{A.15})$$

Al derivar parcialmente respecto a  $r$  la ecuación A.14 se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial f_M}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \epsilon(r) \int \frac{\Phi_M}{\epsilon(r)} \right), \quad (\text{A.16})$$

desarrollando obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_M}{\partial r} \right) = \frac{\Phi_M}{\epsilon(r)}. \quad (\text{A.17})$$

Resaltando el coeficiente que sustituiremos en la ecuación A.11. Que es la parte radial de la ecuación de Ampere- Maxwell en términos de los potenciales vectorial y escalar para ondas TM, se obtiene:

$$\frac{\epsilon(r)}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_M}{\partial r} \right) = -\epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) - \Phi_M. \quad (\text{A.18})$$

Sustituyendo la anterior en la ecuación A.11

$$-\frac{1}{r^2} \Delta_T \Pi_M - \frac{1}{r^2} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial t^2} = \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \Phi_M + \mu_0 j_r, \quad (\text{A.19})$$

donde:

$$\Delta_T = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

Por lo que la ecuación A.19 toma la siguiente forma:

$$-\frac{1}{r^2} \Delta_T \Pi_M + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial t^2} - \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) = +\Phi_M + \mu_0 j_r, \quad (\text{A.20})$$

Valiéndose la arbitrariedad de la función  $\Phi_M$  se propone convenientemente que  $\Phi_M = \mu_0 j_r$ . Así la ecuación A.20 está dada por:

$$\frac{1}{r^2} \Delta_T \Pi_M + \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Usando la dependencia temporal de los campos  $e^{i\omega t}$  en la ecuación A.21 se tiene:

$$\frac{1}{r^2} \Delta_T \Pi_M + \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{\epsilon \omega^2}{c} \Pi_M = 0. \quad (\text{A.22})$$

La ecuación A.22 se resuelve por el método de separación de variables, donde  $\Pi_M(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ , obteniendo:

$$-\left[ \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = \epsilon(r) r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \epsilon(r) k^2 r^2 \quad (\text{A.23})$$

Esto lleva a que ambos miembros de la igualdad sean términos constantes; se elige a esta constante como  $l(l+1)$  y así se tiene para el lado izquierdo de la ecuación anterior lo siguiente:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} - l(l+1)Y(\theta, \phi) = 0. \quad (\text{A.24})$$

La solución a esta ecuación son las funciones esféricas  $Y(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi)$ , donde  $m$  es el número azimutal  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ .

Del otro lado de la igualdad, se obtiene:

$$\epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left[ k\epsilon(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (\text{A.25})$$

Pero si la dependencia en el índice de refracción solo depende de la frecuencia ( $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ) se tiene:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \left[ k\epsilon - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (\text{A.26})$$

Haciendo  $\epsilon$  constante ( $\epsilon = \epsilon_{00}$ ) y haciendo un cambio de variable  $\rho = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_{00}}r$ . La ecuación A.26 toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \left[ k^2 \epsilon_{00} - k^2 \epsilon_{00} \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0, \quad (\text{A.27})$$

finalmente obtenemos la ecuación para la parte radial:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0, \quad (\text{A.28})$$

Las soluciones de esta ecuación pueden ser escritas a través de varias funciones de Bessel

Usaremos las funciones de Hankel  $H_l^{(1,2)}(y)$  ya que tanto en su primera, como en su segunda especie; estas funciones son usadas para representar las soluciones de ondas entrantes y salientes en problemas que involucran la propagación de ondas en simetrías esféricas.

Escribiremos las funciones de Hankel de tal manera:

$$H_l^{(1,2)}(\rho) = P_l^{(1,2)}(\rho)e^{\pm i\rho}. \quad (\text{A.29})$$

Sólo para identificarlas, denotemos la derivada de las funciones de Hankel como:

$$\frac{d}{d\rho} H_l^{(1,2)}(\rho) = G_l^{(1,2)}(\rho)e^{\pm i\rho}. \quad (\text{A.30})$$

De donde tenemos que  $P_l^{(1,2)}(\rho)$  es el factor racional pre-exponencial de la función de Hankel y  $G_l^{(1,2)}(\rho)$  es el factor racional pre-exponencial de la derivada de la función de Hankel. El superíndice (1, 2) indica si la función es de primera o segunda especie y  $l$  es el índice de la función. La distinción y separación de las partes racionales permiten hacer los cálculos de manera simple.

