BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Continuos Localmente Conexos

TESIS

presentada como requisito para obtener el título de:

Licenciatura en Matemáticas

presenta:

Lázaro Flores De Jesús

Directores de Tesis

Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. Diciembre, 2015

A mis padres, que siempre me han apoyado en mis decisiones.

Agradecimientos

Primeramente deseo agradecer a mis padres, que con su ejemplo me han enseñado a librar los obstáculos de la vida.
A mis tías y tíos que forman parte del gran equipo que es mi familia.

A mis asesores de tesis, Dr. David Herrera Carrasco y Dr. Fernando Macías Romero, por haber dedicado su tiempo para la realización de este trabajo, muchas gracias.

A todos mis amigos de la FCFM por haberme acompañado en esta gran aventura. Siempre conté con su apoyo y siempre contaran con el mio.

A la Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Posgrados por el apoyo otorgado durante la realización de este trabajo, gracias.

Introducción

Un espacio topológico es localmente conexo si cada uno de sus puntos tiene una base de vecindades de conjuntos abiertos conexos. Un continuo localmente conexo es frecuentemente llamado un continuo de Peano en honor a Giuseppe Peano: en 1890; Peano dio el primer ejemplo de una curva que llenaba el espacio, es decir una función continua del intervalo cerrado $[0,1]$ sobre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$; después, Hahn y Mazurkiewicz demostraron que todo continuo localmente conexo es una imagen continua de $[0,1]$ (e inversamente).
Ejemplos de continuos localmente conexos son cualquier gráfica finita, cualquier n-celda, el cubo de Hilbert, el punto peludo, etc. Por otro lado, por ejemplo, el continuo que es la cerradura de $\left\{\left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$ no es un continuo localmente conexo.
El tema de esta tesis es de gran importancia; está centrado alrededor de un problema que tomó cerca de cincuenta años en resolverse. Por lo tanto, debemos comenzar con una discusión histórica. En Polonia, a comienzos de 1920, se auguró que $2^{[0,1]}$ es el cubo de Hilbert. La conjetura primero apareció impresa en 1938. Finalmente, en 1970, Schori y West probaron que $2^{[0,1]}$ es, en efecto, el cubo de Hilbert (vea [22]). Ellos lograron extender su resultado para 2^X cuando X es cualquier gráfica finita.
Regresando a 1930, Wojdyslawski hizo la siguiente pregunta ¿es 2^X el cubo de Hilbert siempre que X es un continuo localmente conexo no degenerado? Remarcamos que la pregunta fue restringida a continuos localmente conexos porque son continuos X para los cuales 2^X es un continuo localmente conexo (vea [6, Teorema 3.30]). En 1939, Wojdyslawski demostró que para cualquier continuo localmente conexo X, los continuos 2^X y $C(X)$ son retractos absolutos (vea [24, Teorema II, Teorema II$_m$]).
Después, en 1974 y 1978, Curtis y Schori publicaron los generosos artículos: [7] y [8]. Ellos respondieron la pregunta de Wojdyslawski (afirmativamente)

y obtuvieron los siguientes resultados para cuando X es un continuo no degenerado, localmente conexo: **(1)** 2^X es el cubo de Hilbert; **(2)** $C(X)$ es el cubo de Hilbert solo cuando todo arco en X tiene interior vacío en X, es decir, cuando X no contiene arcos libres; y **(3)** $C(X)$ es un factor del cubo de Hilbert ($C(X) \times I^\infty$ *es homeomorfo a* I^∞*, donde* I^∞ *denota el cubo de Hilbert*) (vea [7, Teorema 1, Teorema 2] y [8, Teorema 3.2, Teorema 4.1]).
La técnica, de prueba, de Curtis, Schori y West involucra el uso minucioso de límites inversos, maniobras sutiles y complicadas con refinamientos de particiones, y lo que fue en su momento resultados muy nuevos acerca de la topología de dimensión infinita. Pero, los artículos de Curtis y Schori no son el fin de nuestra historia, apareció H. Toruńczyk, quien se aplicó fuertemente a mediados de 1970 tratando de caracterizar diversamente el cubo de Hilbert.
El propósito de esta tesis es demostrar los primeros dos resultados de Curtis y Schori mencionados anteriormente usando el Teorema de Toruńczyk. En este trabajo, también presentamos el acervo necesario para probar dichos resultados (vea [14, Capitulo III]).

Índice

Espacios Localmente Conexos

Lázaro Flores De Jesús

Diciembre, 2015

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

En este capítulo enunciamos algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $\overline{A}$, $Fr(A)$ e A° denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\overline{A_Y}$, $Fr_Y(A)$ y A_Y° denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X, respectivamente. El diámetro de A, lo denotamos por $diám(A)$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números reales y el n-ésimo producto cartesiano de $\mathbb{R}$, respectivamente. Un espacio topológico es **no degenerado** si tiene más de un punto. Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$, será considerado con la topología Euclidiana, a menos que se indique otra cosa, $I = [0,1]$, $I^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]_i$ denota el cubo de Hilbert.
El siguiente resultado se usa continuamente durante el desarrollo de la topología.

Teorema 1.1.1. *Sean A y B conjuntos cerrados de un espacio topológico X, Y un espacio topológico arbitrario. Si $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ son funciones continuas tales que $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$, entonces la función $h : A \cup B \to Y$, definida para cada $x \in A \cup B$, por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in A, \\ g(x), & si\ x \in B. \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Supongamos que C es un conjunto cerrado en Y, por la continuidad de f, tenemos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y como A es cerrado en X, tenemos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en X. De manera similar podemos probar que $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y así en X. Notemos que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ y que $f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ es cerrado en X tal que $h^{-1}(C) = (f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)) \cap (A \cup B)$, luego $h^{-1}(C)$ es cerrado en $A \cup B$. Por lo tanto, h es continua. $\square$

Un concepto importante que nos permite relacionar los espacios topológicos es el siguiente.

Definición 1.1.2. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, f es un* ***homeomorfismo*** *de X en Y si f es biyectiva, es continua y f^{-1} es continua.*

La palabra homeomorfismo viene del griego $\ddot{o}\mu o \iota o \varsigma$ (homoios) = misma y $\mu o \rho \varphi \acute{\eta}$ (morphe) = forma.

Definición 1.1.3. *Sean X y Y espacios topológicos, X es* ***homeomorfo*** *a Y si existe un homeomorfismo de X en Y.*

Las propiedades de estos espacios que se conservan bajo homeomorfismos se denominan **invariantes topológicos**. En la categoría de espacios topológicos, los morfismos son las funciones continuas y los isomorfismos son los homeomorfismos. Consecuentemente, la composición de dos homeomorfismos es de nuevo un homeomorfismo, y el conjunto de todos los homeomorfismos, $h : X \to X$ forman un grupo llamado grupo de homeomorfismos de X, que suele denotarse como $Hom(X)$.

De modo intuitivo, el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son el «mismo» vistos de otra manera: permitiendo estirar, doblar, cortar y pegar. Sin embargo, los criterios intuitivos de «estirar», «doblar», «cortar» y «pegar» requieren de cierta práctica para aplicarlos correctamente. Deformar un segmento de línea hasta un punto no está permitido, por ejemplo, contraer de manera continua un intervalo hasta un punto es otro proceso topológico de deformación llamado *homotopía*.

Una de las principales propiedades topológicas es la noción dada en la Definición 1.1.5 pero antes de hablar de ella damos un concepto necesario.

Definición 1.1.4. *Sea X un espacio topológico. Una* ***separación*** *de X es un par de conjuntos U y V abiertos en X, no vacíos, ajenos tales que $X = U \cup V$.*

Definición 1.1.5. *Un espacio topológico X es* ***conexo*** *si no existe una separación de X. Un espacio topológico es* ***disconexo*** *si no es conexo.*

La conexidad representa una extensión de la idea de que un intervalo es todo «de una pieza». Un espacio topológico puede no ser conexo, por ejemplo, la unión de dos intervalos ajenos no es conexo pero podemos ver que para cada punto existe un conexo que lo contiene, esto motiva la siguiente noción.

