BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

BUAP

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

ALGUNAS ADJUNCIONES A GCONV

TESIS

que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

EMILIO ANGULO PERKINS

Director de Tesis:
Dr. Juan Angoa Amador

Junio 2021

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

EMILIO ANGULO PERKINS

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 18 de mayo de 2021, con la tesis titulada:

"ALGUNAS ADJUNCIONES A GCONV"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 28 de mayo de 2021

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

D*PDS/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Para Chestov la razón es vana, pero hay algo más allá de la razón. Para un espíritu absurdo la razón es vana y no hay nada más allá de la razón.
El Mito de Sísifo, Albert Camus.

A las amadas:
Kalina, Kaly y Ale.
A Alejandro
Al guerrero Vilchis
A todos mis muertos

Agradecimientos

A mi asesor Juan Angoa, cuya visión de la matemática nos ha permitido recorrerla, en medida de nuestras posibilidades, con infantil ingenuidad y, así, maravillarnos y sorprendernos en su vasta inmensidad pero sobre todo, aprender. No puedo imaginarme como matemático sin pensar en la influencia del maestro Angoa.

A los maestros Agustín Contreras y Frédéric Mynard, que son sin lugar a dudas directores honorarios de este trabajo. Al primero por la ayuda brindada con su enciclopédico saber en topología; al segundo por la ayuda y oportunidad de trabajar de cerca en su trabajo que es tan basto como sorprendente.

A los miembros del jurado que durante 4 años han contribuido sustancialmente en su desarrollo, a veces en forma, otras en fondo. Doctores Pichardo, Vilchis y Martínez muchas gracias.

Al maestro Vilchis por los seminarios originados en sus particulares curiosidad y hallazgos que configuraron fuertemente la dirección de mi trabajo.

A la Dra. Toriz que, si yo intentara detallar cuanto me ha ayudado, precisaría su propia sección de agradecimientos.

A mi madre por su apoyo incondicional. A mis hermanas por el cariño y, especialmente, por la brecha que me abrieron y abren siempre. A mi padre.

A mi compañero Sandoval y su conocimiento categórico, del cual este trabajo se benefició no pocas veces.

A Teresa Velázquez por su excepcional labor administrativa, que durante estos años ha destacado por ser eficiente, expedita e incansablemente amable.

A los pueblos indígenas en resistencia de México y el mundo entero. A todos los pueblos en rebeldía por darle sentido a todo esto.

Al CONACYT por confiarme los recursos que la sociedad nos destina para el desarrollo de la ciencia en México.

Introducción

Lo que anteriormente estimulaba con mayor fuerza, actúa ahora de manera totalmente distinta: sólo será desechado como una vida en lo no-verdadero, pero será estéticamente disfrutado y cuidado como forma y estímulo; nos situamos como los niños frente a lo que anteriormente constituyó la seriedad de la existencia.
Sobre el eterno retorno
Nietzche

El camino recorrido por la topología sin puntos es ya extenso. En palabras de Johnstone,[9], podemos identificar en el teorema de representación de Stone una "*idea revolucionaria de que es posible construir espacios <u>topológicamente interesantes</u> a partir de información puramente algebraica*". Desde entonces ha habido una prolífica producción de resultados, en el mismo artículo de Johnstone se puede encontrar un recorrido del área hasta la década en la que es publicado. En este trabajo, Johnstone remarca la útilidad de la topología sin puntos al proveer de un marco teórico topológico que no necesita el axioma de elección ni el axioma del tercero excluido.

El libro que publicaría Johnstone ese mismo año de 1983, *Stone Spaces* se convertiría en la referencia estándar sobre el tema. Pero la teoría se siguió desarrollando, y nuevos resultados siguieron apareciendo en múltiples publicaciones. En 2012, Picado y Pultr publican un libro de consulta, *Frames and Locales: topology without points* ([11]), con una nueva presentación del área así como avances y resultados de los 30 años posteriores al trabajo de Johnstone.

Picado y Pultr ofrecen también su postura sobre la utilidad de la topología sin puntos. ¿Se pierde información usando la aproximación sin puntos? Algunos espacios topológicos no pueden ser estudiados a través de la perspectiva sin puntos, sin embargo una gran cantidad de espacios interesantes son completamente recuperables a través de ella ¿Se obtiene una mejor teoría? En algunas áreas sí, el comportamiento, por ejemplo de espacios paracompactos, es mejor en la versión sin puntos, además de las ventajas ya señaladas anteriormente por Johnstone: muchos resultados no constructivos en la teoría clásica se vuelven plenamente constructivos (sin uso de axioma de elección o tercer excluido).

En 2020 Jean Goubault-Larrecq y Frédéric Mynard publican *Convergence Without Points* [7]. Este trabajo puede considerarse una especie de "generalización" del trabajo de Picado y Pultr, ya que construye un constructo ($\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$)[1] de cuñas semirretículas con una estructura de convergencia; informalmente hablando, la atención pasa de los abiertos a los filtros, y son estos últimos los que son representados ahora como objetos sin puntos.

En palabras de Mynard, ahora no se tiene el problema de restringirse a ciertos espacios para que la dualidad funcione bien. Por lo anterior, se tienen muchísimos más espacios para trabajar (incluso en el caso topológico). Y aún más, el constructo propuesto en su trabajo tiene el potencial para representar otras categorías aparte de $Gconv$; actualmente Mynard estudia la posibilidad de representar la categoría de espacios de aproximación de convergencia, **CAP** (Convergence approach spaces), con el constructo del trabajo en cuestión.

Cuando se dice que "la dualidad funcione bien", continua Mynard, se refiere a que, si uno parte de un espacio topológico a la dualidad de Stone, es necesario que el espacio topológico posea una propiedad específica [2] para poderlo recuperar a partir de su versión sin puntos, este no es el caso en la dualidad que ofrecen Mynard y Goubault-Larrecq en su trabajo. Todo espacio de convergencia es recuperable a partir de su versión sin puntos.

Estrictamente hablando, el trabajo de Mynard y Goubault-Larrecq no es una generalización del de Picado y Pultr ya que, en el caso del constructo **Top** la categoría propuesta por los primeros no coincide con la de los segundos; sin embargo en el mismo trabajo demuestran [7, 8.28] que la construcción clásica es una subcategoría reflexiva de su construcción.

El trabajo que ahora presentamos es producto de dos etapas distintas de trabajo durante mis estudios de doctorado. La primera fue producto de nuestra aproximación a las ideas de Picado y Pultr. En ella se ofrece un constructo que pueda favorecerse de estructuras conjuntistas simples y también (aunque no necesariamente) finitas conservando propiedades topológicas categóricas. Este trabajo se encuentra en el capítulo 2.

Cuando se concluyó el trabajo recién mencionado, empezaría la búsqueda de la construcción de un operador clausura sin puntos, que pudiera ser asociado a un objeto de **Conv**, que bajo condiciones adecuadas, coincidiera con el operador clausura clásico. Conforme este trabajo fue avanzando, llegamos a la publicación de Goubault-Larrecq y Mynard, encontrando no sólo los resultados que habíamos obtenido hasta el momento, sino un trabajo más profundo y general a la vez.

[1]En este trabajo, la categoría **Conv** usada por Mynard y por Goubault-Larrecq la denotaremos por **Gconv**, para la definición precisa véase 1.3 en la pág. 4

[2]Como ser sobrio o cumplir la propiedad T_D. En [11] se detalla esto.

El sentimiento agridulce de encontrar que nuestros resultados y conjeturas eran correctas pero se encontraban ya publicadas fue reemplazado por el beneplácito de empezar a trabajar con el profesor Mynard. De esta colaboración surgieron los resultados del capítulo 3 que esperamos publicar una vez terminemos de redondear la teoría de compacidad en $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$, pero que aquí compartimos por vez primera.

ÍNDICE GENERAL

I. PRELIMINARES

I.1. Retículas

En esta sección verteremos algunas definiciones básicas respecto a retículas.

Dado un copo $(S, \leq)$, llamaremos a un elemento $a \in S$ *mayor* (*menor*), si para todo $s \in S$, $s \leq a$ ($a \leq s$). Llamaremos a un elemento $a \in S$ *máximo* (*mínimo*) si no existe $s \in S$ tal que $a \leq s$ ($s \leq a$).

Llamaremos *cuña-semirretícula, ínfimo-semirretícula,* o $\wedge$*-semirretícula* a un copo (conjunto parcialmente ordenado) con todos los ínfimos finitos (incluyendo el vacío). Una *retícula* es un copo que tiene todos los ínfimos y supremos finitos. Una *retícula completa* es aquella que tiene supremos e ínfimos arbitrarios[1].

Recuérdese que calcular el ínfimo (supremo) del conjunto vacío nos proporciona el elemento mayor (menor), que denotaremos por $\top$ ($\perp$).

Dado un copo E y un subconjunto A de él, decimos que A es *cerrado hacia arriba, sección final, o isotónico*[2] si $x \in E, a \in A$ y $a \leq x$ implica que $x \in A$. Dado un subconjunto $A \subseteq E$ denotaremos por $A\uparrow$ al conjunto

$$\{x \in E | \exists a \in A \, [a \leq x]\}.$$

Dado un conjunto X, denotaremos con $\mathbb{P}(X)$ su conjunto potencia.

Dada una $\wedge$-semirretícula L, un *filtro* sobre L es un conjunto no vacío, cerrado hacia arriba y cerrado bajo ínfimos binarios, es decir, si $x, y \in A$ entonces $x \wedge y \in A$. Dependiendo del objetivo del trabajo, algunos autores permiten que L sea filtro o no, llamando *filtro propio* a todo filtro que no sea L.

Sea $A \subseteq L$, A es una *base de filtro* si es un subconjunto no vacío que no contiene al elemento menor de L (en caso de existir) y que además cumple con:

[1] Para diferenciar del operador ínfimo binario ($\wedge$) denotaremos a la conjunción lógica por el símbolo $\&$.

[2] up-set,upward closed set, isotone set

- $\forall a, b \in A \exists c \in A[c \leq a \wedge b]$.

El conjunto
$$A\uparrow = \{c \in L | \exists a \in A[a \leq c]\}$$
es un filtro y es llamado el *filtro generado por* A.

Denotaremos con $\mathbb{F}L$ al conjunto de filtros sobre L. Para el caso cuando $L = \mathbb{P}X$, la retícula de todos los subconjuntos de X (con el orden $\subseteq$), se acostumbra llamar a un filtro sobre L un *filtro de conjuntos* en X. Llamaremos *ultrafiltro* a un filtro propio máximo.

Obsérvese que dado un morfismo, $\varphi : L \to L'$, de $\wedge$-semirretículas y un filtro $\mathcal{G} \in \mathbb{F}L'$, $\varphi^{-1}(\mathcal{G})$ es un filtro. Si $f : X \to Y$ es una función de conjuntos y $\mathcal{F}$ un filtro de conjuntos en X entonces definimos
$$f(\mathcal{F}) = \{\ell \subseteq Y | \exists a \in \mathcal{F}\, [f[a] \subseteq \ell]\},$$
se puede verificar directamente que es un filtro y que además es equivalente al siguiente filtro de conjuntos
$$\{\ell \subseteq Y | f^{-1}(\ell) \in \mathcal{F}\}. \tag{1.1.1}$$

Sean L una retícula y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq L$. Diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se *mezclan* , o que $\mathcal{A}$ *se mezcla con* $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$ (o $\mathcal{B}\#\mathcal{A}$, ya que la definición es simétrica), si $\forall a \in \mathcal{A}\, \forall b \in \mathcal{B}\, [a \wedge b \neq \perp]$.

Haciendo uso del lema de Zorn, si dos filtros, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, se mezclan, se puede asegurar la existencia un ultra filtro $\mathcal{U}$ que contenga a ambos; este ultra filtro sería el ultra filtro que contiene al filtro generado por el conjunto
$$\{a \wedge b \in L | a \in \mathcal{F} \;\&\; b \in \mathcal{G}\}.$$

Nótese que se pidió que L fuese una retícula para poder asegurar la existencia del elemento menor, así que esta definición también es aplicable para $\wedge$-semirretículas que contengan un elemento menor. Como abreviación, denotaremos al mayor conjunto se mezcla con una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}L$ por $\mathcal{B}^{\#}$.

Un $marco$ es una retícula completa en la cual supremos arbitrarios se distribuyen sobre ínfimos finitos. Un *comarco* es una retícula completa en la cual ínfimos arbitrarios se distribuyen sobre supremos finitos. Un *morfismo de marcos* debe preservar supremos arbitrarios e ínfimos finitos, mientras que un *morfismo de comarcos* preserva ínfimos arbitrarios y supremos finitos.

I.2. Teoría de Categorías

En esta sección se proveerá de algunas definiciones básicas de la teoría de categorías.