Con esto, tenemos la solución a la ecuación homogénea para el potencial de Debye

$$\Pi(r, \theta, \phi) = \sum_l \sum_{m=-l}^l R_l(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.31})$$

donde como ya se dijo  $Y_l^m(\theta, \phi)$  son las funciones llamadas armónicos esféricos, con  $m$  entero positivo y  $m = -l, \dots, l$  por la parte de  $R_l(r)$  puede ser descrita por las funciones de Hankel.

Omitiendo la parte angular de la ecuación (A.31) las componentes de los campos eléctrico y magnético se expresa de la siguiente manera:

$$H_\phi = \frac{i\eta}{c\mu_o} \left[ aP_l^{(2)}(\rho)e^{-i\rho} + bP_l^{(1)(\rho)}e^{i\rho} \right], \quad (\text{A.32})$$

$$E_\theta = aG_l^{(2)}(\rho)e^{-i\rho} + bG_l^{(1)(\rho)}e^{i\rho}, \quad (\text{A.33})$$

con  $\rho = k \eta r$ , a y b son constantes arbitrarias,  $\eta$  es el índice de refracción del material. Las ecuaciones (A.32) y (A.33) son expresiones que debido a la naturaleza de las funciones de Hankel, describen las ondas entrantes y salientes de la simetría esférica para los campos eléctricos y magnéticos. Las cantidades  $P_l^{(1,2)}(\rho)$  y  $G_l^{(1,2)}(\rho)$  son proporcionales a las amplitudes de las ondas que se transmiten y reflejan en cada capa que depende de la coordenada radial  $\rho = k\eta r$ .

## Apéndice B

# Polarización del campo electromagnético

En un espacio homogéneo se pueden propagar ondas electromagnéticas transversales con dos polarizaciones diferentes. La polarización TM y la polarización TE. En el espacio homogéneo no hay diferencia entre ellas. Sin embargo en presencia de fronteras esta degeneración deja de ser válida y estas dos polarizaciones dejan de ser iguales. En la polarización TE (Transversal Eléctrico) no existe ninguna componente del campo eléctrico en la dirección de propagación. Y en la polarización TM (Transversal Magnético) no existe ninguna componente del campo magnético en la dirección de propagación. Como se ilustra en la imagen B.1

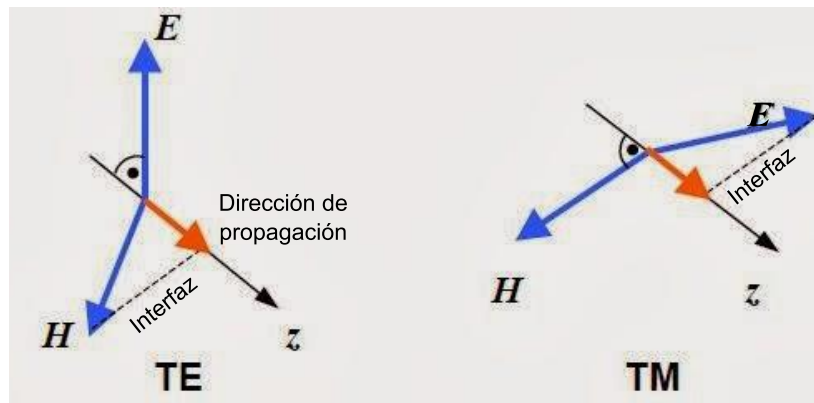


Figura B.1: Esquema de la polarización TE y TM.

Otro sistema de coordenadas usado frecuentemente se refiere al plano de incidencia. Este es el plano formado por la dirección de propagación y el vector perpendicular al plano de una interfaz. La componente del campo eléctrico paralelo a este plano se denomina P

(paralelo) y la componente perpendicular a este plano se denomina S (de Senkrecht, traducción del alemán para perpendicular). La luz polarizada con su campo eléctrico a lo largo del plano de incidencia se denomina polarización P, mientras que la luz cuyo campo eléctrico es normal al plano de incidencia se llama polarización S.