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio topológico, un subconjunto C de X es una* ***componente*** *de X si cumple las siguientes condiciones.*

1. *C es conexo y*

2. *si B es un subespacio conexo de X tal que $C \subset B$, entonces $B = C$.*

Es decir, C es un subespacio conexo maximal.

Evidentemente, un espacio topológico con una componente es conexo.

1.2. Continuos e hiperespacios

Definición 1.2.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico X no vacío, compacto y conexo. Dado $Y \subset X$, Y es un* ***subcontinuo*** *de X si Y es un continuo.*

Al igual que la metrizabilidad, la conexidad y la compacidad son invariantes topológicos; de aquí, la noción de continuo es un invariante topológico. Veamos algunos ejemplos de continuos.

Ejemplo 1.2.2.

1. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$, como éste es un continuo, un arco también es un continuo.*

2. *Una* ***curva cerrada simple*** *es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

como S^1 es un continuo, una curva cerrada simple también es un continuo.

3. *Una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a*

$$B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

como B^n es un continuo, una n-celda también es un continuo.

Dado un continuo X, se consideran familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular, las cuales son llamados los **hiperespacios** del continuo X. Consideremos los siguientes hiperespacios de X.

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\},$$
$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}.$$

Definición 1.2.3. *Sean X un continuo con métrica d, $A, B \in X$, denotamos por $d(A, B)$ la distancia de A a B como $d(A, B) = \text{ínf}\,\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$ y la distancia de un punto p a un conjunto C es $d(p, C) = d(\{p\}, C)$.*

Definición 1.2.4. *Si A es cerrado en X, la **nube** en X con centro en A y de radio $\varepsilon > 0$, es $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}$.*

Algunas de las propiedades de las nubes se enuncian a continuación.

Teorema 1.2.5. *Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$A \subset N(\varepsilon, A)$,*

2. *$N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$. Así $N(\varepsilon, A)$ es un abierto en X,*

3. *$N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ para cada $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$, y*

4. *$N(\varepsilon, A) = \bigcup \{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$.*

Demostración.

1. Es claro que se cumple ya que para cada $a \in A$ se tiene que $d(a, a) = 0 < \varepsilon$ entonces $a \in N(\varepsilon, A)$.

2. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$, luego, $x \in B(\varepsilon, a)$. Así $x \in \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$. por lo tanto,

$$N(\varepsilon, A) \subset \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a) \tag{1.1}$$

Ahora, sea $x \in \bigcup_{a\in A} B(\varepsilon, a)$, así exite $a \in A$ tal que $x \in B(\varepsilon, a)$, es decir, $d(a,x) < \varepsilon$, por lo tanto,

$$\bigcup_{a\in A} B(\varepsilon, a) \subset N(\varepsilon, A). \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2), se obtiene la igualdad.

3. Si $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a,x) < \delta$, luego $d(a,x) < \epsilon$, es decir $x \in N(\epsilon, A)$. Por lo tanto $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

4. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,x) < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(a,x) < \delta < \varepsilon$, luego, $x \in N(\delta, A)$. Así $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$. Por lo tanto

$$N(\varepsilon, A) \subset \bigcup \{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}. \tag{1.3}$$

Ahora, sea $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$, enotnces existe δ tal que $0 < \delta < \varepsilon$ y $x \in N(\delta, A)$. Por el inciso (3) tenemos que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$, así $x \in N(\varepsilon, A)$, por lo tanto

$$\bigcup \{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\} \subset N(\varepsilon, A). \tag{1.4}$$

Por (1.3) y (1.4) obtenemos la igualdad deseada.

□

Teorema 1.2.6. *Si $A \in 2^X$ y U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Sea $A \subset U$. Luego, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Notemos que A y $X \setminus U$ son cerrados en X y así compactos en X. De manera que $d(A, X\setminus U) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A,X\setminus U)}{2}$. Veamos que $N(\varepsilon, A) \subset U$. En efecto, si $x \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,x) < \varepsilon$. Así, $x \in B(\varepsilon, a)$. Afirmamos que $x \in U$. Porque en caso contrario, es decir, si $x \in X\setminus U$, entonces $d(A, X\setminus U) \leq d(a,x)$. Así, $d(A, X \setminus U) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$. Con esto concluimos la prueba de este teorema. □

Teorema 1.2.7. *Sean $A, B \in 2^X$. Si $0 < \delta \leq \varepsilon$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$.*

Demostración. Sea $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a,x) < \delta$. Como $\delta \leq \varepsilon$, se sigue que $d(a,x) < \varepsilon$. Puesto que $A \subset B$, implicamos que $a \in B$, de donde $x \in N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$. □

Teorema 1.2.8. *Si $\varepsilon > 0$ y $A,\ B \in 2^X$, entonces*

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B).$$

Demostración. Por el teorema 1.2.7, inferimos que $N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ y $N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Así,

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B). \tag{1.5}$$

Ahora, sea $z \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Existe $b \in A \cup B$ tal que $d(b,z) < \varepsilon$. Tenemos dos casos $b \in A$ o $b \in B$.

(i) Si $b \in A$, entonces $z \in N(\varepsilon, A)$.

(ii) Si $b \in B$, entonces $z \in N(\varepsilon, B)$.

En ambos casos, $z \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto,

$$N(\varepsilon, A \cup B) \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B). \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6), concluimos que $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$. □

Teorema 1.2.9. *Sean $A,\ B \in 2^X$. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos por el contrario, que para cada $\varepsilon > 0$, tenemos que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos en X, tenemos que $d(A,B) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A,B)}{2}$, notemos que $\varepsilon > 0$. Por lo supuesto, deducimos que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Existe $z \in N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B)$. Así, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a,z) < \varepsilon$ y $d(b,z) < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad del triángulo, $d(a,b) \leq d(a,z) + d(z,b)$. Luego, $d(a,b) < 2\varepsilon = d(A,B)$, de manera que $d(a,b) < d(A,B)$, lo cual es una contradicción. □

Para el siguiente resultado nos sera útil la siguiente notación.

Notación 1.2.10. *Sea X un continuo. Para cada $A, B, C \in 2^X$ sean*

$$E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\} \text{ y}$$

$$E(A,B) \uplus E(B,C) = \{\varepsilon + \delta > 0 : \varepsilon \in E(A,B) \ y \ \delta \in E(B,C)\}.$$

Teorema 1.2.11. *Sea X un continuo. La función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada A, $B \in 2^X$, por*

$$H(A,B) = \text{\'inf}\, E(A,B)$$

es una métrica para 2^X.

Demostración. Sean A, B, $C \in 2^X$.

(a) Veamos que H está bien definida. Para esto, tenemos que probar que el conjunto $E(A,B)$ es no vacío y está acotado inferiormente. Observemos que $d(x,y) <$*diám*$(X) + 1$, para cada x, $y \in X$, en particular si $x \in A$ y $y \in B$. Así, $A \subset N(\text{diám}(X) + 1, B)$ y $B \subset N(\text{diám}(X) + 1, A)$. De manera que *diám*$(X) + 1 \in E(A,B)$. Por tanto, $E(A,B) \neq \emptyset$. Es claro que $E(A,B)$ está acotado inferiormente por el cero.

(b) Para cada A, $B \in 2^X$, notemos que $H(A,B) \geq 0$.

(c) Por definición de $E(A,B)$, deducimos que $E(A,B) = E(B,A)$, de esto, para cada A, $B \in 2^X$, tenemos que $H(A,B) = H(B,A)$.