Una **categoría** es una cuatro-ada $\mathscr{C} = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ compuesta por:

(1) una clase $\mathcal{O}$, cuyos miembros son llamadas $\mathscr{C}$**-objetos**.

(2) para cada par (A, B) de $\mathscr{C}$-objetos, un conjunto $\hom(A, B)$ cuyos miembros son llamados $\mathscr{C}$-**morfismos de** A **a** B.

(3) para cada $\mathscr{C}$-objeto A, un morfismo $A \xrightarrow{id_A} A$, llamado $\mathscr{C}$-identidad sobre A, o cuando se entienda del contexto, simplemente A identidad.

(4) una **ley de composición** que asocia a cada $\mathscr{C}$-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ y cada $\mathscr{C}$-morfismo $B \xrightarrow{g} C$ un $\mathscr{C}$-morfismo $A \xrightarrow{g \circ f} C$, llamado la composición de f y g, sujeta a las siguientes condiciones

(a) es asociativa.

(b) $\mathscr{C}$-identidades actúan como identidades con respecto a la composición.

(c) los conjuntos $\hom(A, B)$ son ajenos dos a dos.

Para cualquier categoría $\mathscr{C} = (\mathcal{O}, \hom_{\mathscr{C}}, id, \circ)$ la **categoría opuesta** (o **dual**) **de** $\mathscr{C}$ es la categoría $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}, \hom_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}, id, \circ^{\mathrm{op}})$, donde

$$\hom_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \hom_{\mathscr{C}}(B, A) \text{ y } f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f.$$

Esto es, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ tienen los mismos objetos y, salvo por la dirección, los mismos morfismos.

Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías, entonces un **funtor** F **de** $\mathscr{A}$ **a** $\mathscr{B}$ es una función que asigna a cada $\mathscr{A}$-objeto A un $\mathscr{B}$-objeto $F(A)$, y a cada $\mathscr{A}$-morfismo $A \xrightarrow{f} A'$ un $\mathscr{B}$-morfismo $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$, de tal modo que

(1) F preserva las composiciones.

(2) F preserva los morfismos identidad.

Sea $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtores. Una **transformación natural** τ **de** F **a** G (denotado por $\tau : F \to G$ o $F \xrightarrow{\tau} G$) es una función que asigna a cada $\mathscr{A}$-objeto A un $\mathscr{B}$-morfismo $\tau_A : FA \to GA$ de tal modo que la siguiente condición se cumple: para cada $\mathscr{A}$-morfismo $A \xrightarrow{f} A'$ el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FA' \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & GA' \end{tikzcd}$$

Una **adjunción** $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}, \eta, \varepsilon \rangle$ consiste de dos funtores y dos transformaciones naturales con dominios y codomionios como se muestra a continuación:

$$\mathscr{A} \underset{\mathbf{G}}{\overset{\mathbf{F}}{\rightleftarrows}} \mathscr{B} \qquad \eta : \mathbf{1}_{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbf{GF} \qquad \varepsilon : \mathbf{FG} \longrightarrow \mathbf{1}_{\mathscr{B}}$$

tales que $\varepsilon_{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F}\eta = \mathbf{1_F}$ y $\mathbf{G}_\varepsilon \circ \eta_{\mathbf{G}} = \mathbf{1_G}$; esto es, para cada objeto A de $\mathscr{A}$ se tiene que $\varepsilon_{\mathbf{F}A} \circ \mathbf{F}\eta_A = \mathbf{1}_{\mathbf{F}A}$ y similarmente para cada B de $\mathscr{B}$.

Sea $\mathscr{B}$ una subcategoría de $\mathscr{A}$, y sea A un $\mathscr{A}$-objeto. Una **$\mathscr{B}$-reflexión** (o **flecha $\mathscr{B}$-reflexión**) para A es un $\mathscr{A}$-morfismo, $A \xrightarrow{r} B$, de A a un $\mathscr{B}$-objeto B con la siguiente propiedad universal:

para cualquier $\mathscr{A}$-morfismo, $A \xrightarrow{f} B'$, de A a un $\mathscr{B}$-objeto B', existe un único $\mathscr{B}$-morfismo $f' : B \to B'$ tal que el siguiente triángulo conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

$\mathscr{B}$ es llamada una **subcategoría reflexiva de** $\mathscr{A}$ si cada $\mathscr{A}$ objeto tiene una $\mathscr{B}$-reflexión.

Las reflexiones de subcategorías plenas pueden ser consideradas un caso especial de adjunciones, son el adjunto izquierdo de la situación de adjunción $(\eta, \varepsilon) : R \dashv E$, donde $\mathscr{B} \xrightarrow{E} \mathscr{A}$ es el encaje de $\mathscr{B}$ en $\mathscr{A}$, R es el reflector, los niveles η_A son las $\mathscr{B}$-reflexiones, y los niveles ε_B son isomorfismos.

I.3. El Constructo **Gconv**

Siguiendo [12], un *constructo* será una categoría $\mathscr{C}$ cuyos objetos son conjuntos estructurados, i.e. pares (X, ε) de conjuntos, donde ε es una $\mathscr{C}$-

estructura sobre X, cuyos morfismos $f : (X, \varepsilon) \to (Y, \eta)$ son funciones adecuadas entre X y Y y cuya ley de composición es la usual entre funciones[3].

Llamaremos a X el *conjunto subyacente* de (X, ε) y $f : X \to Y$ la *función subyacente* de $f : (X, \varepsilon) \to (Y, \eta)$. Nos referiremos como a una *función* $f : (X, \varepsilon) \to (Y, \eta)$ para referirnos a la función subyacente f. Un ejemplo de esto es la siguiente definición:

Definición 1.1. *Si (X, ε) y (X, η) son $\mathscr{C}$-constructos, decimos que η es más gruesa que ε (o, alternativamente, que ε es más fina que η) si la función identidad $1_X : (X, \varepsilon) \to (X, \eta)$ es un $\mathscr{C}$-morfismo.*

Siguiendo nuevamente a [12], un constructo $\mathscr{C}$ es llamado *topológico* si satisface las condiciones siguientes:

(1) *Existencia de estructuras iniciales:*

Para cualquier conjunto X, cualquier familia $((X_i, \varepsilon_i))_{i \in I}$ de $\mathscr{C}$-objetos indicados por una clase I y cualquier familia $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ de funciones indicadas por I, existe una única $\mathscr{C}$-estructura ε sobre X que es *inicial* con respecto a $(X, f_i, (X_i, \varepsilon_i, I))$, i.e. para cualquier $\mathscr{C}$-objeto (Y, η) una función $g : (Y, \eta) \to (X, \varepsilon)$ es un $\mathscr{C}$-morfismo si y solo si para cada $i \in I$ la función composición $f_i \circ g : (Y, \eta) \to (X_i, \varepsilon_i)$ es un $\mathscr{C}$-morfismo.

(2) Para cualquier conjunto X, la clase $\{(Y, \eta) \in Ob(\mathscr{C}) : X = Y\}$ de todos los $\mathscr{C}$-objetos con conjunto subyacente X es un conjunto.

(3) Para cualquier conjunto X con cardinalidad a lo más uno, existe exactamente un $\mathscr{C}$-objeto con conjunto subyacente$X$.

Trabajaremos principalmente con el constructo $\mathbf{Gconv}$ y algunas de sus subcategorías plenas. Recordemos que $\mathbf{Gconv}$[4] denota la categoría de espacios de convergencia generalizada (y funciones continuas), esto es:

---

[3]Formalmente, decimos que $\mathscr{C}$ es un constructo si existe un funtor $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ fiel. La descripción usada en el texto es una manera informal de explicitar que, si $f : (X, \varepsilon) \to (Y, \sigma)$ es un morfismo de $\mathscr{C}$, entonces $\mathbf{F}(f) : X \to Y$; así como explicitar que todos los espacios están dotados con el "mismo tipo de estructura", por ejemplo, en el constructo $\mathbf{Top}$, para cualquier objeto $(X, \tau) \in \mathbf{Top}$, τ es una topología sobre X; en el constructo $\mathbf{Lat}$, para todo $\mathbf{Lat}$ objeto (X, ε), ε es la terna $(\leq, \bigwedge, \bigvee)$ compuesta por un orden parcial y las correspondientes operaciones de ínfimo y supremo.

[4]Algunos autores denotan esta categoría con $\mathbf{Conv}$ como en [7].

- Un *espacio de convergencia generalizada* es un par (X,q) donde X es un conjunto y $q \subseteq \mathbb{F}X \times X$ es tal que los siguientes axiomas son satisfechos:

  1) $(\dot{x},x) \in q$ para cada $x \in X$, donde $\dot{x} = \{A \subseteq X : x \in A\}$;
  2) $(\mathcal{G},x) \in q$ siempre que $(\mathcal{F},x) \in q$ y $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$.

- Una función $f : (X,q) \to (Y,p)$ entre espacios de convergencia generalizada es *continua* si se cumple que $(f(\mathcal{F}), f(x)) \in p$ para cada $(\mathcal{F},x) \in q$.

La fórmula $(\mathcal{F},x) \in q$ también la expresaremos por $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$; o solamente $\mathcal{F} \longrightarrow x$ cuando sea claro del contexto la estructura.

Ahora recordaremos algunas subcategorías importantes de $\mathbf{Gconv}$: Un espacio de convergencia generalizada (X,q) es llamado

a) Un *espacio Kent de convergencia* si se cumple la siguiente condición:
   - $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$ cuando $(\mathcal{F},x) \in q$.

b) Un *espacio límite* si se cumple la siguiente condición:
   - $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$ cuando $(\mathcal{F},x)$ y $(\mathcal{G},x) \in q$,

c) Un *espacio pretopológico* si se cumple la siguiente condición:
   - $(\mathscr{V}_q(x), x) \in q$ para toda $x \in X$, donde
     $\mathscr{V}_q(x) := \bigcap\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}X : (\mathcal{F},x) \in q\}$.

Un espacio pretopológico (X,q) es llamado *espacio topológico* si satisface la siguiente condición:

- Para cada $U \in \mathscr{V}_q(x)$ existe algún $V \in \mathscr{V}_q(x)$ tal que $U \in \mathscr{V}_q(y)$ para toda $y \in V$.

Las correspondientes subcategorías plenas de $\mathbf{Gconv}$ serán denotadas por $\mathbf{Kent}$, $\mathbf{Lim}$, $\mathbf{Prtop}$ y $\mathbf{Top}$.

II. RELACIONES TOPOLÓGICAS

II.1. Introducción

En [8] se afirma que la familiaridad con técnicas categóricas ayudará a aquellos que se confrontan con un nuevo campo a encontrar analogías y conexiones con campos familiares, a organizar el nuevo campo apropiadamente, y a separar los conceptos, problemas y resultados generales de los especiales, que merecen investigaciones especiales. El conocimiento categórico ayuda entonces a dirigir y organizar nuestros pensamientos.

El operador clausura ha tenido múltiples usos, incluidas aplicaciones. En estas aplicaciones ha servido a modelos finitos [5, 10, 4]; dotando de una estructura pretopológica a relaciones obtenidas de modelar interacciones entre elementos (relaciones que representan cercanía, influencia académica, dominio, etc.).

Creemos que una aproximación categórica a estas definiciones podría ayudar a desarrollar los objetivos mencionados anteriormente en [8]. Por lo tanto, se proponen estructuras que generalicen al operador clausura usado en esos trabajos.

Aún más, en [3], Blass menciona que un principio metodológico útil en las matemáticas modernas es que, cuando un tipo de estructuras matemáticas son definidas, los morfismos correspondientes entre dos de dichas estructuras debería ser definido. Por lo tanto, no sólo nuevas estructuras son definidas sino también los morfismos entre ellas.

Los constructos propuestos en este trabajo, han sido construidos de tal manera que adjunciones a estructuras topológicas clásicas (**Gconv** y algunos de sus subconstructos plenos) son obtenidas; ya que esperamos que conceptos topológicos puedan ser definidos análogamente dentro de estas estructuras en el futuro.

Primero, determinamos la naturaleza de los espacios en los que se trabajará como estructuras matemáticas en el sentido de [1]. Después, nuestras estructuras matemáticas serán dispuestas dentro de un constructo en el sentido de [1, 12, 8]. Como nuestro principal interés es trabajar con formas generalizadas de espacios pretopológicos, dotaremos a nuestros constructos de las propiedades necesarias para ser constructos topológicos, en el sentido de [12]. En el artículo, [2], en coautoría con el Dr. Angoa, se establecieron adjunciones entre los constructos propuestos y subcategorías clásicas de **Gconv**, esto está detallado en la sección 2.3; sin embargo, de la observación [2, 3.4] (observación 2 en este trabajo) se obtiene que, trabajar con las imágenes de los funtores aquí propuestos, es equivalente a trabajar con espacios de convergencia de filtros principales. Estos espacios son conocidos y sus adjunciones bien sabidas, por lo cual dicha sección puede omitirse.