La polarización P se conoce comúnmente como transversal magnética (TM). La polarización S también se denomina transversal eléctrica (TE), así como polarizada por sigma o plano sagital polarizado.

## Apéndice C

# Metodología para la obtención de la ecuación de Helmholtz

Partiendo de la ecuación que se expresa solamente en términos del potencial de Debye  $\Pi_M(r, \theta, \phi)$  dada por:

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Pi_M + \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{\epsilon \omega^2}{c} \Pi_M = 0. \quad (\text{C.1})$$

Para resolver la ecuación (C.1) teniendo en cuenta que sólo nos interesa la parte radial de la ecuación debido a la simetría nuestro sistema. Se propone que el potencial de Debye sea el producto de dos funciones, una que dependa solamente de la parte radial y otra función que dependa de la parte angular, es decir,  $\Pi_M(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ , obtenemos:

$$\frac{R}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + r^2 Y \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + r^2 \epsilon k^2 R Y = 0, \quad (\text{C.2})$$

donde  $k = \frac{\omega}{c}$ . Ahora es conveniente multiplicar la ecuación (C.2) por el producto de funciones  $R(r)Y(\theta, \phi)$  para poder separar la ecuación.

$$\frac{1}{Y \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \epsilon(r) \frac{r^2}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + r^2 \epsilon k^2 = 0, \quad (\text{C.3})$$

Así podemos separar la ecuación en una parte radial y otra angular como sigue:

$$- \left[ \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = \epsilon(r) r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \epsilon(r) k^2 r^2 \quad (\text{C.4})$$

En la ecuación (C.4) tenemos de lado izquierdo términos con dependencia únicamente angular, mientras que de lado derecho se tienen términos dependientes sólo de  $r$ . El hecho que podamos términos con dependencias distintas hace que ambos términos sean iguales a una constante que en principio la denotaremos como  $\kappa$  y así, para la parte angular tenemos que:

$$\kappa = - \left[ \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right]. \quad (\text{C.5})$$

De estos términos que sólo dependen de las coordenadas angulares, tenemos la siguiente ecuación de funciones esféricas:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \kappa Y = 0. \quad (\text{C.6})$$

Esta ecuación de funciones esféricas donde la constante  $\kappa = l(l+1)$  y  $l$  es el número esférico.

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + l(l+1)Y = 0. \quad (\text{C.7})$$

La ecuación de armónicos esféricos que contiene la dependencia angular como resultado de la separación de variables. Tiene por solución

$$Y(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\left(\frac{2l+1}{2}\right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (\text{C.8})$$

en donde  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ ,  $l=0, 1, 2, \dots$  y  $P_l^m(x)$  son las funciones asociadas de Legendre dados por:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (\text{C.9})$$

Estas soluciones de la ecuación (C.8) son conocidas como armónicos esféricos poseen dos índices y son ortonormales respecto al ángulo azimutal  $\phi$ .

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (\text{C.10})$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \quad (\text{C.11})$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (\text{C.12})$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \quad (\text{C.13})$$

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} \sin^2 \theta e^{i2\phi} \quad (\text{C.14})$$

$$(\text{C.15})$$

De la ecuación (C.4) esta vez tomamos los términos de la parte derecha y agregamos el resultado obtenido de resolver para la parte angular ( $\kappa = l(l+1)$ ).

$$\epsilon(r)r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \epsilon(r)k^2 r^2 = l(l+1) \quad (\text{C.16})$$

La ecuación (C.16) es la que gobierna el comportamiento radial, así que esta ecuación describirá todo el comportamiento en sistemas con simetría radial. La ecuación radial se lleva a:

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left[ \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (\text{C.17})$$

En la ecuación (C.17) tomamos el caso más general en que la dependencia de  $\epsilon$  sea tanto del radio como de la frecuencia  $\epsilon = \epsilon(\omega, r)$ . También podemos notar que  $R$  puede depender del número esférico  $l$  y que no depende del número azimutal, es decir,  $R = R_l(r)$ .