(d) Para cada A, $B \in 2^X$, veamos que $H(A,B) = 0$ si y solo si $A = B$. Sean A, $B \in 2^X$. Supongamos que $H(A,B) = 0$. Mostraremos que $A = B$. Para esto, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Como $H(A,B) = 0$, existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \varepsilon$. Luego, $A \subset N(\delta, B)$ y como $x \in A$, se sigue que $x \in N(\delta, B)$. Entonces existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta < \varepsilon$. Así, $y \in B(x,\varepsilon) \cap B$, de donde $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ y como ε fue arbitrario, tenemos que $x \in \overline{B}$. Puesto que B es cerrado en X, se sigue que $x \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$. Análogamente, se prueba que $B \subset A$. Así, $A = B$.

Ahora supongamos que $A = B$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $\varepsilon \in E(A,B)$, pues siempre se cumple que $A \subset N(\epsilon, A)$. Así, $H(A,B) = 0$.

(e) Finalmente veamos que para cada $A, B, C \in 2^X$, tenemos que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.

Para esto, demostremos que $E(A,B) \uplus E(B,C) \subset E(A,C)$. Sea $\beta \in E(A,B) \uplus E(B,C)$, así, existen $\varepsilon \in E(A,B)$ y $\delta \in E(B,C)$ tales que $\beta = \varepsilon + \delta$. Luego, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\delta, C)$. Veamos que $A \subset N(\beta, C)$, si $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$. Luego, existe $z \in C$ tal que $d(y,z) < \delta$. Así, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon + \delta = \beta$. Por lo tanto, $A \subset N(\beta, C)$. Análogamente, se puede probar que $C \subset N(\beta, A)$. De esto, deducimos que $\beta \in E(A,C)$. Por lo tanto, $E(A,B) \uplus E(B,C) \subset E(A,C)$. De lo anterior, tenemos que $inf E(A,B) \uplus E(B,C) \geq inf E(A,C)$, es decir, $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$. $\square$

De acuerdo al teorema 1.2.11, para cada continuo X, tenemos que $(2^X, H)$ es un espacio métrico, H se conoce como la *métrica de Hausdorff*. Como $C(X)$ está contenido en 2^X, observemos que H también es una métrica para $C(X)$. La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno en el otro. Esta idea geométrica es buena pero tenemos que notar que, por ejemplo, si A es un disco en el plano, se pueden dar conjuntos finitos tan cercanos a A como se quiera, simplemente se toma una cuadrícula muy fina dentro del disco y se toma como conjunto finito al conjunto de los cruces de la cuadrícula.

Teorema 1.2.12. *Sean X un continuo, A, $B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y solo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$.

Existe $\delta' \in E(A,B)$ tal que $\delta' < \varepsilon$, $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$. Además, por el teorema 1.2.7, tenemos que $N(\delta', B) \subset N(\varepsilon, B)$ y $N(\delta', A) \subset N(\varepsilon, A)$. Por tanto, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Recíprocamente, supongamos que

$$A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A).$$

Así, por el teorema 1.2.8, tenemos que $A \subset \bigcup\{N(\delta, B) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$. Dado que A es compacto, existen números positivos, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $\delta_i < \varepsilon$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = máx\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Así, $\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$. De manera análoga a lo anterior, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \varepsilon$ y $B \subset N(\gamma, A)$. Sea $\beta = máx\{\alpha, \gamma\}$. Tenemos que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así, $\beta \in E(A,B)$. En consecuencia $H(A,B) \leq \beta < \varepsilon$. Por tanto, $H(A,B) < \varepsilon$. $\square$

Definición 1.2.13. *Sea A un subconjunto no vacío de un continuo X. El* ***diámetro*** *de A, denotado por diám(A), es*

$$diám(A) = sup\{d(a,b) : a, b \in A\}.$$

Teorema 1.2.14. *Sea X un continuo. La función diám $: 2^X \to [0, \infty)$ es una función continua.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, A, $B \in 2^X$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Si $H(A,B) < \delta$, por el teorema 1.2.12, tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Como A es compacto, existen a_1, $a_2 \in A$ tales que $diám(A) = d(a_1, a_2)$. Luego, existen b_1, $b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \delta$ y $d(a_2, b_2) < \delta$. Notemos que

$$diám(A) = d(a_1, a_2) \leq d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) + d(b_1, b_2)$$

$$< 2\delta + d(b_1, b_2) = \varepsilon + d(b_1, b_2) \leq \varepsilon + diám(B).$$

Por lo tanto,

$$diám(A) - diám(B) < \varepsilon. \tag{1.7}$$

De manera análoga a como se le hizo cuando A es compacto, como B es compacto,

$$diám(B) - diám(A) < \varepsilon.$$

Así,

$$-\varepsilon < diám(A) - diám(B). \tag{1.8}$$

Por (1.7) y (1.8), concluimos que

$$\mid diám(A) - diám(B) \mid < \varepsilon.$$

Por tanto, la función *diám* es uniformemente continua, y así, continua. $\square$

Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, por $\mathbf{B}(\varepsilon, A)$ entendemos *la bola abierta en* 2^X con centro en A y de radio ε, es decir,

$$\mathbf{B}(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X : H(A,B) < \varepsilon\}.$$

Definición 1.2.15. *Dado un continuo X, sea $D : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, la función definida, para cada A, $B \in 2^X$, por $D(A,B) = \text{máx}\{sup\{d(a,B) : a \in A\}, sup\{d(A,b) : b \in B\}\}$.*

Teorema 1.2.16. *Sea X un continuo. Si A,B $\in 2^X$, entonces $D(A,B) = H(A,B)$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $r = H(A,B) + \varepsilon$, se sigue que $H(A,B) < r$. Luego, por el teorema 1.2.12, tenemos que $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Así, para cada $a \in A$, existe un $b \in B$ tal que $d(a,b) < r$. De esta forma, para cada $a \in A$, deducimos que $d(a,B) < r$. De modo que $sup\{d(a,B) : a \in A\} < r$. De manera análoga a lo anterior, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, se sigue que

$sup\{d(b,A) : b \in B\} < r$. Por lo tanto, $D(A,B) \leq r$, es decir, $D(A,B) \leq H(A,B) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, inferimos que $D(A,B) \leq H(A,B)$.

Veamos que $H(A,B) \leq D(A,B)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $r = D(A,B)+\varepsilon$. Probemos que $A \subset N(r,B)$. Tomemos $a_1 \in A$, así, $d(a_1,B) \leq sup\{d(a,B) : a \in A\}$. Como $sup\{d(a,B) : a \in A\} \leq D(A,B)$, se sigue que $d(a_1,B) \leq D(A,B)$. Así, $d(a_1,B) < r$. De manera que $a_1 \in N(r,B)$. Por lo tanto, $A \subset N(r,B)$, análogamente, se prueba que $B \subset N(r,A)$. Luego, por el teorema 1.2.12, tenemos que $H(A,B) < r$, es decir, $H(A,B) < D(A,B)+\varepsilon$. Dado que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, inferimos que $H(A,B) \leq D(A,B)$. Por lo tanto, $H(A,B) = D(A,B)$. $\square$

Por el teorema 1.2.11, concluimos que D es una métrica para el hiperespacio 2^X, que coincide con la métrica de Hausdorff. De manera que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ pueden ser considerados con cualquiera de estas dos métricas, según nos convenga.