II.2. Definición y Propiedades Básicas

En esta sección será definido el concepto de relación topológica. También propiedades interesantes de estas relaciones serán demostradas. Construiremos constructos a partir de esto, y se demostrará que dichos constructos son topológicos.

Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times \mathbb{P}(X)$. Decimos que R es una R_1-*relación sobre* X si:

(RT_0) $\forall x \in X\, [(x, \emptyset) \notin R]$

(RT_1) $\forall x \in X\, [(x, \{x\}) \in R]$

Si R es una R_1-relación sobre X, llamamos al par (X, R) un R_1-espacio. Una función $f : (X, R) \to (Y, Q)$ entre R_1-espacios es R_1-continua si:

- $\forall (x, U) \in R \exists V\, [(f(x), V) \in Q \;\&\; f[U] \subseteq V]$

La clase de R_1-espacios, y de funciones R_1-continuas forman un constructo, este será denotado por $\mathscr{R}_1$.

Obsérvese que la función identidad[1] $1_X : (X, R) \to (X, R_1)$ es un $\mathscr{R}_1$-morfismo entre (X, R) y (X, R_1) $\mathscr{R}_1$-objetos si $R \subseteq R_1$.

Se denotará con ${}_xR$ al conjunto $\{U \subseteq X \mid (x, U) \in R\}$. La unión de este conjunto, $\bigcup {}_xR$, será denotado por $\mathscr{U}_x^R$ o solamente $\mathscr{U}_x$ cuando sea claro del contexto, qué relación está siendo considerada.

Ahora podemos hacer la siguiente asociación:

A cada $(X, R) \in \mathscr{R}_1$ se asocia un objeto $(X, q_R) \in \mathbf{Gconv}$ como sigue:

$$(\mathcal{F}, x) \in q_R \leftrightarrow \exists U\, [x\; R\; U \;\&\; \mathcal{F} \supseteq U\!\uparrow]$$

[1] Recuérdese que nos estamos refiriendo a la función subyacente de 1_X, tal como se definió en la página 5.

A cada función, $f : (X, R) \to (Y, Q)$, R_1-continua es asociado el **Gconv**-morfismo $f : (X, q_R) \to (Y, q_Q)$, con la misma función subyacente.

La asociación anterior define un funtor (entre $\mathscr{R}_1$ y **Gconv**):

Dado que $x\ R\ \{x\}$ para toda x, y que $\dot{x} = \{x\}\uparrow$, tenemos que $(\dot{x}, x) \in q_R$ para toda $x \in X$.

Si $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ y $(\mathcal{F}, x) \in q_R$ entonces $\exists U\, [x\ R\ U\ \&\ \mathcal{F} \supseteq U\uparrow]$, por lo que obtenemos que $(\mathcal{G}, x) \in q_R$ ya que $\mathcal{G} \supseteq U\uparrow$.

Supóngase que $f : (X, R) \to (Y, Q)$ es R_1-continua y $(\mathcal{F}, x) \in q_R$. Se sigue que $\exists U\, [x\ R\ U\ \&\ \mathcal{F} \supseteq U\uparrow]$. Esto implica que $U \in \mathcal{F}$ y $f[U] \in f(\mathcal{F})$; por la R_1 continuidad, tenemos que, para algún V, $f(x) Q V$ donde $f[U] \subseteq V$. Todo lo anterior implica que $f(\mathcal{F}) \supseteq f[U]\uparrow \supseteq V\uparrow$, y esto que, $(f(\mathcal{F}), f(x))$, lo cual demuestra que $f : (X, q_R) \to (Y, q_Q)$ es continua.

Las propiedades restantes para verificar que la asociación es funtorial se derivan fácilmente de la estructura del constructo.

Denotaremos el funtor anterior por T_1

También, podemos realizar la siguiente asociación:

A cada $(X, q) \in$ **Gconv** asociamos un R_1-espacio, (X, R_q) como sigue:

$$x\ R_q\ U \leftrightarrow \exists\, (\mathcal{F}, x) \in q \left[U = \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset\right].$$

A cada **Gconv**-morfismo, $f : (X, q) \to (Y, p)$, es asociado el $\mathscr{R}_1$-morfismo $f : (X, R_q) \to (Y, R_p)$, con la misma función subyacente.

Observación 1*:* La asociación anterior también define un funtor:

Por construcción se cumple (RT_0). Dado que $(\dot{x}, x) \in q$ para todo x, en cualquier **Gconv** espacio, se tiene que (RT_1), y por lo tanto (X, R_q) es un $\mathscr{R}_1$-objeto.

Supóngase que $f : (X, q) \to (Y, p)$ es **Gconv**-morfismo y que $x\ R_q\ U$. Entonces $\exists\, (\mathcal{F}, x) \in q$ tal que $U = \bigcap \mathcal{F}$. Por continuidad de f se tiene que $(f(\mathcal{F}), f(x)) \in p$. Además, por construcción, $f[U] \subseteq V$, para toda $V \in f(\mathcal{F})$. Así $\bigcap f(\mathcal{F}) \supseteq f[U]$. Observese que $f[U]\uparrow \supseteq f(\mathcal{F})$, esto implica que $(f[U]\uparrow, f(x))$. Por construcción $f[U] = \bigcap f[U]\uparrow$, lo que implica que $f(x)\ R_p\ f[U]$, lo que hace a f un $\mathscr{R}_1$-morfismo.

Al igual que la asociación pasada, las propiedades restantes se derivan fácilmente de las propiedades del constructo.

Denotaremos el funtor previo por W_1.

Las propiedades siguientes serán usadas para definir distintos constructos.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times \mathbb{P}(X)$:*

(RT_2) $\forall x \in X\,[x\ R\ U \Rightarrow x\ R\ U \cup \{x\}]$.

(RT_3) $\forall x \in X\,[x\ R\ U\ \&\ x\ R\ V \Rightarrow x\ R\ (U \cup V)]$.

(RT_4) $\forall x \in X\,[x\ R\ \mathscr{U}_x]$.

(RT_5) $\forall x \in X\,[x\ R\ U\ \&\ y \in U \Rightarrow \mathscr{U}_y \subseteq \mathscr{U}_x]$.

Con estas propiedades es posible definir $\mathscr{R}_n$ constructos como los subconstructos plenos de $\mathscr{R}_1$ tales que sus objetos satisfacen las propiedades RT_i, para cada $i \leq n$.

Observación 2: Sea $(X, R) \in \mathscr{R}_1$, definimos $\check{R}$ como

$$(x, U) \in \check{R} \Leftrightarrow \exists (x, V) \in R\,[U \subseteq V]\,.$$

Entonces

1) $T_1((X, R)) = T_1((X, \check{R}))$

2) Si $R = \check{R}$ entonces

$$f : (X, R) \to (Y, Q) \text{ es } \mathscr{R}_1\text{-continua} \Leftrightarrow \forall U\,[x\ R\ U \Rightarrow f(x) Q f[U]]\,.$$

Esto dice que si vamos a estudiar $\mathscr{R}_n$ constructos a través de los funtores T_1 y W_1 entonces se puede asumir que $R = \check{R}$. Aún más, se puede remplazar (RT_0) por:

$$\forall x \in X \exists U\,[x\ R\ U\ \&\ x \in U]\,.$$

Veremos ahora que los constructos $\mathscr{R}_n$, para $1 \leq n \leq 4$, son topológicos. Se demostrará primero para $\mathscr{R}_1$, después para los restantes.

Teorema 2.2. *Sean $\{(X_i, R_i)\}_{i \in I}$ $\mathscr{R}_1$-espacios, y $\{f_i : X \to (X_i, R_i)\}_{i \in I}$ funciones. La estructura R sobre X definida como*

$$x\ R\ U \leftrightarrow U \neq \emptyset\ \&\ \forall i \in I \exists V_i \subseteq X_i\,[f_i(x) R_i V_i\ \&\ f_i[U] \subseteq V_i]$$

es una estructura inicial en $\mathscr{R}_1$.

Demostración. Dado que $f_i(x)\ R_i\ \{f_i(x)\}$ para toda $x \in X$ y toda $i \in I$, se obtiene que $x\ R\ \{x\}$. De este modo obtenemos que RT_1; se deriva directamente que RT_0 también se cumple.

Lo anterior muestra que (X, R) es una $\mathscr{R}_1$ estructura, a continuación verificaremos la inicialidad.

Sea $g : (Y, Q) \to (X, R)$ una función tal que $f_i \circ g : (Y, Q) \to (X, R_i)$ es $\mathscr{R}_1$-morfismo. Debemos demostrar que g es un $\mathscr{R}_1$-morfismo.

Sea $y\ Q\ V$, se demostrará que $\exists U \subseteq X\, [g(y)\ R\ U\ \&\ g[V] \subseteq U]$. Dado que $f_i \circ g$ es un $\mathscr{R}_1$ morfismo para cada $i \in I$, entonces

$$\forall i \in I \exists U_i \subseteq X_i \left[f_i \circ g(y)\ R_i\ U_i\ \&\ f_i \circ g[V] \subseteq U_i \right].$$

Por la construcción de R, tenemos que $g(y)\ R\ g[V]$.

Ahora se demostrará que R es la estructura más gruesa que hace a cada f_i R_1-continua. Supóngase que R' también las hace continuas. Sea $1_X : (X, R') \to (X, R)$ la función identidad y $(x, U) \in R'$, se demostrará que

$$\forall i \exists V_i \subseteq X_i \left[f_i(x)\ R_i\ V_i\ \&\ f_i[U] \subseteq V_i \right],$$

pero esto es exactamente que $f_i : (X, R') \to (X, R_i)$ sea $\mathscr{R}_1$-continua, lo que es cierto por hipótesis. $\square$

Para demostrar que $\mathscr{R}_i$ es también topológica para $1 < i \leq 5$, será suficiente demostrar que la estructura R definida en Teorema 2.2, es una $\mathscr{R}_i$-estructura cuando $\{f_i : X \to (X_i, R_i)\}_{i \in I}$ es una $\mathscr{R}_i$-fuente.

Teorema 2.3. *Los constructos $\mathscr{R}_i$ cuando $1 < i \leq 5$ son topológicos.*

Demostración. 1)$\mathscr{R}_4$ es topológico. Sea $\{f_i : X \to (X_i, R_i)\}_{i \in I}$ con $\{(X_i, R_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{R}_4$. Sea (X, R) definida como en Teorema 2.2. Demostraremos que $(x, \bigcup_x R) \in R$. $\forall U \in_x R\ \exists V_U\, [f_i(x)\ R_i\ V_U\ \&\ f_i[U] \subseteq V_U]$. Dado que cada (X_i, R_i) es un $\mathscr{R}_4$-objeto, entonces $(f_i(x), \bigcup_{f_i(x)} R_i) \in R_i$. Se sigue que

$$f_i \left[\bigcup\nolimits_x R \right] = \bigcup_{U \in_x R} f_i[U] \subseteq \bigcup_{U \in_x R} V_U \subseteq \bigcup\nolimits_{f_i(x)} R_i \quad \text{for all } i \in I.$$

Con lo que se concluye que $x\ R \bigcup_x R$.

La demostración de que $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_3$ son constructos topológicos es similar.

2)$\mathscr{R}_5$ es topológico. Sea $\{f_i : X \to (X_i, R_i)\}_{i \in I}$ con $\{(X_i, R_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{R}_5$; (X, R) como se definió en Teorema 2.2; $(x, U) \in R$ y $y \in U$. Se probará que $\mathscr{U}_y \subseteq \mathscr{U}_x$. Dado que $(x, U) \in R$, se obtiene que

$$\forall i \in I \exists V_i \left[f_i(x)\ R_i\ V_i\ \&\ f_i[U] \subseteq V_i \right].$$

De esto se sigue que $f_i(y) \in f_i[U] \subseteq V_i$ para cada i y, ya que cada (X_i, R_i) es $\mathscr{R}_5$, obtenemos que $\mathscr{U}_{f_i(y)} \subseteq \mathscr{U}_{f_i(x)}$. Sea $z \in \mathscr{U}_y$ entonces $\exists A\, [y\ R\ A\ \&\ z \in A]$;

Demostrar $z \in \mathscr{U}_x$ es equivalente a $\exists U' \, [x \; R \; U' \;\&\; z \in U']$. Por construcción se tiene que $\forall i \in I \exists W_i \, [f_i(y) \; R_i \; W_i \;\&\; f_i[A] \subseteq W_i]$. De esto se sigue que $f_i(z) \in f_i[A] \subseteq W_A \subseteq \mathscr{U}_{f_i(y)} \subseteq \mathscr{U}_{f_i(x)}$. Así, obtenemos que $x \; R \; \{z\}$. $\square$

Observación 3*:* A partir de un $\mathscr{R}_1$-objeto, (X, R), pueden ser construidos $\mathscr{R}_n$-objetos:
Definiendo $R_k = R \cup R^*$, con $R^* = \{(x, U \cup \{x\}) \mid x \; R \; U\}$, obtenemos un $\mathscr{R}_2$-objeto.
Definiendo $R_l = R \cup R^*$, con $R^* = \{(x, \cup A) \mid A \subseteq {}_xR \;\&\; |A| < \aleph_0\}$, obtenemos un $\mathscr{R}_3$-objeto.
Definiendo $R_C = R \cup R^*$, con $R^* = \{(x, \cup A) \mid A \subseteq {}_xR\}$, obtenemos un $\mathscr{R}_4$-objeto.