\*\*\*

Ahora, para nuestros propósitos tenemos que la dependencia de  $\epsilon$  sea únicamente de la frecuencia, tenemos que la ecuación (C.17) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \left[ \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (\text{C.18})$$

Para el caso en que  $\epsilon$  sea una constante hacemos un cambio de variable de  $\rho = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} r$  y así obtener de (C.18):

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (\text{C.19})$$

La ecuación (C.19) es la forma general de la ecuación de Helmholtz y al igual que la ecuación (C.18) Aceptan por solución las funciones de Bessel.

## Apéndice D

# Funciones de Hankel

Las funciones de Hankel  $h^{(1,2)l}(y)$  también llamadas, funciones de Bessel de tercera especie. Son funciones compuestas linealmente en su parte real por las funciones de Bessel de primera especie y en su parte imaginaria por las funciones de Neumann.

$$H_l^{(1)}(x) = J_l(x) + iN_l(x) \quad (\text{D.1})$$

$$H_l^{(2)}(x) = J_l(x) - iN_l(x) \quad (\text{D.2})$$

Las funciones de Hankel de primera y segunda especie por sus propiedades asintóticas la hacen particularmente útil para representar las soluciones de las ondas entrantes y salientes de una ecuación de ondas con simetría esférica o cilíndrica.

Distinguiremos a las funciones de Hankel de tal manera:

$$H_l^{(1,2)}(\rho) = P_l^{(1,2)}(\rho)e^{\pm i\rho}. \quad (\text{D.3})$$

También, es conveniente denotar la derivada de las funciones de Hankel como:

$$\frac{d}{d\rho}H_l^{(1,2)}(\rho) = G_l^{(1,2)}(\rho)e^{\pm i\rho}. \quad (\text{D.4})$$

De donde tenemos que  $P_l^{(1,2)}(\rho)$  es el factor racional pre-exponencial de la función de Hankel y  $G_l^{(1,2)}(\rho)$  es el factor racional pre-exponencial de la derivada de la función de Hankel.

El superíndice (1, 2) indica si la función es de primera o segunda especie y  $l$  es el índice de la función. La distinción y separación de las partes racionales permiten hacer los cálculos de manera simple.

En el caso general usando las propiedades básicas de las funciones de Hankel, podemos obtener las siguientes formulas recursivas:

$$P_l^{(1,2)}(\rho) = \frac{2l-1}{\rho} P_{l-1}^{(1,2)}(\rho) - P_{l-2}^{(1,2)}(\rho), \quad (D.5)$$

$$G_l^{(1,2)}(\rho) = -\frac{2l-1}{\rho} P_l^{(1,2)}(\rho) - P_{l-1}^{(1,2)}(\rho). \quad (D.6)$$

Un ejemplo de estos, para el caso en que  $l = 0$  y  $l = 1$  se tiene:

$$P_0^{(1,2)}(\rho) = \pm \frac{i}{\rho}, \quad (D.7)$$

$$G_0^{(1,2)}(\rho) = \frac{1}{\rho}, \quad (D.8)$$

$$P_1^{(1,2)}(\rho) = -\frac{\pm i + \rho}{\rho^2}, \quad (D.9)$$

$$G_1^{(1,2)}(\rho) = \frac{\pm i(1 - \rho^2) + \rho}{\rho^3}. \quad (D.10)$$

Por ejemplo, con las relaciones recursivas de las ecuaciones (D.5) y (D.6) y lo anterior se obtiene fácilmente:

$$P_2^{(1)}(\rho) = \pm \frac{-3i + (-3 + i\rho)\rho}{\rho^3}, \quad (D.11)$$

$$P_3^{(1)}(\rho) = \pm \frac{-15i + (-15 + (6i + \rho)\rho)\rho}{\rho^4}, \quad (D.12)$$

$$P_2^{(2)}(\rho) = P_2^{(1)*}(\rho^*) \quad (D.13)$$

## Apéndice E

# Modelo matemático del fenómeno de estados puerta cuántico

Siempre que se tengan dos sistemas acoplados entre sí se tendrá el fenómeno de función de fuerza del mecanismo de estados puerta. Supóngase dos sistemas acoplados entre sí. Al sistema que llamaremos, sistema con mar de estados, por tener una densidad de estados mucho mayor en comparación con la del otro sistema, tendrá estados denotados por  $|c\rangle$ .