Definición 1.2.17. *Dado un subconjunto A de un continuo X, definimos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X.*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$2^X_A = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Definición 1.2.18. *Dado X un continuo, consideremos los conjuntos $2^X_A = \{B \in 2^X : A \subset B\}$ y $C_A(X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Los subconjuntos 2^X_A y $C_A(X)$ son llamados los* ***hiperespacios de contención*** *para A en 2^X y $C(X)$, respectivamente.*

Teorema 1.2.19. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Se tiene lo siguiente.*

1. *Si A es un abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.*

2. *Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y 2^X_A son cerrados en 2^X.*

Demostración. 1. Sea A un abierto en X. Veamos que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X. Para esto, sea $B \in \Gamma(A)$, luego, $B \in 2^X$ y $B \subset A$. Como A es abierto en X, por el teorema 1.2.6, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon,B) \subset A$. Veamos que $\mathbf{B}(\varepsilon,B) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(\varepsilon,B)$, se sigue que $H(B,C) < \varepsilon$. Por el teorema 1.2.12, tenemos que $C \subset N(\varepsilon,B)$ y como $N(\varepsilon,B) \subset A$, se sigue que $C \subset A$. Así, $C \in \Gamma(A)$. Luego, $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Con todo esto, para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Ahora, demostremos que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Lambda(A)$, luego, $B \in 2^X$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap A$. Como A es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, x) \subset A$. Probemos que $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(\varepsilon, B)$, luego, $H(B, C) < \varepsilon$, por el teorema 1.2.12, inferimos que $B \subset N(\varepsilon, C)$. Como $x \in B$, existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, $y \in B(\varepsilon, x)$. Así, $y \in A$, luego, $y \in C \cap A$, de manera que $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$. Así, $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Esto prueba que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X.

2. Sea A un cerrado en X, así, $X - A$ es un abierto en X. Además notemos que $\Gamma(A) = 2^X - \Lambda(X - A)$ y $\Lambda(X - A)$ es un abierto en 2^X, por *1* de éste teorema, así, tenemos que $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.

Por otro lado, si A es cerrado en X, entonces $X - A$ es abierto en X. Por *1* de este teorema, se sigue que $\Gamma(X - A)$ es abierto en 2^X, así, $2^X - \Gamma(X - A)$ es cerrado en 2^X. Notemos que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X - A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X - A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.

Ahora, veamos que 2^X_A es cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{2^X_A}$ y supongamos que $B \notin 2^X_A$. Así, $A \not\subset B$. Sea $a \in A - B$. Notemos que $d(a, B) > 0$. Sea $\varepsilon = d(a, B)$. Como $B \in \overline{2^X_A}$, tenemos que $2^X_A \cap \mathbf{B}(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in 2^X_A$ tal que $H(B, E) < \varepsilon$. Por el teorema 1.2.12, se sigue que $E \subset N(\varepsilon, B)$. Como $a \in A$ y $E \in 2^X_A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Como $d(a, B) \leq d(a, b)$, tenemos que $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $B \in 2^X_A$. Así, $\overline{2^X_A} \subset 2^X_A$. En consecuencia, hemos demostrado que 2^X_A es cerrado en 2^X. □

En esta sección vemos que todos los hiperespacios de un continuo los podemos considerar ya sea con la topología inducida por la métrica de Hausdorff o con la topología de Vietoris, la cual desarrollamos a continuación.

Definición 1.2.20. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. El **vietórico** de U_1, $U_2, \ldots, U_n$, denotado por $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, es el conjunto*

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ y\ A \cap U_i \neq \emptyset,\ para\ cada\ i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Teorema 1.2.21. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right]$,

2. para cada $A \subset X$*, tenemos que* $\Gamma(A) = \langle A\rangle$,

3. para cada $A \subset X$*, tenemos que* $\Lambda(A) = \langle X, A\rangle$.

Demostración. Para ver que se cumple *1*, notemos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle =$$

$$\left\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right\} \cap \left\{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}$$

$$= \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Por lo tanto, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right]$.

Para ver que se cumple *2*, solo recordemos que $\Gamma(A) = \left\{B \in 2^X : B \subset A\right\}$, así, si $B \in \Gamma(A)$ entonces tenemos que $B \subset A$ y $B \cap A = B \neq \emptyset$, por lo tanto $B \in \langle A\rangle$.

Ahora si $C \in \langle A\rangle$ entonces tenemos, en particular, que $C \subset A$ y por lo tanto $C \in \Gamma(A)$.

Para *3*, observemos que

$$\langle X, A\rangle = \left\{C \in 2^X : C \subset (X \cup A), C \cap X \neq \emptyset \text{ y } C \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

Entonces si $C \in \langle X, A\rangle$ se tiene que $C \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $C \in \Lambda(A)$.

Ahora si $B \in \Lambda(A)$, tenemos que $B \cap A \neq \emptyset$, además $B \subset X = X \cup A$ y $B \cap X = B \neq \emptyset$, por lo tanto $C \in \langle X, A\rangle$. □

Teorema 1.2.22. *Sean* m*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *y* $V_1, V_2, \ldots, V_m$ *subconjuntos no vacíos de un continuo* X*. Si* $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ *y* $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$*, entonces*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle =$$

$$\langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Demostración. Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$

$$= \Gamma(U) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right] \cap \Gamma(V) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{m} \Lambda(V_i)\right].$$

Así, $A \subset U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U)$

$$= \left[U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\right)\right] \cup \left[V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)\right]$$

$$= \left[\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)\right].$$

Por otro lado, como $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A \subset V$, tenemos que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. También para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se puede probar de manera análoga a lo anterior que $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$. De manera que

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Por lo tanto, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \subset \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle$.

Para probar la otra contención, sea

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Entonces, $A \subset U \cap V$. Es decir, $A \subset U$ y $A \subset V$. Así, $A \in \Gamma(U)$ y $A \in \Gamma(V)$. Por otra parte, como $A \cap (U \cap V_i) = A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos que $A \in \Lambda(V_i)$. Así, de manera análoga se puede ver que $A \in \Lambda(U_i)$. Por lo tanto, $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$. $\square$

Teorema 1.2.23. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, entonces existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que*

$$A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $a \in U_i$, ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Luego, como X es regular, existe un abierto V_a en X tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U_i$.

Así, $A \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $b_i \in A \cap U_i$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea W_i abierto en X tal que $b_i \in W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean

$$J_i = \{k \in \{1, 2, \ldots, m\} : \overline{V_{a_k}} \subset U_i\} \text{ y } V_i = W_i \cup \left(\bigcup_{k \in J_i} V_{x_k}\right).$$

Tenemos que para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, V_i es abierto en X, con $\overline{V_i} \subset U_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$.

Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Así, $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$, además

$$\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle.$$

Por tanto, existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que

$$A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

El siguiente resultado dota de una topología al hiperespacio 2^X de un continuo X dado.

Teorema 1.2.24. *Si X es un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle : U_1, U_2, ..., U_n$ son abiertos en X y $n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Demostración. Primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$. Notemos que $\langle X \rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$. Así, $2^X \in \mathcal{B}$. De manera que $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$, luego, $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.

La demostración de la segunda condición, es decir, que para cada $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}$ con $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, se tiene del teorema 1.2.22. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para una topología de 2^X. □

La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V es conocida como la *Topología de Vietoris.*

Teorema 1.2.25. *Sea X un continuo. El conjunto $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U$ es abierto en $X\} \cup \{\Lambda(U) : U$ es abierto en $X\}$ es una subbase para la Topología de Vietoris.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{S}' = \left\{ \bigcap \mathcal{W} : \mathcal{W} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{S} \right\}.$$

Para ver que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris, basta probar que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Luego, sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en X tales que $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y sea $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Notemos que por el teorema 1.2.21, tenemos que $\mathcal{U} = \Gamma(U) \cap \Lambda(U_1) \cap \cdots \cap \Lambda(U_n)$. Es decir, $\mathcal{U}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$. Así, $\mathcal{U} \in \mathcal{S}'$. De manera que $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}'$.