Definimos recursivamente sobre ω los siguientes conjuntos para cada $x \in X$:
${}_xR^0 = {}_xR$.
${}_xR^{n+1} = \{V \in {}_yR^n \mid \exists U \in {}_xR^n \, [y \in U]\} \cup {}_xR^n$.
${}_xR^\omega = \bigcup\{{}_xR^n \mid n \in \omega\}$.
De este modo, $(X, (R^\omega)_C)$ es un $\mathscr{R}_5$-objeto.

Teorema 2.4. *$\mathscr{R}_4$ es una subcategoría reflexiva de $\mathscr{R}_1$*

Demostración. Sea (X, R) un $\mathscr{R}_1$-objeto y R_C como se definió en la Observación 3. Veamos que, de hecho, (X, R_C) es un $\mathscr{R}_4$-objeto. Será suficiente demostrar que $\bigcup {}_xR_C = \bigcup {}_xR$. Una contención se deriva directo por definición. Sea $x \in \bigcup {}_xR_C$, si $x \in U \in R$ hemos terminado; supongamos que $x \in U \in R^*$. Esto último implica que $\exists V \in R \, [x \in V \in {}_xR]$ así que $x \in \bigcup {}_xR$, demostrando que (X, R_C) es un $\mathscr{R}_4$-objeto.

Veremos que la función identidad $1_x : (X, R) \to (X, R_C)$ es un morfismo y sirve como reflector; para lo cual demostraremos que el siguiente diagrama conmuta si $\bar{f}$ tiene a f como función subyacente.

$$\begin{tikzcd}
(X,R) \arrow[d, "1_x"] \arrow[dr, "f"] & \\
(X,R_C) \arrow[r, "\bar{f}"] & (Y,Q)
\end{tikzcd}$$

Que las funciones conmutan es claro, veamos que $\bar{f}$ es $\mathscr{R}_1$ continua. Sea $f : (X, R) \to (Y, Q)$ y $(x, U) \in R_C$. Si $U \in R$, hemos terminado. Supóngase que $U \in R^*$. Entonces $U = \bigcup A$. Por la $\mathscr{R}_1$-continuidad de f, tenemos que

$\forall W \in A \exists V_W \, [f(x) Q V_W \ \& \ f[W] \subseteq V_W]$, todo esto implica que

$$f[U] = f[\bigcup A] = \bigcup_{W \in A} f[W] \subseteq \bigcup_{W \in A} V_W \subseteq \mathscr{U}^Q_{f(x)}$$

$\square$

La demostración de que $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_3$ son reflexivas es similar.

Teorema 2.5. *Sea $(X, R) \in \mathscr{R}_1$ y R^ω como se definieron previamente. Entonces :*
a) (X, R^ω) satisface RT_5,
b)Para cualquier $f : (X, R) \to (Y, Q)$ $\mathscr{R}_1$-morfismo, con (Y, Q) siendo un $\mathscr{R}_5$-objeto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} (X,R) \arrow[d, "1_X"] \arrow[dr, "f"] & \\ (X, R^\omega) \arrow[r, "\bar{f}"] & (Y,Q) \end{tikzcd}$$

conmuta si $\bar{f}$ y f tiene la misma función subyacente.

Demostración. a) Sea $(x, U) \in R^\omega$ y $y \in U$, demostraremos que $\mathscr{U}_y \subseteq \mathscr{U}_x$. Sea $z \in \mathscr{U}_y = \bigcup {}_y R^\omega$, entonces $\exists V \subseteq X \exists n \in \omega \, [z \in V \ \& \ V \in {}_y R^n]$, sea $\hat{n}$ el mínimo $n \in \omega$ tal que satisface la propiedad. Dado que $U \in {}_x R^\omega$ tenemos que $\exists m \in \omega \, [U \in {}_x R^\omega]$, sea $\hat{m}$ el mínimo $m \in \omega$ que satisface la propiedad. Sea $l = \max(\hat{m}, \hat{n})$. Con esto obtenemos que $z \in V \in {}_x R^{l+1} \subseteq {}_x R^\omega \subseteq \mathscr{U}_x$.

b) Sea $(x, U) \in R^\omega$. Sea $n \in \omega$ el mínimo natural tal que $(x, U) \in R^n$. Demostraremos por inducción sobre n que, si $0 < n$, existen $N \in \omega$, $\{A_i\}_{i \in N+1} \subseteq \mathbb{P}(X)$ y $\{x_i\}_{i \in N+1} \subseteq X$ tales que:

$$\begin{array}{ll} A_0 = U, & (x_i, A_i) \in R \text{ para cada } i \in N+1, \\ x_N = x \quad \text{y} & x_i \in A_{i+1} \text{ para cada } i \in N. \end{array}$$

Para $n = 1$. Por definición tenemos que

$$\exists V \subseteq X \exists y \, [(y, U) \in R \ \& \ y \in V \ \& \ (x, V) \in R] \, .$$

Tomando $N = 0$, $A_1 = V$ y $x_0 = y$ obtenemos lo deseado.

Paso inductivo. Sea $(x, U) \in R^{M+1}$ (recordemos nuestra hipótesis, $M+1$ es el mínimo natural tal que satisface la pertenencia). Por definición tenemos que $\exists V \subseteq X \exists y \in X \left[(y, U) \in R^M \;\&\; y \in V \;\&\; (x, V) \in R^M\right]$. Usando la hipótesis inductiva con $(y, U) \in R^M$ y $(x, V) \in R^M$ obtenemos que existen $N \in \omega$, $\{A_i\}_{i \in N+1} \subseteq \mathbb{P}(X)$, $\{x_i\}_{i \in N+1} \subseteq X$ y, $N' \in \omega$, $\{A'_i\}_{i \in N'+1} \subseteq \mathbb{P}(X)$ y $\{x'_i\}_{i \in N'+1} \subseteq X$ respectivamente. Para $j \in N + N' + 2$ definimos

$$\begin{array}{lll} B_j = A_j & \text{y} \quad z_j = x_j & \text{si } j \in N+1 \\ B_j = A'_k & \text{y} \quad z_j = x'_k & \text{si } j = k+N+1 \end{array}$$

Esta construcción satisface lo requerido: $B_0 = A_0 = U, z_{N+N'+1} = x'_{N'} = x$ y que $z_N = y \in V = A'_0 = B_{N+1}$.

Sea $M = N + N' + 1$. Por construcción y la $\mathscr{R}_1$-continuidad de f, tenemos que existe una familia $\{V_j\}_{j \in M+1} \subseteq \mathbb{P}(Y)$ que satisface que $f(z_j)\ Q\ V_j$ y $f[B_j] \subseteq V_j$ para cada $j \in M+1$. Lo anterior y que (Y, Q) es un $\mathscr{R}_5$-objeto implica que:

$$f[U] \subseteq \mathscr{U}_{f(z_0)} \subseteq \mathscr{U}_{f(z_i)} \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{U}_{f(x)}$$

Dado que $f(x)QV_M$ y por RT_4, tenemos que $f(x)Q\mathscr{U}_{f(x)}$, lo que conlcuye la demostración. □

Observación 4*:* Para demostrar que $\bar{f} : (X, (R^\omega)_C) \to (Y, Q)$ es continua, solo falta el caso cuando $U = \bigcup A$ con $A \subseteq {}_xR^\omega$, en este caso procedemos del mismo modo que en el Teorema 2.4, donde la existencia de cada V_W puede obtenserse en el mismo modo que fue hecho en el Teorema 2.5.

Para demostrar que $(X, (R^\omega)_C)$ satisface la propiedad RT_5, basta observar que $\mathscr{U}_x^{R^\omega} = \mathscr{U}_x^{R^\omega_C}$.

De la observación anterior podemos derivar el siguiente:

Teorema 2.6. *$\mathscr{R}_5$ es reflexiva en $\mathscr{R}_1$.*

Ejemplo 2.7. *Sea $X = \omega$.*

1) Sea ${}_nR = \{\{n\}, \{n+1\}, \{n+2\}\}$. (X, R) es un $\mathscr{R}_1$-espacio pero no un $\mathscr{R}_2$-espacio.

2) Sea ${}_nR = \{\{n\}, \{n, n+1\}, \{n, n+2\}\}$. (X, R) es un $\mathscr{R}_2$-espacio pero no un $\mathscr{R}_3$-espacio.

3) Sea ${}_nR = \{[n, N] \subseteq \omega \mid N \in \omega \;\&\; n \leq N\}$. (X, R) es un $\mathscr{R}_3$-espacio pero no un $\mathscr{R}_4$-espacio.

*4) Para $n \neq 0$, sea ${}_nR = \{[n-1, \omega), \{n\}\}$.
Para $n = 0$, sea ${}_0R = \{\{0\}, \omega\}$. (X, R) es un $\mathscr{R}_4$-espacio pero no un $\mathscr{R}_5$-espacio.*

5) Sea ${}_nR = \{[n, \omega), \{n\}\}$*.* (X, R) *es un* $\mathscr{R}_5$*-espacio.*

Observación 5*:* Se dijo anteriormente que estos constructos generalizarían los operadores clausura generados por copos reflexivos, en efecto: Si $\leq$ es un orden parcial reflexivo sobre X, define un $\mathscr{R}_4$-objeto, (X, R), como $x\ R\ U \leftrightarrow U = \{y \in X \mid y \leq\}$. Así, la cerradura canónica construida a partir de $(X, \leq)$ coincide con la cerradura canónica construida a partir de $T_1((X, R))$.

II.3. Adjunción

Se demostrará que los funtores T_1 y W_1 son adjuntos; dado que los funtores asigna las misma función subyacente a los morfismos, será suficiente demostrar que, la unidad y co-unidad deben de tener como función subyacente la identidad.

$$\begin{tikzcd}
(X,R) \arrow[r, hook, "\eta_R"] \arrow[d, "f"] & (X, R_{q_R}) \arrow[d, "f"] \\
(Y,Q) \arrow[r, hook, "\eta_Q"] & (Y, R_{q_Q})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X, q_{R_q}) \arrow[r, hook, "\varepsilon_q"] \arrow[d, "f"] & (X, q) \arrow[d, "f"] \\
(Y, q_{R_p}) \arrow[r, hook, "\varepsilon_p"] & (Y, p)
\end{tikzcd}$$

Habiendo demostrado que la identidad funciona como unidad y co-unidad, se obtiene que $T_1(\eta_{(X,R)}) : (X, q_R) \to (X, q_{R_{q_R}})$ tiene como función subyacente a la identidad. Dado que la función identidad $\varepsilon_{(X,q_R)} : (X, q_{R_{q_R}}) \to (X, q_R)$ es morfismo y por la definición de $\mathbf{Gconv}$-continuidad, podemos concluir que $q_R = q_{R_{q_R}}$. Siendo iguales estas estructuras, $\varepsilon_{(X,q_R)}$ y $T_1(\eta_{(X,R)})$ son morfismos indentidad sobre (X, q_R). Esto trivializa las identidades triangulares $\varepsilon_{T_1} \circ T_1\eta = 1_{T_1}$, dado que ambas funciones del miembro izquierdo son 1_{T_1}. Análogamente se puede demostrar esto para $W_{1\varepsilon} \circ \eta_{W_1} = 1_{W_1}$.