Al sistema cuya densidad de estados es baja en comparación con la densidad de estados del sistema con mar de estados, se llama sistema de estados doorway o de estados puerta; estos pocos estados están denotados por  $|a\rangle$ . [20]

Cabe hacer notar que los estados en ambos sistemas pueden ser de la misma clase o no, siempre que un sistema contenga una densidad de estados mucho mayor al otro sistema y que todos los estados estén contenidos en el mismo intervalo de energías o frecuencias.

Ahora bien, para modelar la función de fuerza, por simplicidad supondremos que ambos conjuntos de estados son eigenestados de un mismo Hamiltoniano al que simbolizaremos como  $H_o$  [21], por lo que se tendrá:

$$\begin{aligned} H_o|a\rangle &= E_a|a\rangle, \\ H_o|c\rangle &= E_c|c\rangle. \end{aligned} \tag{E.1}$$

El Hamiltoniano  $H_o$  no es el Hamiltoniano del sistema completo. El Hamiltoniano del sistema completo se representa por  $H$  al cual se le supone con una descripción complicada, no explícita o desconocida. Al contrario de  $H_o$  que se supone se conoce completamente la expresión para este.

Al Hamiltoniano completo, lo podemos describir de la siguiente forma.

$$H = H_o + V, \quad (\text{E.2})$$

donde  $V$  caracteriza el acoplamiento entre el sistema de estados puerta y el sistema con mar de estados. Donde los eigenestados de cada sistema por separado ( $E_a$  y  $E_c$ ) no son eigenestados del Hamiltoniano del sistema completo.

Supóngase que la base del sistema completo acoplado está dada por  $|\alpha\rangle$  por lo que:

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle. \quad (\text{E.3})$$

Los estados  $|\alpha\rangle$  correspondientes al Hamiltoniano completo, son un conjunto de estados aún más denso que los que tiene el sistema con mar de estados además, no son la suma directa de los estados de ambos sistemas que se encuentran acoplados.

El acoplamiento entre los estados del sistema con mar de estados y los estados puerta, está dado por:

$$V_{ac} = \langle a|V|c\rangle, \quad (\text{E.4})$$

tal que:

$$\langle a|V|a\rangle = \langle c|V|c\rangle = 0. \quad (\text{E.5})$$

El acoplamiento de estados es el responsable del fenómeno de función de fuerza (*Strength Function Fenomenon*), dicho fenómeno no es otra cosa que la distribución de la amplitud de todos los estados del sistema denso sobre los estados puerta, lo que hace un efecto de modulación alrededor de estos.

Para mostrar el fenómeno de la función de fuerza, de la ecuación (E.2) se obtiene la ecuación de eigenvalores

$$E_\alpha - E_a = \sum_{c,c \neq \alpha} \frac{V_{ac}^2}{E_c - E_\alpha}, \quad (\text{E.6})$$

que posee una raíz entre cada par sucesivo de valores propios. Los eigenestados  $|\alpha\rangle$  están dados por:

$$|\alpha\rangle = C_a|a\rangle + \sum_c C_c|c\rangle, \quad (\text{E.7})$$

de donde se obtiene la función de fuerza que está dada por el coeficiente  $C_a$

$$C_a^2 = |\langle a|\alpha\rangle|^2 = 1 + \sum_{c,c \neq \alpha} \left( \frac{V_{ac}}{E_\alpha - E_c} \right)^2, \quad (\text{E.8})$$

de la ecuación (E.8) podemos interpretar que la amplitud de los estados puerta crece o se extiende a lo largo de los demás estados.

El caso general mostrado en la ecuación (E.8) aparenta tener una forma complicada. Para el caso particular en el que se tenga equiespaciamento entre niveles de energía en el sistema denso:<sup>1 2</sup>

$$E_c = cD, \quad (\text{E.9})$$

con "D" el espaciamento entre niveles y  $c = 0, 1, 2, 3, \dots$

Si a la anterior suposición del equiespaciamento entre niveles de energía, se añade la suposición de tener el mismo valor de acoplamiento entre cualquier estado puerta con los estados del sistema denso. Teniendo,  $V_{ac} = V_o$ .