Por otra parte, veamos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Para esto, sea $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$, luego, $\mathcal{V} = \Gamma(U)$ o $\mathcal{V} = \Lambda(U)$, para algún U abierto en X, es decir, $\mathcal{V} = \langle U \rangle$ o $\mathcal{V} = \langle X, U \rangle$, de cualquier forma $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$. Esto prueba que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Además, por el teorema 1.2.22, sabemos que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, de manera que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$. Lo que demuestra que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris. $\square$

Teorema 1.2.26. *Sea X un continuo. La Topología de Vietoris, τ_V, y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, τ_H, en 2^X son iguales.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} \in \tau_V$ y $A \in \mathcal{U}$. Por el teorema 1.2.24, tenemos que $\mathcal{B}$ es una base de τ_V. Así, existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X tales que $A \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Luego, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ es abierto en X. Por el teorema 1.2.19, se sigue que $\Gamma\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \in \tau_H$ y $\Lambda(U_i) \in \tau_H$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así,

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right] \in \tau_H.$$

Por el teorema 1.2.21, inciso 1, tenemos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Luego, $\mathcal{U} \in \tau_H$. De manera que $\tau_V \subset \tau_H$.

Ahora, sean $\mathcal{V} \in \tau_H$ y $A \in \mathcal{V}$. Probemos que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Recordemos que una base para τ_H está dada por $\gamma_H = \{\mathbf{B}(\delta, C) : C \in 2^X \ y \ \delta > 0\}$. De manera que existen $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \in \mathbf{B}(\varepsilon, F) \subset \mathcal{V}$.

Por otro lado, observemos que la colección $\left\{B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b\right) : b \in F\right\}$ es una cubierta abierta para F. Como F es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_i\right)$.

Sea $U_i = B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_i\right)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos

$$\mathcal{W} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right]$$

(por el teorema 1.2.21, inciso 1). Notemos que $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$.

Ahora, probemos que $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}(\varepsilon, F)$. Sea $D \in \mathcal{W}$, luego,

$$D \in \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Así, $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Afirmamos que

$$D \subset N(\varepsilon, F). \tag{1.9}$$

En efecto, si $e \in D$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $e \in U_j = B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_j\right)$. Así, $d(e, b_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, además $b_j \in F$. En resumen, para cada $e \in D$, existe $b_j \in F$ tal que $d(e, b_j) < \varepsilon$. De manera que $D \subset N(\varepsilon, F)$.

Veamos que

$$F \subset N(\varepsilon, D). \tag{1.10}$$

Si $b \in F$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b \in U_k = B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_k\right)$. Así, $d(b, b_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $D \cap B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_k\right) \neq \emptyset$, se sigue que existe $z \in D \cap B\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_k\right)$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $d(b, z) \leq d(b, b_k) + d(b_k, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, $d(b, z) < \varepsilon$. Por lo tanto, para cada $b \in F$, existe $z \in D$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. En consecuencia, $F \subset B(\varepsilon, D)$.

De (1.9), (1.10) y por el teorema 1.2.12, implicamos que

$$H(F, D) < \varepsilon.$$

Así, $D \in \mathbf{B}(\varepsilon, F)$. Por lo tanto, $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}(\varepsilon, F)$. Dado que

$$\mathbf{B}(\varepsilon, F) \subset \mathcal{V},$$

deducimos que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

En resumen, para cada $\mathcal{V} \in \tau_H$ tal que $A \in \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Esto demuestra que $\tau_H \subset \tau_V$. Por tanto, $\tau_H = \tau_V$. $\square$

Dado un continuo X, el hiperespacio 2^X junto con la métrica de Hausdorff resulta ser un espacio métrico, por lo cual podemos hablar de convergencia de sucesiones. De forma natural tenemos que si $\{A_n\}$ es una sucesión en 2^X, decimos que $\{A_n\}$ converge a un elemento $A \in 2^X$ y se denota por $A_n \to A$ si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que para cada natural $n \geq N$, se cumple que $H(A_n, A) < \varepsilon$.

Ahora, dado que los elementos de 2^X son subconjuntos de X, se puede hablar de convergencia en términos de conjuntos. A continuación presentamos los conceptos básicos referentes a este tipo de convergencia.

Definición 1.2.27. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el* **límite inferior** *y el* **límite superior** *de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ como*

$$\begin{aligned}\liminf A_n = \{&x \in X : \textit{ si } x \in U, \textit{ con } U \textit{ un abierto en } X,\\ &\textit{entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para todo natural } n \textit{ salvo un número finito.}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\limsup A_n = \{&x \in X : \textit{ si } x \in U, \textit{ con } U \textit{ un abierto en } X,\\ &\textit{entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para un número infinito de naturales } n.\}\end{aligned}$$

Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, con $A \subset X$ entonces decimos que el límite de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es A o que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A y lo denotamos por $\lim A_n = A$.

Los siguientes teoremas nos muestran algunas propiedades que el límite inferior y el límite superior cumplen.

Teorema 1.2.28. *[13, Teorema 1.24] Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X, donde X es un espacio métrico y compacto. Entonces:*

1. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;
2. $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son subconjuntos cerrados de* X;
3. $\limsup A_n \neq \emptyset$;

4. *si los* A_n *son subconjuntos conexos de* X*, para toda* n *y* $\liminf A_n \neq \emptyset$*, entonces* $\limsup A_n$ *es conexo;*

5. $\lim A_n = A$ *si y solo si* $\limsup A_n \subset A \subset \liminf A_n$.

Teorema 1.2.29. *[13, Teorema 1.25] Sea* X *un continuo y* $A, B \in 2^X$*. Supongamos que* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son dos sucesiones en* 2^X *tales que* $\lim A_n = A$ *y* $\lim B_n = B$*. Entonces:*

1. *si* $A_n \subset B_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $A \subset B$*;*

2. *si* $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $A \cap B \neq \emptyset$*;*

3. $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

A continuación presentamos un resultado que nos permitirá manejar la convergencia de sucesiones en 2^X empleando sucesiones en X.

Teorema 1.2.30. *[1, Teorema 1.5] Supongamos que* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* 2^X*. Entonces:*

1. $x \in \liminf A_n$ *si y solo si, existe una sucesión* $\{x_n\}$ *en* X *tal que* $x_n \in A_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x_n \to x$*,*

2. $x \in \limsup A_n$ *si y solo si, existe una sucesión de números naturales* $n_1 < n_2 < \cdots$ *y puntos* $x_{n_k} \in A_{n_k}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*, tales que* $x_{n_k} \to x$*.*

Para terminar esta sección enunciamos un resultado que nos permitirá manejar los dos tipos de convergencia en 2^X, es decir, la convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff y la convergencia en términos de $\liminf$ y $\limsup$.

Teorema 1.2.31. *[21, Teorema 0.7] Sea* X *un continuo y* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* 2^X*. Si la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge en el sentido de la Definición 1.2.27, entonces* $A \in 2^X$ *y la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge con respecto a la métrica de Hausdorff a* A*. Conversamente, si la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge con respecto a la métrica de Hausdorff a* $A \in 2^X$*, entonces la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* A *en el sentido de la Definición 1.2.27.*

Capítulo 2

Continuos localmente conexos

Los continuos localmente conexos son también llamados Continuos de Peano, en honor a Giuseppe Peano, quien en 1890 dio el primer ejemplo de curvas que *llenan* el espacio, es decir, mostró función continua y suprayectiva del intervalo unitario $[0,1]$ en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

2.1. Resultados Generales

Comenzamos con la noción de conexidad local, para esto es indispensable recordar la noción de vecindad

Definición 2.1.1. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Un subconjunto V de X es una* ***vecindad*** *de p si existe un conjunto abierto U en X tal que $p \in U \subset V$.*

Definición 2.1.2. *Un espacio métrico X es* ***localmente conexo en un punto*** *$x \in X$ si para cada vecindad N de x existe un conjunto abierto conexo V tal que $x \in V \subset N$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, X es un* ***localmente conexo****.*

Observación 2.1.3. La definición anterior es equivalente a decir que existe una base de vecindades en cada punto que consiste de conjuntos abiertos conexos.
En efecto. Si $\mathcal{V}(x)$ representa el conjunto de todas las vecindades del punto x tenemos que para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe un conjunto abierto y conexo U_V tal

que $x \in U_V \subset V$, así el conjunto $\{U_V : V \in \mathcal{V}(x)\}$ es una base de vecindades para el punto x.