Teorema 2.8. *La función identidad* $\varepsilon_q : (X, q_{R_q}) \to (X, q)$ *es* $\mathbf{Gconv}$ *continua.*

Demostración. Sea $(\mathcal{F}, x) \in q_{R_q}$. Por construcción se tiene que

$$\exists (x, U) \in R_q\, [\mathcal{F} \supseteq U\!\uparrow].$$

Nuevamente por construcción, tenemos que $\exists (\mathcal{G}, x) \in q\, [U = \bigcap \mathcal{G}]$, lo que implica que $U\!\uparrow\ \supseteq \mathcal{G}$, y por lo tanto $(U\!\uparrow, x) \in q$. Por las inclusiones $\mathcal{F} \supseteq U\!\uparrow\ \supseteq \mathcal{G}$ concluimos que $(\mathcal{F}, x) \in q$ $\square$

Teorema 2.9. *La función identidad* $\eta_R : (X, R) \to (X, R_{q_R})$ *es* $\mathscr{R}_1$*-continua.*

Demostración. Sea xRU. Por definición, $(U\uparrow, x) \in q_R$. Dado que $U = \bigcap U\uparrow$, concluímos que $x\ R_{q_R}\ U$. □

Ejemplo 2.10. *Sea* (X, R) *un* $\mathscr{R}_1$*-objeto.*

Si (X, R) *es un* $\mathscr{R}_1$*-objeto tal que* $X \in {}_xR$*, entonces* $(\mathcal{F}, x) \in q_R$ *para toda* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(X)$*. En este caso obtenemos la inclusión propia* $R \subsetneq R_{q_R}$*.*

Sea $X = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$*. Defínase* V *como el filtro generado por la familia* $\{(0, \delta] \mid 0 < \delta \leq 1\}$ *y* $q(x)$ *denota el conjunto* $\{\mathcal{F} \in \mathbb{F}(X) \mid (\mathcal{F}, x) \in q\}$*. Sea* (X, q) *tal que* $q(1)$ *tiene como miembros* $\dot{1}$*,* V *y todos los superfiltros de* V*. Entonces* $q_{R_q}(1) = \{\dot{1}\}$*. En este caso obtenemos la inclusión propia* $q_{R_q} \subsetneq q$*.*

La siguiente observación nos será útil para demostrar el posterior teorema.

Observación 6*:* Sea I un conjunto no vacío, $M = \{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{F}(X)$ y $N = \{\bigcup\{g(i)\}_{i \in I} \mid g \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i\}$.

1) $\bigcap M = N$.

2) Si $L = \{\bigcap \mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ entonces $\bigcap\bigcap M = \bigcup L$.

1) Para $\bigcap M \subseteq N$, si $U \in \bigcap M$, es suficiente elegir g tal que $g(i) = U$ para toda $i \in I$. Para $N \subseteq \bigcap M$ es suficiente ver que, para cada $\hat{i} \in I$, $g(\hat{i}) \subseteq \bigcup\{g(i)\}_{i \in I}$.

2) Para $\bigcap\bigcap M \supseteq \bigcup L$ solo observese que $\bigcap M \subseteq \mathcal{F}_i$, para cada $i \in I$. Para $\bigcap\bigcap M \subseteq \bigcup L$, véase $\bigcap M$ como $N = \{\bigcup\{g(i)\}_{i \in I} \mid g \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i\}$. Sea $z \in \bigcap\bigcap M$. Esto significa que, para cada $g \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, existe un i tal que $z \in g(i)$. Supóngase que $z \notin \bigcup L$, esto implica que, para cada $i \in I$, podemos elegir un $A_i \in \mathcal{F}_i$ tal que $z \notin A_i$. Si definimos $\hat{g}(i)$ como A_i se tiene que $z \notin \bigcup\{\hat{g}(i)\}_{i \in I}$, una contradicción.

Restringiendo el funtor T_1 sobre $\mathscr{R}_i$ y W_1 sobre $\mathbf{Kent}, \mathbf{Lim}, \mathbf{Prtop}$ y $\mathbf{Top}$ (que serán denotados por T_n y W_n respectivamente) obtenemos el siguiente:

Teorema 2.11. *Hay una situación de adjunción entre las siguientes categorías:*

(a) $\mathscr{R}_2$ *y* $\mathbf{Kent}$

(b) $\mathscr{R}_3$ *y* $\mathbf{Lim}$

(c) $\mathscr{R}_4$ *y* $\mathbf{Prtop}$

(d) $\mathscr{R}_5$ *y* $\mathbf{Top}$

a través de los funtores T_1 *y* W_1 *restringidos a dichas categorías.*

Demostración. (a) T_2 está bien definido:
Sea $(X, R) \in \mathscr{R}_2$, $(\mathcal{F}, x) \in q_R$. Por construcción $\exists U[x\ R\ U \& \mathcal{F} \supseteq U\!\uparrow]$. Por la propiedad ($\mathrm{RT}_2$) tenemos que $x\ R\ U \cup \{x\}$. Dado que $\mathcal{F} \cap \dot{x} \supseteq (U \cup \{x\})\!\uparrow$, podemos concluir que $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q_R$.

W_2 está bien definido:
Sea $(X, q) \in \mathbf{Kent}$, $x\ R_q\ U$. Por construcción $\exists(\mathcal{F}, x) \in q\,[U = \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset]$. Por la propiedad $\mathbf{Kent}$, se tiene que $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$. Por la observación 6 (eligiendo $M = \{\mathcal{F}, \dot{x}\}$) se tiene que $\bigcap(\mathcal{F} \cap \dot{x}) = U \cup \{x\}$, y debido a la definición del funtor obtenemos que $x\ R_q\ U \cup \{x\}$.

(b) T_3 está bien definido:
De manera similar a (a), se puede demostrar fácilmente que $\mathcal{F}$,$\mathcal{G} \in q_R(x)$, obtenemos así que existen $U, V \subseteq \mathscr{P}(X)$ tales que $\mathcal{F} \supseteq U\!\uparrow$,$\mathcal{G} \supseteq V\!\uparrow$, $x\ R\ U$ y $x\ R\ V$. Finalmente, por $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \supseteq (U \cup V)\!\uparrow$ (Observación 6) concluimos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in q_R(x)$.

W_3 está bien definida:
Nuevamente, por la técnica usada en (a) y por la Observación 6, se tiene que, si $x\ R_q\ U$ y xR_qV, entonces existen $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in q(x)$ tales que $\bigcap \mathcal{F} = U \neq \emptyset$ y $\bigcap \mathcal{G} = V \neq \emptyset$. Pero $\bigcap \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = U \cup V$, lo cual implica que $xR_qU \cup V$.

(c) T_4 está bien definida:
Sea $(X, R) \in \mathscr{R}_4$. Por la Observación 6 tenemos que $\bigcap_{\mathcal{F} \in q_R(x)} \mathcal{F} \ni \mathscr{U}_x$.

W_4 está bien definido:
Sea $(X, q) \in \mathbf{Prtop}$. Por Observación 6 tenemos que $\bigcap \mathscr{V}_x = \bigcap \bigcap q(x) = \bigcup \{\bigcap \mathcal{F}_i \mid i \in I\} = \mathscr{U}_x$.

(d) T_5 está bien definido:
Sea $(X, R) \in \mathscr{R}_5$. Sea $U \in \mathscr{V}_x$, tómese V como $\mathscr{U}_x$. Si $y \in V$, entonces

$$\exists U' \left[y \in U' \& x\ R\ U'\right]$$

esto en conjunción (RT_5) implica que $\mathscr{U}_y \subseteq \mathscr{U}_x$, y esto que $\mathscr{U}_x \in \mathscr{V}_y$ por lo tanto $U \in \mathscr{V}_y$. Esto demuestra que (X, q_R) es un espacio topológico. Obsérvese que $\mathscr{V}_x = \mathscr{U}_x\!\uparrow$ para todo x, entonces (X, q_R) siempre es un espacio de Alexandroff.

W_5 está bien definido:
Sea $(X, q) \in \mathbf{Top}$, xR_qU y $y \in U$. Por (c) sabemos que $\bigcap \mathscr{V}_x = \mathscr{U}_x$. $y \in U$ implica que existe $(\mathcal{F}, x) \in q$ tal que $y \in \bigcap \mathcal{F} = U$. Esto implica que $\forall V \in \mathscr{V}_x[y \in V]$. Sea $V \in \mathscr{V}_x$, debido a que $(X, q) \in \mathbf{Top}$ tenemos que

$\exists V' \in \mathscr{V}_x\,[\forall z \in V'\,[V \in \mathscr{V}_z]]$, en particular $V \in \mathscr{V}_y$. Por lo tanto $\mathscr{U}_y \subseteq V$. Dado que V era arbitrario, $\mathscr{U}_y \subseteq \bigcap \mathscr{V}_x = \mathscr{U}_x$.

$\square$

Después de lo desarrollado hasta aquí, surgen las siguientes cuestiones de manera natural: Cuales propiedades el funtor W_1 preserva, y como serían enunciadas en $\mathscr{R}_1$ constructos.

III. SUBFILTROS EN MARCOS DE CONVERGENCIA

III.1. Introducción

En 2020, F. Mynard y J. Goubault-Larrecq publican *Convergence Without Points*[7]; trabajo en el que introducen una teoría de convergencia en retículas que permite representar la convergencia de **Gconv** sin puntos. El constructo **Gconv** se muestra como una subcategoría correflexiva de la categoría opuesta propuesta en el artículo (explicaremos a detalle que significa esto más adelante). Aún más, extienden esta dualidad de subcategorías coreflexivas entre subcategorías reflexivas de **Gconv** (**Lim**,**PreTop**, **Adh** y **Top**) y subcategorías reflexivas de la categoría Retículas de convergencia propuesta.

Es de remarcarse que cuando la categoría subyacente usada para la categoría Retículas de convergencia es la categoría de CoMarcos, $\mathbf{CF}$, todas las categorías propuestas son topológicas.

III.2. Antecedentes

En esta sección presentaremos algunas definiciones y resultados básicos de [7] con el objetivo de hacer más fluida la lectura de las subsecuentes secciones, sin embargo habrá resultados o definiciones de dicho artículo que también serán usados posteriormente de los cuales solo se hará referencia.

Definición 3.1 ($\mathscr{C}$-objeto de convergencia)**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría de cuña-semirretículas. Un $\mathscr{C}$-objeto de convergencia es un objeto L de $\mathscr{C}$ junto con una función* $\text{lím}_L : \mathbb{F}(L) \to L$ *que es monótona.*

La categoría $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ tiene por objetos los $\mathscr{C}$-objetos de convergencia, y como morfismos $\varphi : L \to L'$ los morfismos de L a L' de $\mathscr{C}$ que son continuos, en el sentido de que para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(L')$,

$$\text{lím}_{L'} \mathcal{F} \leq \varphi(\text{lím}_L \varphi^{-1}(\mathcal{F}))). \tag{3.2.1}$$

En donde $\varphi^{-1}(\mathcal{F}) = \{\varphi^{-1}(U) | U \in \mathcal{F}\}$.

Los autores explican claramente la motivación para la desigualdad que define la continuidad, que podemos resumir de la siguiente manera:

Si (X, q) es un $\mathbf{Gconv}$ objeto, y $\mathcal{F}$ un filtro de conjuntos sobre X, definimos $\lim_q \mathcal{F} = \{x \in X | (\mathcal{F}, x) \in q\}$. Así, podemos ver que la desigualdad 3.2.1 es una reformulación de la desigualdad (contención) de continuidad en $\mathbf{Gconv}$ para un morfismo $f : (X, q) \to (Y, p)$

$$\lim_q \mathcal{F} \subseteq f^{-1}\left(\lim_p f(\mathcal{F})\right)$$

reformulada para la función inversa de f, es decir, para $\varphi : \mathbb{P}Y \to \mathbb{P}X$, donde $\varphi(U) := f^{-1}(U)$. Obsérvese que $\varphi^{-1}(\mathcal{F}) = f(\mathcal{F})$ (1.1.1, p. 2).

¿Qué tipo de categorías de cuña semirretículas se pueden usar? En [7, 2.5] dan una definición que, aunque no mínima, bastante general de que tipo de categorías se pueden considerar para esta construcción:

Definición 3.2. *Una categoría $\mathscr{C}$ de cuña-semirretículas es admisible si y solo si:*

- *para cada conjunto X, $\mathbb{P}(X)$ es un objeto de $\mathscr{C}$;*
- *existen dos clases de conjuntos indicadores $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ tal que, para todos los objetos de L y L' de $\mathscr{C}$, los morfismos de L a L' son exactamente las funciones monótonas que preservan todos los ínfimos I-indicados que existen en L, con $I \in \mathscr{I}$, y todos los supremos J- indicados que existen en L, con $J \in \mathscr{J}$.*

Para nuestro trabajo bastará observar que las categorías de cuña-semirretículas, retículas, marcos y comarcos, con morfismos de cuña-semirretículas, retículas, marcos y comarcos, respectivamente, son categorías admisibles.

Proposición 3.3 ([5, 2.6])**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría admisible de cuña-semirretículas. Existe un functor $\mathbb{P} : \mathbf{Gconv} \to (\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}})^{\mathrm{op}}$ definido como sigue:*

- *En objetos: $\mathbb{P}(X)$ es el conjunto potencia de X, con el orden de la inclusión $\subseteq$, y con $\lim_{\mathbb{P}(X)} \mathcal{F} = \{x \in X | \mathcal{F} \to x\}$;*
- *En morfismos: $\mathbb{P}(f)(S) = f^{-1}(S)$, para toda función continua $f : X \to Y$ y cada $S \in \mathbb{P}(Y)$.*

Para construir el funtor de regreso $\mathrm{pt} : \mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}} \to \mathbf{Gconv}$ es necesario restringirse a categorías admisibles de retículas.