Agrupando los términos en la suma de (E.8) se tiene, la probabilidad de que el estado  $|a\rangle$  esté en un intervalo de energía  $E$  del espectro el cual toma la forma Breit-Wigner (Lorentziana) dada por:[21]

$$P_a(E) = \frac{1}{D} C_a^2(E_\alpha \approx E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E_a - E)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (\text{E.10})$$

con la anchura de la lorentziana dada por

$$\Gamma = 2\pi \frac{V_o^2}{D}. \quad (\text{E.11})$$

La ecuación (E.10) es la probabilidad de tener al estado puerta con energía  $E$ . Siendo  $E$  un autovalor del sistema completo. La ecuación (E.10) que es la ecuación de una Lorentziana corresponde a la repartición del conjunto de estados con densidad mayor sobre los estados puerta, haciendo que se vea una resonancia aumentada.

---

<sup>1</sup>No hace falta que el espaciamento entre los niveles de energía sea equidistante ya que se tienen muchos estados y todos bastante cercanos.

<sup>2</sup>En la referencia [22] se analiza un sistema donde el espaciamento en el espectro de frecuencias no es equidistante y se encuentra que el fenómeno de función de fuerza también se presenta.

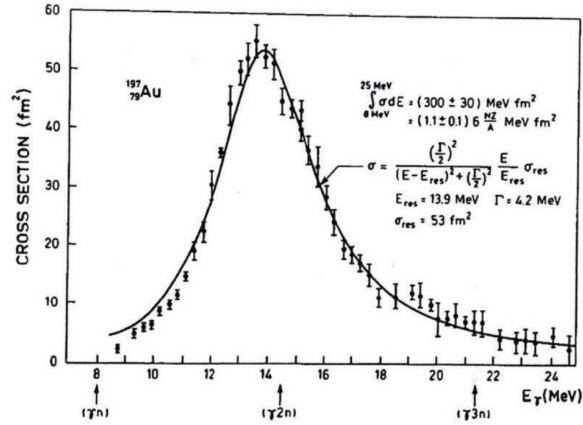


Figura E.1: Absorción de fotones de la sección transversal en una resonancia gigantesca. La curva tiene la forma Breit-Wigner.<sup>4</sup>

Para este caso particular no hay que olvidar que la anchura de la Lorentziana dada en la ecuación (E.11) depende directamente del cuadrado del potencial de acoplamiento  $V_0$  y es inversamente proporcional a "D" el espaciamiento entre niveles de energía.

Para puntualizar dicha observación, tenemos que el aumento en la interacción entre los estados puerta con el mar de estados, lleva a un aumento en la anchura de la Lorentziana. Para el caso en que se aumente el espaciamiento entre niveles de energía "D", se tendrá como resultado una disminución en la anchura de la Lorentziana. Finalmente es importante recordar que las ecuaciones (E.10) y (E.11) se obtienen considerando que los niveles de energía están igualmente espaciados en el sistema de mar de estados y también se considera constante el valor para la interacción entre los estados puerta con el mar de estados.

Es importante mencionar que esta sección sólo sirve como ilustración del modelo del fenómeno de la función de fuerza, y su relación con los estados puerta, así como, el hecho que este modelo es para sistemas cuánticos únicamente. Pero el fenómeno aparece tanto en sistemas cuánticos como clásicos como ya se vio anteriormente.

Los sistemas que analizaremos son sistemas ópticos de microesferas multicapas. Sistemas similares son analizados en las referencias [25] a [29] pero con apilados de 30 capas y con ciertas periodicidades para observar otro tipo

<sup>4</sup>Bohr and Mottelson, Nuclear Structure, vol. 2, 1975

de fenómenos.

Los sistemas de microesfera multicapa que estudiaremos aquí consisten en pocas capas, pero abordaremos su estudio desde el punto de vista físico de la interacción de los estados puerta con diferentes sistemas con estados densos. Sistemas que tienen un radio total del orden de  $10\mu m$ . En estos sistemas, se usan las leyes de Maxwell y el potencial de Debye para conocer el comportamiento de los campos eléctrico y magnético en cada capa del apilado. Esto y la obtención de las propiedades de transmisión de cada uno de estos sistemas acoplados, se hace gracias al método de matriz de transferencia, donde se mostrará que también se encuentra presente el fenómeno de función de fuerza.