Las componentes de los espacios topológicos son cerrados y las componentes de los subconjuntos cerrados son cerrados, sin embargo, una versión de esto último para abiertos en lugar de cerrados no pasa en general. Una caracterización de los espacios localmente conexo en términos de las componentes de los conjuntos abiertos, nos la da el siguiente resultado.

Teorema 2.1.4. *Un espacio métrico X es un espacio localmente conexo si y solo si para cada abierto U y cada componente C de U, se tiene que C es abierto.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio localmente conexo. Sean U un abierto y C una componente de U. Sea $x \in C$. Veamos que C es abierto. Como $x \in U$, existe un abierto V tal que V es conexo y $x \in V \subset U$. Luego, $x \in V \subset C$, es decir, C es abierto.
Recíprocamente, supongamos que cada componente de un conjunto abierto en X es un abierto en X. Sean $x \in X$ y N una vecindad de x. Como N es una vecindad, existe un abierto U en X tal que $x \in U$. Sea V la componente de U que contiene a x. Por hipótesis V es abierto, además, V es conexo y $x \in V \subset U \subset N$, por lo tanto X es localmente conexo en x. Como x es arbitrario, X es un espacio localmente conexo. $\square$

En particular, según este último teorema, las componentes de los espacios localmente conexo son conjuntos abiertos.

Ejemplo 2.1.5. *Para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$* y *para cada $k \in \mathbb{N} - \{1, 2, ...n-1\}$, denotamos por $L_{n,k}$ al segmento de recta en el plano que une al punto $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{k}\right)$ con el punto $\left(\frac{1}{n-1}, 0\right)$. Ahora, para cada $n \geq 2$, sean*

$$S_n = \bigcup_{k \geq n}^{\infty} L_{n,k} \quad y \quad L_0 = [0,1] \times \{0\}.$$

y *así,*

$$X = \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} S_n\right) \bigcup L_0.$$

se tiene que X es un continuo tal que para el abierto $X - \{(1,0)\}$ no existe V abierto y conexo tal que $p_0 \in V \subset X - \{(1,0)\}$, donde $p_0 = (0,0)$. Así, el continuo X no es localmente conexo en p_0. Sin embargo, para cualquier abierto U con $p_0 \in U$ existe un subcontinuo H tal que $p_0 \in H^\circ \subset H \subset U$.Es decir, existe una vecindad conexa G de p_0 tal que $p_0 \in G \subset U$.

Existen dos formas naturales de conexidad local: Sea X un espacio topológico y $p \in X$; X es *localmente conexo* en p si p posee una base de vecindades formada por vecindades abiertas conexas (Observación 2.1.3); X es *conexo en pequeño (cik) en* p si p posee una base de vecindades formada por vecindades conexas (esto es, conjuntos conexos que contienen a p en sus interiores en X). Es cierto que si X es localmente conexo en p, entonces X es *cik* en p. Sin embargo, el inverso es falso aun para continuos. Sin embargo, si un espacio topológico es *cik* en *todo* punto, entonces es localmente conexo en todos sus puntos. Lo anterior queda formalizado en la Definición 2.1.6 y en el teorema 2.1.7.

Definición 2.1.6. *Un espacio métrico X es* ***conexo en pequeño en un punto*** *$x \in X$ si para cada vecindad N de x existe una vecindad conexa G de x tal que $x \in G^\circ \subset G \subset N$. Si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, se dice que X es* ***conexo en pequeño****.*

Teorema 2.1.7. *Un espacio métrico X es localmente conexo si y solo si X es conexo en pequeño.*

Demostración. Sea X un espacio métrico que es un espacio localmente conexo. De las definiciones se sigue que X es conexo en pequeño en cada punto $x \in X$.
Recíprocamente, supongamos que X es conexo en pequeño. Basta demostrar que cada componente de cualquier abierto es un abierto en X (vea el teorema 2.1.4). Sean U un abierto y C una componente de U. Sea $x \in C$. Veamos que C es abierto. Como $x \in U$, existe una vecindad conexa V tal que $x \in V^\circ \subset V \subset U$, luego $x \in V^\circ \subset C$, es decir C es abierto. □

Al hablar de una familia de espacios localmente conexo, cabe preguntarse,

$$\text{¿es su producto un espacio localmente conexo?} \tag{2.1}$$

Se tiene, por ejemplo; para cada $n \in \mathbb{N}$, si $X_n = \{0, 1\}$ tiene la topología discreta entonces X_n es un espacio localmente conexo (y no es conexo). Luego, la familia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ consiste de espacios localmente conexos y el producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es totalmente disconexo (las componentes son puntos que no son abiertos en la topología producto) y así, no es localmente conexo. A continuación un teorema que dice, bajo qué condición se puede resolver la pregunta (2.1).

Teorema 2.1.8. *Sea* $\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ *una familia de espacios topológicos. Entonces* $\prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$ *es un espacio localmente conexo si y solo si para cada* $\gamma \in \Lambda$, X_γ *es un espacio localmente conexo y todos los* X_γ *son conexos, excepto un número finito de ellos.*

Demostración. Supongamos que $X = \prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$ es localmente conexo y sean $\alpha \in \Lambda$ y U_α un conjunto abierto en X_α tal que $x_\alpha \in U_\alpha \subset X_\alpha$. Elijamos un punto $x \in X$ tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$. Entonces $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto en X que contiene a x.
Partiendo de que X es localmente conexo, existe V abierto y conexo tal que $x \in V \subset \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$.
Notemos que $\pi_\alpha(V)$ es un subconjunto abierto conexo que contiene x_α y contenido en U_α. Se tiene que $\pi_\beta(V) = X_\beta$ para cada $\beta \in \Lambda$ excepto para un número finito de β en Λ. Así, todos los X_α son conexos, excepto un número finito.
Recíprocamente, supongamos que cada X_α es localmente conexo y que cada X_α es conexo excepto un numero finito de ellos. Sea

$$K = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$$

un subconjunto finito de Λ tal que si $\alpha \in \Lambda - K$ entonces X_α es conexo.
Sea $x \in \prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$ y V una vecindad cualquiera de x en $\prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$. Entonces existe un abierto básico $B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(A_k)$ contenido en V, en donde A_i es un subconjunto abierto de X_{α_i} que contiene a $\pi_{\alpha_i}(x) = x_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Como para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, X_{α_i} es un espacio localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo B_i tal que $x_{\alpha_i} \in B_i \subset A_i$.
Ahora, para cada $\alpha \in \{\beta_1, ..., \beta_m\} - \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} = L$ tomamos un abierto conexo cualquiera C_α del punto $\pi_\alpha(x)$.
Resulta que el conjunto

$$\left(\bigcap_{\alpha \in L} \pi_\alpha^{-1}(C_\alpha)\right) \cap \pi_{\alpha_1}^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(B_k)$$

es un conjunto abierto y conexo que contiene a x y está contenido en V.
Por lo tanto $\prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$ es localmente conexo. $\square$

Teorema 2.1.9. *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es un espacio localmente conexo y $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y cerrada entonces Y es un espacio localmente conexo.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, con X un espacio localmente conexo y $f : X \to Y$ una función suprayectiva, continua y cerrada. Veamos que Y es localmente conexo.
Sea $y \in Y$ y U un abierto en Y tal que $y \in U$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, también como f es continua se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto en X y además $x \in f^{-1}(U)$. Como X es localmente conexo, existe V abierto en X y conexo tal que $x \in V \subset f^{-1}(U)$, entonces $y \in f(V) \subset f(f^{-1}(U))$. Como f es suprayectiva se cumple que $f(f^{-1}(U)) = U$.
Por otro lado, $f(V)$ es un abierto en Y, pues f es cerrada y por lo tanto abierta, y $f(V)$ es conexo ya que f es continua. Así, para cada $y \in Y$ y cada abierto U que lo contiene, existe un conjunto abierto y conexo V en Y tal que $y \in V \subset U$. Por lo tanto, Y es localmente conexo en cada uno de sus puntos y así es localmente conexo. □

Observación 2.1.10. *En particular, según el teorema 2.1.9, la propiedad de ser un espacio localmente conexo es una propiedad topológica.*

Definición 2.1.11. *Un* ***continuo localmente conexo*** *es un espacio localmente conexo que a su vez es un continuo.*

El siguiente teorema nos da un caracterización de los continuos localmente conexos.