Definición 3.4 ([5, 2.8])**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría admisible de retículas. Para cada $\mathscr{C}$-objeto de convergencia L, los puntos de L son los morfismos de L a $\mathbb{P}(1)$ en $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$. Denotaremos con $\mathrm{pt}\, L$ al conjunto de puntos de L.*

Después de su definición, los autores exhiben la caracterización de los puntos de $L \in \mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ para cuando $\mathscr{C}$ es una categoría de retículas, marcos y comarcos. A continuación escribimos las observaciones más relevantes con respecto a nuestro posterior trabajo.

Observación 7*:* En todos los casos $\varphi : L \to \mathbb{P}(1)$ es continua, si y solo si $\varphi(\text{lím}_L \varphi^{-1}(\mathcal{G}))A = 1$ para todo filtro $\mathcal{G}$ en $\mathbb{P}(1)$, si y solo si $\varphi(\text{lím}_L \varphi^{-1}(\{1\}))$ $= 1$, si y solo si $\text{lím}_L \mathcal{F} \in \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es el filtro $\varphi^{-1}(\{1\})$.

Para definir un operador lím en $\mathrm{pt}\, L$, se introduce la siguiente noción. Para cada filtro $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathrm{pt}\, L$, $\mathcal{F}^\circ$ será el correspondiente filtro en L.

Definición 3.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría de retículas, y L un $\mathscr{C}$-objeto de convergencia. Para cada $\ell \in L$ sea $\ell^\bullet$ el conjunto de puntos $\varphi \in \mathrm{pt}\, L$ tal que* $\varphi(\ell) = 1$.

Para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{FP}(\mathrm{pt})$, sea:

$$\mathcal{F}^\circ := \{\ell \in L | \ell^\bullet \in \mathcal{F}\}.$$

Después proceden a demostrar algunas propiedades sobre el operador $(\,)^\bullet$, con las cuales pueden justificar la siguiente

Definición 3.6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría de retículas. Para cada $\mathscr{C}$-objeto de convergencia L, se define $\text{lím}_{\mathbb{P}(\mathrm{pt}\, L)} \mathcal{F}$ como $(\text{lím}_L \mathcal{F}^\circ)^\bullet$. En otras palabras, $\mathcal{F} \to x$ en $\mathrm{pt}\, L$ si y solo si $x \in (\text{lím}_L \mathcal{F}^\circ)^\bullet$.*

Naturalmente después proceden a demostrar que, efectivamente, define un espacio de convergencia.

Lema 3.7 (5, 2.21)**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría de retículas. Para cada $\mathscr{C}$-objeto de convergencia L, $(\mathrm{pt}\, L, \to)$ como se definió en 3.6 es un espacio de convergencia.*

Después, es demostrado que los funtores $\mathbb{P} \dashv \mathrm{pt}$ proveen una adjunción entre $\mathbf{Gconv}$ y $\left(\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}\right)^{op}$ ([7, 2.24]). También se agregan detalles sobre la *unidad* de la adjunción, $\eta_X : X \to \mathrm{pt}\, \mathbb{P}(X)$. Esta envía x a $\mathbb{P}(\overline{x}) \in \mathrm{pt}\, \mathbb{P}(X)$, donde $\overline{x} : 1 \to X$ manda el único elemento de 1 al elemento x. Si procedemos igualando puntos con filtros ($\varphi \in \mathrm{pt}(L)$ con $\varphi^{-1}(\{1\})$), entonces η_X manda x al filtro principal $\dot{x}$.

Lema 3.8 (5,2.26)**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría admisible de retículas. La función $\eta_X : X \to \mathrm{pt}\,(\mathbb{P}X)$ es inyectiva e inicial. Además, es un isomorfismo si $\mathscr{C}$ es una categoría admisible de marcos o comarcos.*

Escribimos la demostración a continuación ya que puede servir a familiarizarse con los operadores $()^\bullet$ y $()^\circ$ así como para agregar algunos pasos que no están expresados en el artículo original y que pueden ayudar al lector a seguir la prueba más fácilmente.

Demostración. Primero identificamos los puntos de $\mathbb{P}(X)$ con los filtros propios $\mathcal{U}$, que además cumplen que $\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\mathcal{U} \in \mathcal{U}$, como se menciona en la observación 7. Entonces $\eta_X(x) = \dot{x}$, y $\ell^\bullet = \{\mathcal{U} \in \mathrm{pt}\,\mathbb{P}(X) | \ell \in \mathcal{U}\}$ para todo $\ell \in \mathbb{P}(X)$. Que η_X es inyectivo es claro. Para demostrar la inicialidad obsérvese lo siguiente. Sea $\mathcal{F} \in \mathbb{F}\mathbb{P}(X)$, entonces $(\eta_X[\mathcal{F}])^\circ$ es el conjunto de elementos $\ell \in \mathbb{P}(X)$ tales que $\ell^\bullet \in \eta_X[\mathcal{F}]$, i.e., tales que $\eta_X^{-1}(\ell^\bullet) \in \mathcal{F}$. Ahora,

$$\begin{aligned} \eta_X^{-1}(\ell^\bullet) &= \{x \in X | \dot{x} \in \ell^\bullet\} \\ &= \{x \in X | \ell \in \dot{x}\} \\ &= \{x \in X | x \in \ell\} = \ell \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Por lo tanto $(\eta_X[\mathcal{F}])^\circ$ es $\mathcal{F}$. Se sigue que

$$\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(\mathrm{pt}\,\mathbb{P}(X))}\, \eta_X[\mathcal{F}] = \left(\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\, (\eta_X[\mathcal{F}])^\circ\right)^\bullet = \left(\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\, \mathcal{F}\right)^\bullet. \tag{3.2.3}$$

En particular, para cada $x \in X$, $\eta_X[\mathcal{F}]$ converge a $\eta_X(x)$ si y solo si $\eta_X(x) \in \left(\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\, \mathcal{F}\right)^\bullet$, si y solo si $\dot{x} \in \left(\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\, \mathcal{F}\right)^\bullet$ si y solo si $\mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\, \mathcal{F} \in \dot{x}$ si y solo si $x \in \mathrm{lím}_{\mathbb{P}(X)}\, \mathcal{F}$.

Con lo anterior es fácil ver que η_X es inicial. Sea $f : Y \to X$ función tal que $\eta_X \circ f$ es continua. Si $y \in \mathrm{lím}_{\mathbb{P}Y}\, \mathcal{G}$, entonces $\eta_X[f[\mathcal{F}]]$ converge a $\eta_X(f(y))$ y por lo tanto $f[\mathcal{G}]$ converge a $f(y)$.

Si $\mathscr{C}$ es una categoría admisible de marcos, por [7, Observaciones 2.11,2.16], sabemos que los únicos puntos de $\mathrm{pt}\,\mathbb{P}X$ son los filtros principales $\dot{x}$, así que η_X es sobreyectiva, y por la ecuación 3.2.3 se concluye que es isomorfismo. En el caso de comarcos se proceden usando [7, Observaciones 2.13, 2.17]. □

Un funtor que tiene un adjunto izquierdo fiel y pleno es llamado correflector. Se sabe también que un correflector es también un adjunto derecho cuya unidad es un ismorfismo, como es mostrado en [13, 4.5.13].

Por lo anterior, se deriva el siguiente

Corolario 3.9 (5, 2.27)**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría admisible de marcos o comarcos.* $\mathbf{Gconv}$ *es una categoría correflexiva de* $\left(\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}\right)^{\mathrm{op}}$*, a través del correflector* pt.

El corolario anterior se puede entender en términos usuales de correflexión de la siguiente manera:

La categoría $\mathbf{Gconv}$ se está considerando como subcategoría de $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ a través del funtor $\mathbb{P}$. No se pierde información alguna de este modo, ya que se demostró anteriormente, Lema 3.8(recordemos que estamos suponiendo que $\mathscr{C}$ es categoría de marcos o comarcos), que η_X es un isomorfismo. Así, lo que afirma el corolario es que, dado un $\left(\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}\right)^{\mathrm{op}}$ objeto, $(L, \mathrm{lím}_L)$, existe un morfismo $c_L : \mathbb{P}(Z) \to (L, \mathrm{lím}_L)$ tal que para todo morfismo $f : \mathbb{P}(X) \to (L, \mathrm{lím}_L)$ existe un morfismo f' que hace conmutar el siguiente diagrama (Z y $X \in \mathbf{Gconv}$):

$$\begin{tikzcd}
(L, \mathrm{lím}_L) & \\
\mathbb{P}(X) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f'"'] & \mathbb{P}(Z) \arrow[ul, "c_L"']
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior se encuentra en $\left(\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}\right)^{\mathrm{op}}$, así que al trabajar con los morfismos en $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ invertimos las flechas. Cuando se afirma en el corolario que pt es el reflector, es porque tanto Z como f' los obtenemos a través de dicho funtor, concretamente:

$$\begin{tikzcd}
(L, \mathrm{lím}_L) \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_L"] & \\
\mathbb{P}(X) & \mathbb{P}\,\mathrm{pt}(L, \mathrm{lím}_L) \arrow[l, "\mathbb{P}\,\mathrm{pt}\, f"]
\end{tikzcd}$$

Donde el diagrama anterior se encuentra en $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ y ϵ_L es la counidad de la adjunción que envía ℓ a $\ell^{\bullet}$.

III.3. Submarcos de Convergencia

El estudio de los subespacios en $\mathbf{Gconv}$ lo hacemos a través de los monomorfismos extremales, si queremos trasladar este estudio a $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}^{\mathrm{op}}}$ debemos entonces, primero identificar a los epimorfismos extremales en $\mathbf{Frm}$. En [11, 1.1.3] es demostrado que estos son exactamente los $\mathbf{Frm}$-morfismos sobreyectivos. Sin embargo, nosotros no estamos trabajando en $\mathbf{Frm}$ sino en $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$, por lo cual debemos considerar la estructura de convergencia de los marcos; pediremos entonces que el $\mathbf{Frm}$-morfismo sobreyectivo $\varphi : L \to L' \subseteq L$ además sea $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ final.

Dado que $(\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}})^{\mathrm{op}}$ replica una especie de **Conv** espacios, nos gustaría que un $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$-monomorfismo extremal $\varphi^* : L' \to L$ donde $L' \subseteq L$ tiene la $(\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}})^{\mathrm{op}}$ estructura inicial con respecto a φ, determina un subespacio en **Conv** bajo el funtor pt. Esto es equivalente a pedir que el $\mathscr{C}$-epimorfismo extremal $\varphi : L \to L'$ donde L' tiene la $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ estructura final con respecto a φ, determina un subespacio en **Conv** bajo el funtor pt. Se verá que, de hecho, este es el caso.

Pero para demostrar eso, serán necesarias las siguientes dos proposiciones.

Proposición 3.10. *Sea* $\varphi : (L, \mathrm{lím}_L) \to (L', \mathrm{lím}_{L'})$ *un* $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$*-morfismo. Entonces* $\mathrm{pt}\,\varphi(y) \in [\ell]^\bullet$ *si y solo si* $y \in [\varphi(\ell)]^\bullet$.

Demostración. Para esto indentificamos los puntos del marco de convergencia con sus filtros y hacemos uso de [7, 2.25] para interpretar a $\mathrm{pt}\,\varphi$ como φ^{-1}. Así que lo que será demostrado es que $\varphi^{-1}(y) \in [\ell]^\bullet$ si y solo si $y \in [\varphi(\ell)]^\bullet$. Pero el enunciado izquierdo es equivalente a $\ell \in \varphi^{-1}(y)$ y el derecho a $\varphi(\ell) \in y$. □

Proposición 3.11. *Sea* $\varphi : (L, \mathrm{lím}_L) \to (L', \mathrm{lím}_{L'})$ *un* $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$*-morfismo y* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{pt}(L'))$ *entonces* $\left(\varphi^{-1}[\mathcal{F}]\right)^\circ = \varphi^{-1}(\mathcal{F})^\circ$.

Demostración. Nótese que en la primera expresión (a la izquierda de la igualdad), φ^{-1} es interpretada como $\mathrm{pt}\,\varphi : \mathrm{pt}((L', \mathrm{lím}_{L'})) \to \mathrm{pt}((L, \mathrm{lím}_L))$ mientras que en la segunda como la imagen inversa de $\varphi : (L, \mathrm{lím}_L) \to (L', \mathrm{lím}_{L'})$.

Por definición $\ell \in \left(\varphi^{-1}[\mathcal{F}]\right)^\circ$ si y solo si $\ell^\bullet \in \varphi^{-1}[\mathcal{F}]$ si y solo si $\exists F \in \mathcal{F}\left[\varphi^{-1}[F] \subseteq \ell^\bullet\right]$ si y solo si $\exists F \in \mathcal{F} \forall y \in F\left[\varphi^{-1}(y) \in \ell^\bullet\right]$.

A la derecha de la igualdad tenemos que $\ell \in \varphi^{-1}(\mathcal{F}^\circ)$ si y solo si $\varphi(\ell) \in \mathcal{F}^\circ$ si y solo si $\varphi(\ell)^\bullet \in \mathcal{F}$ si y solo si $\exists F \in \mathcal{F}\,[F \subseteq \varphi(\ell)^\bullet]$ si y solo si $\exists F \in \mathcal{F} \forall y \in F\,[y \in \varphi(\ell)^\bullet]$.

Por 3.10 ambas expresiones son equivalentes. □

Proposición 3.12. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría de (co)marcos y* $(L, \mathrm{lím}_L)$ *un* $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$*-objeto, además* $\varphi : L \to L'$ *es un* $\mathscr{C}$*-epimorfismo, donde* $L' \subseteq L$ *tiene la* $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$ *estructura final con respecto a* φ*. Entonces* $\mathrm{pt}(L')$ *es un subespacio de* $\mathrm{pt}(L)$ *en* ***Conv****.*

Demostración. Mostraremos que $\mathrm{pt}(\varphi) : \mathrm{pt}(L') \to \mathrm{pt}(L)$ es un monomorfismo y que $\mathrm{pt}(L')$ tiene la estructura inicial con respecto a $\mathrm{pt}\,\varphi$.

Si identificamos los elementos de $\mathrm{pt}\,L$ y $\mathrm{pt}\,L'$ con sus respectivos filtros, por [7, 2.25] sabemos que $\mathrm{pt}\,\varphi(x) = \varphi^{-1}(x)$. Por lo tanto, sean $x, y \in \mathrm{pt}\,L'$

tales que $\operatorname{pt}\varphi(x) = \operatorname{pt}\varphi(y)$, i.e. $\varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(y)$. Dado que φ es sobre, tenemos que

$$x = \varphi\varphi^{-1}(x) = \varphi\varphi^{-1}(y) = y$$

Ahora verificamos que $\text{lím}_{\operatorname{pt} L'}$ es la estructura inicial con respecto a $\varphi^{-1} : (\operatorname{pt} L', \text{lím}_{\operatorname{pt} L'}) \to (\operatorname{pt} L, \text{lím}_{\operatorname{pt} L})$. Sea (Y, τ) un $\mathbf{Gconv}$-objeto y $f : (Y, \tau) \to (L', \text{lím}_{\operatorname{pt} L'})$ una función tal que $\varphi^{-1} \circ f$ es un $\mathbf{Gconv}$-morfismo, se demostrará que f tambien es un $\mathbf{Gconv}$-morfismo.

Sea $y \in \text{lím}_\tau \mathcal{F}$. Entonces $\varphi^{-1} \circ f(y) \in \text{lím}_{\operatorname{pt} L} \varphi^{-1}(f(\mathcal{F}))$. Esto último es equivalente a $\varphi^{-1} \circ f(y) \in \left[\text{lím}_L(\varphi^{-1} f(\mathcal{F}))^\circ\right]^\bullet$.

La Proposición 3.11 implica que $\varphi^{-1}(f(\mathcal{F}))^\circ$ y $(\varphi^{-1} f(\mathcal{F}))^\circ$ son lo mismo, así que por la Proposición 3.10 obtenemos que es equivalente a

$$f(y) \in \left[\varphi(\text{lím}_L \varphi^{-1}(f(\mathcal{F}))^\circ)\right]^\bullet$$

Lo que prueba que f es continua. □

Aún más, los $\mathscr{C}$-epimorfismos extremales (equivalentemente, sobreyectivos) $\varphi : L \to L'$ donde L' tiene la estructura final con respecto a φ, también incluyen la imagen bajo $\mathbb{P}$ de las inclusiones de $\mathbf{Gconv}$:

Proposición 3.13. *Si (X, τ) es un $\mathbf{Gconv}$-objeto y (X', τ') un subespacio de el, entonces $(\mathbb{P}X', \text{lím}_{\mathbb{P}X'})$ tiene la estructura final con respecto al morfismo sobreyectivo $\mathbb{P}i : (\mathbb{P}X, \text{lím}_{\mathbb{P}X}) \to (\mathbb{P}X', \text{lím}_{\mathbb{P}X'})$.*

Demostración. El morfismo $\mathbb{P}i$ es definido como i^{-1}. Sea $A \in \mathbb{P}X'$, entonces $i^{-1}(A) = A$, demostrando que es un morfismo sobreyectivo.

Nótese ahora que:

$$\begin{aligned} \text{lím}_{\mathbb{P}X'} \mathcal{F} &= (\text{lím}_L \mathcal{F}^\uparrow) \cap X \\ &= i^{-1}(\text{lím}_L \mathcal{F}^\uparrow) \\ &= i^{-1}(\text{lím}_L i(\mathcal{F})) \end{aligned}$$

Por la Observación [7, 2.4] obtenemos que i^{-1} es final. □

Aún más, comportándose como una categoría topológica, podemos probar que

Teorema 3.14. *Los $\mathbf{Frm}$ epimorfismos extremales con $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ estructura final son exactamente los $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$-epimorfismos extremales.*

Demostración. Supóngase que $\varphi : (L, \text{lím}_L) \to (H, \text{lím}_H)$ es un $\mathbf{Frm}$-morfismo extremal y lím_H es final con respecto a φ.

Empecemos suponiendo que $\varphi = f \circ m$ con m un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ monomorfismo.

Dado que φ es un $\mathbf{Frm}$ epimorfismo extremal entonces m es un $\mathbf{Frm}$ isomorfismo. Se sigue que $f = f \circ Id = f \circ (m \circ m^{-1}) = (f \circ m) \circ m^{-1} = \varphi \circ m^{-1}$ y por la finalidad de lím_H concluímos que m es un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ isomorfismo.

Ahora supondremos que $\varphi(L, \text{lím}_L) \to (H, \text{lím}_H)$ es un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ epimorfismo extremal. Podemos factorizar φ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\omega"'] & & H \\
& X/\pi_\varphi \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Estamos dotando a X/π_φ de la estrcutura final, también nótese que s es una función inyectiva. Dado que φ es un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ epimorfismo extremal y X/π_φ tiene estructura final, m es un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ isomorfismo. Por lo tanto H tiene estructura final. □

Obsérvese que en $\mathbf{Gconv}$, monomorfismos extremales satisfacen múltiples propiedades; por ejemplo, sea $f : (X, p) \to (Y, q)$ un monomorfismo extremal, si $A, B \subseteq f(X)$ y $A \neq B$, entonces $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(B)$, que pudiera parecer trivial, pero es un comportamiento que no podemos asegurar en los submarcos, esto es, si $\varphi : L \to H$ es un epimorfismo extremal, $t = \bigwedge\{\ell \in L | \varphi(\ell) = \top\}$, $\ell, \ell' \leq t$ con $\ell \neq \ell'$ no podemos asegurar que $\varphi(\ell) \neq \varphi(\ell')$. Ni siquiera podemos asegurar que $\varphi(t) = \top$ (!).

Por lo anterior, para el estudio de submarcos de convergencia pediremos propiedades adicionales:

Definición 3.15. *Decimos que un* $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ *epimorfismo extremal*

$$\varphi : (L, \text{lím}_L) \to (H, \text{lím}_H)$$

es un submarco de convergencia si:

- *)* $\varphi(t) = \top$*;* *donde* $t = \bigwedge\{\ell \in L | \varphi(\ell) = \top\}$*,*
- *)* φ *es inyectiva sobre* $\{t\}\downarrow$*.*

Nos gustaría que $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ reflejara las propiedades de subespacios en $\mathbf{Gconv}$, por ejemplo, todos los submarcos de convergencia deberían ser factorizables a través del morfismo correspondiente al "encaje".

Sean (X, τ) y (Y, σ) $\mathbf{Gconv}$ objetos tales que (X, τ) es subespacio de (Y, σ), i.e. la función $x \overset{i}{\mapsto} x$ es un morfismo inicial. Entonces $\mathbb{P}(i)(A) = A \cap X$, lo que puede ser escrito como $A \wedge X$ y esto como $A \wedge \top$.

Como nos gustaría, con la definición pasada se cumple el siguente

Teorema 3.16. *Todo submarco de convergencia* $\varphi : (L, \text{lím}_L) \to (H, \text{lím}_H)$ *puede ser factorizado a través del morfismo* $x \overset{\iota}{\mapsto} x \wedge t$ *definido de* $(L, \text{lím}_L)$ *a* $(L', \text{lím}_{L'})$*, donde* $L' = \{t\}\!\downarrow$ *y* $\text{lím}_{L'}$ *es la estructura final con respecto a* ι.

III.4. Subfiltros

La Definición 3.15 sugiere estudiar las propiedades de los submarcos de convergencia, sin embargo, como se ha visto en otros trabajos del campo de convergencia a través de filtros, el concepto de filtro presenta mayor libertades y facilidad de generalización que un concepto de una categoría en específico. Por lo anterior, en lugar de estudiar casos con un submarco de convergencia con una propiedad p, se estudiarán los casos con subfiltros con la propiedad p; se verá que, como es deseado, estos resultados se cumplirán para los submarcos de convergencia.

El Teorema 3.16 muestra que trabajar con un submarco de convergencia de $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ es equivalente a trabajar con un elemento específico de L, ahora veremos que sus propiedades son preservadas por su filtro principal.

Definiremos nociones equivalentes a *compacidad* y *cerradura* de $\mathbf{Gconv}$ en $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$. Recordemos primero las definiciones en $\mathbf{Gconv}$ (véase [6] para un desarrollo más detallado).

Si A y B son subconjuntos de (X, ξ), espacio de convergencia, decimos que A es ξ*-compacta en* B, si para todo $\mathcal{H} \in \mathbb{F}X$,

$$A \in \mathcal{H}^{\#} \Rightarrow \text{adh}_\xi \mathcal{H} \cap B \neq \emptyset, \;\text{ donde } \text{adh}_\xi \mathcal{H} := \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{H}^{\#}} \text{lím}_\xi \mathcal{F}. \tag{3.4.1}$$

En particular, decimos que un conjunto A es *compacto* si es compacto en él mismo.

Esta definición se puede generalizar para familias como sigue:

Sea $(X, \xi) \in \mathbf{Gconv}$, y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}X$. Decimos que $\mathcal{A}$ es *compacta en* $\mathcal{B}$ si

$$\forall \mathcal{H} \in \mathbb{FP}X \left[\mathcal{H} \# \mathcal{A} \Rightarrow \text{adh}_\xi \mathcal{H} \in \mathcal{B}^{\#}\right] \tag{3.4.2}$$

Como se espera, (3.4.1) es un caso especial de (3.4.2). Si $\{A\} \subseteq \mathcal{A} \subseteq A\uparrow$ y $\{B\} \subseteq \mathcal{B} \subseteq B\uparrow$, entonces $\mathcal{A}$ es compacta en $\mathcal{B}$ si y solo si A es compacto en B. De igual modo que para los conjuntos, una familia $\mathcal{A}$ es *compacta* si lo es en ella misma.

Con base en las previas definiciones, procedemos a dar nuestra definición para $\mathscr{C}^{\mathbf{Gconv}}$:

Definición 3.17. *Sea* $(L, \text{lím}_L)$ *un marco de convergencia. Un filtro* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}L$ *es compacto si*

$$\forall \mathcal{G} \in \mathbb{F}(L), \mathcal{G}\#\mathcal{F} \Rightarrow \text{adh}_{\text{lím}_L} \mathcal{G}\#\mathcal{F}$$

También es sabido para $\mathbf{Gconv}$ que, la propiedad de ser compacto puede ser enunciado en términos de ultrafiltros, en efecto: Un filtro $\mathcal{F}$ es compacto en B si y solo si

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})\, [\text{lím}\, \mathcal{U} \cap B \neq \emptyset]$$

La Definición 3.17 está en sintonía con esta propiedad:

Proposición 3.18. *Sea* $(L, \text{lím}_L)$ *un marco de convergencia,* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(L)$ *es compacto si y solo si* $\forall \mathscr{U} \in \mathbb{U}(L)\, [\mathscr{U}\#\mathcal{F} \Rightarrow \text{lím}\, \mathscr{U}\#\mathcal{F}]$

Demostración. Supóngase $\mathcal{F}$ es compacto; basta observar que $\text{adh}\, \mathcal{U} = \text{lím}\, \mathcal{U}$ cuando $\mathcal{U}$ es ultra filtro.