Teorema 2.1.12. *Un continuo X es localmente conexo en $x \in X$ si y solo si para cada abierto U con $x \in U$, existe un subcontinuo H de X, tal que H° es conexo* y *$x \in H^\circ \subset H \subset U$.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo en x. Sea U un abierto con $x \in U$. Por la normalidad de X, existe un W abierto tal que $x \in W \subset \overline{W} \subset U$. Aplicando la definición de conexidad local para $x \in W$, tenemos que existe una vecindad abierta conexa V de X tal que $x \in V \subset W$. Sea $H = \overline{V}$, así H es un subcontinuo de X y como $x \in V \subset H$, resulta que $x \in H^\circ$. Además $\overline{V} \subset \overline{W}$ $(\subset U)$, por lo tanto, $H \subset U$. Finalmente, como V es conexo y $V \subset H^\circ \subset \overline{V}$, por [11, Teorema 1.6], se tiene que H° es conexo.
Recíprocamente supongamos que se satisfacen nuestras hipótesis. Sea N una

vecindad de x. Como N es una vecindad, existe un abierto U tal que $x \in U$. Por hipótesis existe un subcontinuo propio H de X tal que $x \in H^\circ \subset H \subset U \subset N$, donde H° es conexo en X. Sea $V = H^\circ$. Así, V es una vecindad abierta conexa tal que $x \in V \subset N$. Por lo tanto, X es localmente conexo en x. $\square$

Observación 2.1.13. *Por los teoremas 2.1.8* y *2.1.9, el cubo de Hilbert, I^∞ es un continuo localmente conexo.*

Ahora demostraremos que las funciones continuas entre continuos son cerradas.

Teorema 2.1.14. *Si X y Y son continuos y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos. Veamos que f es una función cerrada. Para esto, sea E un subconjunto cerrado de X, luego E es un subconjunto compacto de X. Como f es una función continua, por [15, Teorema 1, pág. 164], se tiene que $f(E)$ es un subconjunto compacto de Y. Como Y es un espacio métrico por [15, Corolario 1, pág. 92], se tiene que $f(E)$ es un subconjunto cerrado de Y. $\square$

Corolario 2.1.15. *Si X y Y son continuos y $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el teorema 2.1.14, f es cerrada, lo que equivale a que f^{-1} es continua. Por lo tanto f es un homeomorfismo. $\square$

Corolario 2.1.16. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es un continuo localmente conexo, entonces Y es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Es consecuencia de los teoremas 2.1.9 y 2.1.14. $\square$

2.2. Propiedad $\mathcal{S}$

En esta sección se ve que cualquier continuo localmente conexo se puede expresar como la unión finita de subcontinuos localmente conexos. Este análisis se basa, principalmente, en la noción siguiente.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio métrico. Un subconjunto B no vacío de X tiene la* **propiedad $\mathcal{S}$** *si para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $\{A_1, ..., A_n\}$ subconjuntos conexos de B de diámetro menor que ε tales que $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.*

Como una observación inmediata, la propiedad $\mathcal{S}$ no es una propiedad topológica. Por ejemplo, el intervalo abierto $(0, 1)$ tiene la propiedad $\mathcal{S}$ y el espacio $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad $\mathcal{S}$.

En el teorema 2.2.3, vemos que, para espacios métricos compactos no vacíos, el tener la propiedad $\mathcal{S}$ es equivalente a ser un espacio localmente conexo, en general, los espacios métricos que tienen la propiedad $\mathcal{S}$ son espacios localmente conexo, como se muestra a continuación.

Teorema 2.2.2. *Un espacio métrico X que tiene la propiedad $\mathcal{S}$ es un espacio localmente conexo.*

Demostración. Basta demostrar que X es conexo en pequeño (vea el teorema 2.1.7).
Sea $p \in X$ y N una vecindad de p. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \subset N$. Como X tiene la propiedad $\mathcal{S}$, existen $A_1, ..., A_n$ subconjuntos conexos de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que *diám* $(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Sea

$$G = \bigcup \left\{ A_i : p \in \overline{A_i} \right\}.$$

Veamos que G es conexo. Supongamos, por el contrario, que G no es conexo. Así, existe una separación (S, T) tal que S y T son no vacíos, abiertos en X, ajenos y $G = S \cup T$. Como $p \in X$, existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $p \in A_k \subset \overline{A_k}$. Luego, $A_k \subset G$. Supongamos, sin perder generalidad, que $A_k \subset S$. Como $T \neq \emptyset$, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $A_j \subset T$. Notemos que $p \in \overline{A_j}$. Luego, existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en A_j tal que $x_m \to p$. De aquí, $p \in \overline{T}$. Pero como $p \in S$, se cumple que $\overline{T} \cap S \neq \emptyset$ lo que niega nuestra hipótesis, por lo tanto G es conexo.
Ahora veamos que $p \in G^{\circ}$. Para esto, supongamos lo contrario, que $p \in X - G^{\circ} = \overline{X - G}$. Así, existe una sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $X - G$ tal que $y_m \to p$. Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, el punto y_m cumple que

$$y_m \notin G. \tag{2.2}$$

Por otro lado, como la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ está en $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, existe una subsucesión $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de A_{k_0}, para algún $k_0 \in \{1, ..., n\}$. Como $y_{m_k} \to p$, el

punto $p \in \overline{A_{k_0}}$ y, por lo tanto, $A_{k_0} \subset G$. Luego, $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ esta contenida en $A_{k_0} \subset G$, esto contradice a (2.2). Por lo tanto, $p \in G^\circ$.
Finalmente, veamos que $G \subset N$. Para esto, sea $g \in G$. Notemos que $g \in A_i$ para algún A_i con $p \in \overline{A_i}$. Además $d\left(g,p\right) \leq diám\left(A_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Con esto, obtenemos $G \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(p\right)$.
En resumen, $p \in G^\circ \subset G \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(p\right) \subset N$ y G es una vecindad conexa de N que contiene a p. Como p es arbitrario, tenemos que X es conexo en pequeño y por lo tanto es localmente conexo. □

En el siguiente resultado, vemos que, para espacios métricos compactos la propiedad $\mathcal{S}$ es equivalente a ser un espacio localmente conexo.