Ahora, sea $\mathcal{G} \in \mathbb{F}(L)$ y $\mathcal{G}\#\mathcal{F}$, existe $\mathscr{U} \in \mathbb{U}(L)$ tal que $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathscr{U}$, por lo que $\mathscr{U}\#\mathcal{F}$ así como $\mathscr{U}\#\mathcal{G}$. Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces

$$\perp < \text{lím}\, \mathcal{U} \wedge f < \text{adh}\, \mathcal{G} \wedge f$$

en donde la primera desigualdad es porque la hipótesis y que $\mathcal{U}$ se mezcla con $\mathcal{F}$ mientras que la segunda es por que $\mathcal{U}$ se mezcla con G. □

Observación 8*:* Se puede verificar que la imagen bajo el funtor $\mathbb{P}$ de un $\mathbf{Gconv}$ espacio compacto es $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ compacta (Solo tómese $\mathcal{F} = \{\top\}\uparrow$).

Definición 3.19. *Sea* $(L, \text{lím}_L)$ *un marco de convergencia. Un filtro* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}L$ *es* cerrado *si*

$$\text{adh}\, \mathcal{F} \leq \bigwedge \mathcal{F}$$

Observación 9*:* Si (X', q') es subespacio de (X, q) con $X' \subseteq X$ en $\mathbf{Gconv}$, entonces $\mathbb{P}((X', q'))$ es un submarco de convergencia cerrado de $\mathbb{P}((X, q))$ (X' es un elemento cerrado en $\mathbb{P}((X, q))$).

Teorema 3.20. *Sean $(L, \text{lím}_L)$ un marco de convergencia, $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ filtros sobre L, $\mathcal{F}$ compacto y $\mathcal{G}$ cerrado. Entonces $\mathcal{G}$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{U} \in \mathbb{U}(L)$ tal que $\mathscr{U} \supseteq \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, entonces $\text{lím}\, \mathscr{U} \# \mathcal{F}$, por la compacidad de $\mathcal{F}$, y por lo tanto $\text{lím}\, \mathscr{U} > \perp$. Entonces por ser $\mathcal{G}$ cerrado obtenemos que, para todo $g \in \mathcal{G}$

$$\perp < \text{lím}\, \mathscr{U} \leq \text{adh}\, \mathcal{G} = \bigvee_{\mathscr{W} \in \mathbb{U}(\mathcal{G})} \text{lím}\, \mathscr{W} \leq \bigwedge \mathcal{G} \leq g$$

así que, $\text{lím}\, \mathscr{U} \wedge g = \text{lím}\, \mathscr{U} > \perp$ y por lo tanto $\text{lím}\, \mathscr{U} \# \mathcal{G}$. $\square$

Corolario 3.21. *Si $(L, \text{lím}_L)$ es un marco de convergencia compacto y $(L', \text{lím}'_L)$ es un submarco de convergencia cerrado de él, entonces $(L', \text{lím}'_L)$ es compacto.*

Así, el comportamiento topológico de que los subespacios cerrados en compactos son cerrados en $\mathbf{Gconv}$ es reflejado en $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$. De hecho, puede ser demostrado que esto es cierto para $\mathbb{D}$-compacidad.

La propiedad equivalente a “imagen de compactos es compacta” también es preservada en $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$.

Teorema 3.22. *Sea $g : (L, \text{lím}_L) \to (H, \text{lím}_H)$ un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Gconv}}$ morfismo. Si $\mathscr{F} \in \mathbb{F}(H)$ es compacto, entonces $g^{-1}(\mathscr{F})$ es compacto.*

Demostración. Sea $\ell \in L$ tal que $g(\ell) \in \mathscr{F}$. Sea $\mathscr{H} \# g^{-1}[\mathscr{F}]$, entonces $g[\mathscr{H}] \# \mathscr{F}$. Dado que $\mathscr{F}$ es compacto tenemos que $\text{adh}\,[\mathscr{H}] \# \mathscr{F}$, y particularmente, $\text{adh}\,[\mathscr{H}] \wedge g(\ell) \neq \perp$, i.e.

$$\bigvee_{\mathscr{W} \# g[\mathscr{H}]} \text{lím}\, \mathscr{W} \wedge g(\ell) \neq \perp$$

Como L es un marco, esto implica que $\exists W\, [\text{lím}\, \mathscr{W} \wedge g(\ell) \neq \perp \,\&\, \mathscr{W} \# g\,[\mathscr{H}]]$.

Dado que g es un $\mathbf{Frm}^{\mathbf{Conv}}$ morfismo entonces $\text{lím}\, \mathscr{W} \leq g\left(\text{lím}\, g^{-1}(W)\right)$, lo cual implica que

$$\perp \neq \text{lím}\, \mathscr{W} \wedge g(\ell) \leq g\left(\text{lím}\, g^{-1}(\mathscr{W}) \wedge \ell\right)$$

y dado que g es un $\mathbf{Frm}$ morfismo, implica que $\text{lím}\, g^{-1}(\mathscr{W}) \wedge \ell \neq \perp$, lo que concluye la prueba. $\square$

Un espacio Hausdorff de convergencia es definido como uno donde cada filtro $\mathcal{F}$ satisface que $\text{lím}\, \mathcal{F} = \emptyset$ o $\text{lím}\, \mathcal{F}$ es un singular.

Este comportamiento puede ser imitado con la siguiente

Definición 3.23. *Decimos que un marco de convergencia* $(L, \text{lím}_L)$ *es Hausdorff si,* $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}(L)\, [\text{lím}\, \mathcal{F} = \perp$ *o* $\text{lím}\, \mathcal{F}$ *es mínimo en* $L \setminus \{\perp\}]$.

Se deduce directamente que la imagen $\mathbb{P}((X,q))$ de cualquier espacio Hausdorff de convergencia es un marco de convergencia Hausdorff.

Reflejando propiedades de convergencia deseadas,$\mathbf{Frm^{Gconv}}$ satisface el siguiente

Teorema 3.24. *Sea* $(L, \text{lím}_L)$ *un marco de convergencia Hausdorff y* $\mathcal{F}$ *un filtro compacto sobre* $\mathbb{F}(L)$ *entonces* $\mathcal{F}$ *es cerrado.*

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\bigvee_{\mathscr{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \text{lím}\, \mathscr{U} = \text{adh}\, \mathcal{F} \leq \bigwedge \mathcal{F}.$$

Sea $\mathscr{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$ demostraremos que $\forall f \in \mathcal{F}\, [\text{lím}\, \mathscr{U} < f]$.

Por compacidad obtenemos que $\text{lím}\, \mathscr{U} \# \mathcal{F}$, y por lo tanto $\text{lím}\, \mathscr{U} > \perp$. Ya que $(L, \text{lím}_L)$ es Hausdorff, $\text{lím}\, \mathscr{U}$ es mínimo en $L \setminus \{\perp\}$. Y dado que $\text{lím}\, \mathscr{U} > \perp$ entonces $\forall f \in \mathcal{F}\, [\text{lím}\, \mathscr{U} \wedge f > \perp]$, y por ser $\text{lím}\, \mathscr{U}$ mínimo, tenemos que $\text{lím}\, \mathscr{U} = \text{lím}\, \mathscr{U} \wedge f \leq f$.

$$\text{lím}\, \mathscr{U} \leq \bigwedge_{f \in \mathcal{F}} f$$

$\square$

IV. CONCLUSIONES

Más allá de los resultados matemáticos que se encuentran en los capítulos 2 y 3, queremos resaltar dos reflexiones derivadas del trabajo.

La primera, un poco más específica, es que en ciertos contextos, la topología sin puntos es una representación más pragmática. Usando el ejemplo dado por Picado y Pultr; supongamos que se está calculando $\sqrt{2}$, naturalmente se van produciendo aproximaciones numéricas, aproximaciones que pueden ser interpretadas como el proceso de ir acotando lugares de extención no trivial

$$1.(\text{región borrosa }),\ 1.4(\text{región borrosa }),$$
$$1.41(\text{región borrosa }),\ 1414(\text{región borrosa }),\ \ldots$$

esto último corresponde a adoptar un actitud sin puntos: el espacio (en este caso la recta real) es un conglomerado de lugares, regiones de extención no trivial, de alguna manera relacionadas entre ellas, los puntos son sólo abstracciones de los "centros" de sistemas de regiones que se van reduciendo. No son muy realistas.

El ejemplo de Picado y Pultr es para mostrar que hay situaciones comunes y muy concretas en donde una aproximación desde la perspectiva sin puntos es más natural; continúan añadiendo que en la mayoría de los espacios que se usan normalmente, los puntos pueden ser reconstruidos cuando se necesite a partir de la información "real".

Explicar como están *relacionados de alguna manera* es mucho más fácil a través de la perspectiva de filtros; pero *el* filtro de vecindades es sólo un caso particular de como los filtros "relacionan de alguna manera" las regiones. Podemos prescindir de la topología, y por lo tanto de la vecindad de filtros y aún así utilizar los filtros como sistemas de regiones que "señalan de algún modo" a la abstracción del punto.

La segunda reflexión, un poco más general, es sobre el concepto de adjunción. Cuando uno estudia la definición de límite en cálculo, se dan varios ejemplos de como interpretarse qué es un límite; usualmente estos ejemplos o nociones, si bien intuitivas o familiares, no son capaces de usarse sistemáticamente en todos los escenarios que nos gustaría o de hacerlo sin contradicciones, algunos de estos ejemplos o nociones son rescatados de los siglos XVI y XVII, cuando grandes resultados de lo que hoy conocemos como cálculo fueron obtenidos, a pesar de no contar con una definición formal o consistente. También se suelen brindar ejemplos formales y consistentes pero que son casos particulares de lo que se pretende sea un límite. Cuando es necesaria una herramienta que nos permita usar o resolver lo que esperaríamos de un límite nos topamos con definiciones formales intransigentes, significan lo que dicen, ni más ni menos. Esas definiciones capturan propiedades que deseamos que tengan pero tenemos que someternos a que todo lo que cumpla la definición sea un límite, incluso si no teníamos contemplado ese escenario inicialmente, y que algunos elementos no serán un límite aunque la intuición nos dijera que sí. La definición de límite que se use crea y ocupa un lugar, válgase la expresión, definitorio de la teoría, es decir, configurará que resultados obtendremos de ella y como los interpretamos.

Al desarrollar el trabajo presentado en este trabajo, encontramos símiles entre la situación descrita previamente y la definición de *adjunción*. Se pueden dar múltiples casos y nociones de lo que se busca que represente la definición de adjunción (y lo hace), así como casos concretos que se espera sean casos particulares de adjunción (y lo son); y sin embargo, la definición de adjunción por sí misma, configura nuestra percepción al relacionar dos categorías por ser *similares*.

Una adjunción nos permite traducir una propiedad a un nuevo territorio donde tal vez no había forma natural de enunciar esa propiedad. Y al terminar de escribir la oración anterior construímos el ouroboro de lo que se ha estado discutiendo en los párrafos previos, lo fortalecemos engrandeciéndolo con una noción que le atribuímos a la definición formal de adjunción.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

ÍNDICE ALFABÉTICO

BIBLIOGRAFÍA

[1] Jiri Adámek. *Theory of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company, 1983.

[2] E. Angulo-Perkins and J.J. Angoa-Amador. Topological relations. *Revista Integración, temas matemáticos*, 39(1):79–89, 2021.

[3] Andreas Blass. Two closed categories of filters. *Fundamenta Mathematicae*, 94(2):129–143, 1977.

[4] S. Bonnevay, M. Lamure, C. Largeron-Leteno, and N. Nicoloyannis. A pretopological approach for structuring data in non-metric spaces. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2:1 – 9, 1999. OSDA98, Ordinal and Symbolic Data Analysis.

[5] Nadia Kabachi et Michel Lamure Cynthia Basileu. Pretopological structuring of a finite set endowed with a family of binary relationships. *Intelligences Journal [Online]*, (2).

[6] Szymon Dolecki and Frédéric Mynard. *Convergence Foundations of Topology*. World Scientific, 2016.

[7] Jean Goubault-Larrecq and Frédéric Mynard. Convergence without points. *Houston Journal of Mathematics*, 46(1):227–282, 2020.

[8] G.E. Strecker J. Adámek, H. Herrlich. *Abstract and Concrete Categories. the Joy of Cats*. Online, 2004.

[9] Peter T. Johnstone. The point of pointless topology. *Bull. amer. Math. soc*, 8:41–53, 1983.

[10] Christine Largeron and Stéphane Bonnevay. A pretopological approach for structural analysis. *Information Sciences*, 144(1):169 – 185, 2002.

[11] J. Picado and A. Pultr. *Frames and locales : topology without points*. Birkhäuser, Basel, 2012.

[12] Gerhard Preuss. *Foundations of topology : an approach to convenient topology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston, 2002.

[13] Emily Riehl. *Category theory in context*. Dover Publications, Dordrecht Boston, 2017.