Teorema 2.2.3. *Un espacio métrico compacto no vacío X es un espacio localmente conexo si y solo si tiene la propiedad $\mathcal{S}$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio localmente conexo. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, por la Definición 2.1.2, existe V_x subconjunto abierto en X tal que V_x es conexo y $x \in V_x \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(x\right)$. La colección $\mathcal{L} = \{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta para X. Por la compacidad de X existe una colección finita $V_{x_1}, ..., V_{x_n}$ de $\mathcal{L}$ tales que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$ con $diám\left(V_{x_i}\right) < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, por lo tanto se cumple la Definición 2.2.1.
La reciproca se obtiene aplicando el teorema 2.2.2. □

Teorema 2.2.4. *Sea X un espacio métrico. Si Y es un subconjunto de X que tiene la propiedad $\mathcal{S}$ y Z es un subconjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}_X$, entonces Z tiene la propiedad $\mathcal{S}$ y de aquí, Z es un espacio localmente conexo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico, Y un subconjunto de X que tiene la propiedad $\mathcal{S}$ y Z un subconjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}_X$. Sea $\varepsilon > 0$. Como Y tiene la propiedad $\mathcal{S}$, existen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos conexos de Y tales que $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ y para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $diám\left(A_i\right) < \varepsilon$.
Ahora para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $B_i = \overline{(A_i)}_Z$. Por [11, Teorema 1.6, pág. 109], cada B_i es conexo.
Por otro lado, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que

$$B_i = \overline{(A_i)}_Z = \overline{(A_i)}_X \cap Z \subset Z.$$

Luego $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \subset Z$. Notemos que

$$\overline{(Y)}_Z = \overline{(\bigcup_{i=1}^n A_i)}_Z = \bigcup_{i=1}^n \overline{(A_i)}_Z = \bigcup_{i=1}^n B_i,$$

y como por hipótesis $Z \subset \overline{Y}_X$, tenemos que

$$Z \subset \overline{Y}_X \cap Z = \overline{Y}_Z = \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Así, $Z = \bigcup\limits_{i=1}^n B_i$.
Ahora para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$B_i = \overline{(A_i)}_Z = \overline{(A_i)}_X \cap Z \subset \overline{(A_i)}_X.$$

Luego,

$$diám\,(B_i) \leq diám\overline{(A_i)}_X = (A_i)_X < \varepsilon.$$

Así, $Z = \bigcup\limits_{i=1}^n B_i$, y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que B_i es conexo y $diám\,(B_i) < \varepsilon$. Por lo tanto Z tiene la propiedad S, y por el teorema 2.2.2, Z es un espacio localmente conexo. $\square$

Definición 2.2.5. *Una **cadena simple o débil** es una colección finita numerada de subconjuntos de un espacio topológico, no vacía,*

$$\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$$

tal que, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, se tiene que $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$.
*Si $\mathcal{L}$ es una cadena débil, se dice que $\mathcal{L}$ es una **cadena débil de** L_1 **a** L_n, y si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, se dice que $\mathcal{L}$ es una **cadena débil de** x **a** y. A cada elemento L_i se le llama **eslabón** de $\mathcal{L}$.*

Una propiedad importante de las cadenas simples se enuncia a continuación, la cual se cumple incluso para espacios que solo son conexos.

Teorema 2.2.6. *[5, Teorema 2.F.2] Sean X un espacio topológico conexo y $x, y \in X$ dos puntos cualesquiera. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de conjuntos abiertos tales que $\bigcup \mathcal{U} = X$, entonces existe una cadena simple, cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{U}$, que conectan a x con y.*

Definición 2.2.7. *Sean X un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Una **$S(\varepsilon)$-cadena** es una cadena débil (vea la Definición 2.2.5) que además, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, cumple lo que sigue:*

$$(1)\ L_i \text{ es conexo} \quad \text{y} \quad (2)\ diám\,(L_i) < \tfrac{\varepsilon}{2^i}.$$

Si $a \in L_1$ *y* $b \in L_n$*, se dice que* $\mathcal{L}$ *es una* $S(\varepsilon)$***-cadena de a*** **a b***.*
Dado un subconjunto A *de* X*, el conjunto* $S(A, \varepsilon)$ *está definido como*

$$S(A, \varepsilon) = \{y \in X: \text{ existe una } S(\varepsilon)\text{-cadena de algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

En seguida, algunas propiedades importantes de los conjuntos $S(A, \varepsilon)$ se dan en los teoremas 2.2.8 y 2.2.9; dichos conjuntos proporcionan subconjuntos abiertos conexos «pequeños» con la propiedad $\mathcal{S}$ en cualquier espacio métrico con la propiedad $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.8. *Sea* (X, d) *un espacio métrico con la propiedad* $\mathcal{S}$*. Si* A *es un subconjunto no vacío de* X *y* $\varepsilon > 0$*, entonces el conjunto* $S(A, \varepsilon)$ *tiene la propiedad* $\mathcal{S}$*.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d) con la propiedad $\mathcal{S}$ y $\varepsilon > 0$. Fijemos un $\delta > 0$. Veamos que existen subconjuntos conexos $B_1, ..., B_n$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$S(A, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \tag{2.3}$$

y *diám* $(B_i) < \delta$ (vea la Definición 2.2.1).
Para esto, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4} \tag{2.4}$$

y sea

$$\begin{aligned} K = \{&y \in S(A, \varepsilon) : \text{existe una } S(\varepsilon)\text{-cadena con a} \\ &\text{lo más } k \text{ eslabones de algún punto de } A \text{ a } y\}. \end{aligned}$$

Por la definición 2.2.1, existe una colección finita de subconjuntos conexos que cubren a X y tales que tienen el diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
Sean $E_1, ..., E_n$ los miembros de esta colección que intersectan a K. Notemos que, si ningún miembro de la cubierta de X intersecta a $K(\subset X)$, se sigue que $K = \emptyset$; y como $A \subset K$, se tiene que $A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Observemos, por la misma definición de los E_i, que K cumple, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, con las condiciones siguientes.

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \tag{2.5}$$

$$E_i \cap K \neq \emptyset, \tag{2.6}$$

$$E_i \text{ es conexo} \tag{2.7}$$

y

$$di\acute{a}m\,(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{2.8}$$

Veamos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ es cierto que

$$E_i \subset S\,(A, \varepsilon)\,. \tag{2.9}$$

Para esto, sea $i \in \{1, ..., n\}$, por la condición (2.6), existe una $S\,(\varepsilon)$-cadena $\{L_1, ..., L_t\}$ con $t \leq k$ de un algún punto de A a un punto de $E_i \cap K$.
Por las condiciones (2.7) y (2.8) y de la definición 2.2.7, se tiene que

$$\{L_1, ..., L_t, L_{t+1} = E_i\}$$

es una $S\,(\varepsilon)$-cadena de algún punto de A a cualquier punto de E_i. De esta manera obtenemos la condición (2.9).
Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sea $\mathfrak{P}_i$ la colección de los conjuntos M que satisfacen las condiciones que siguen:

$$M \subset S\,(A, \varepsilon)\,, \tag{2.10}$$

$$M \cap E_i \neq \emptyset, \tag{2.11}$$

$$M \text{ es conexo} \tag{2.12}$$

y

$$di\acute{a}m\,(M) < \frac{\delta}{4}. \tag{2.13}$$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sea $B_i = \cup \mathfrak{P}_i$.
Veamos que cualquier conjunto E_i satisface las condiciones (2.10) a (2.13); la condición (2.10) se obtiene de (2.9); la (2.11) es cierta porque, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $E_i \neq \emptyset$; la (2.12) se obtiene de la (2.7). Por último, veamos que los E_i cumplen con la condición (2.13). Para esto, por (2.8), se cumple que $di\acute{a}m\,(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, y por (2.4) se tiene que $di\acute{a}m\,(E_i) < \frac{\delta}{4}$.
Así, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, obtenemos que

$$E_i \subset B_i. \tag{2.14}$$

y por lo tanto $B_i \neq \emptyset$

Veamos que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que

$$\textit{diám}\,(B_i) < \delta. \tag{2.15}$$

Para esto, sean b_1 y $b_2 \in B_i$. Luego, existen M_1 y $M_2 \in \mathcal{B}_i$ tales que $b_1 \in M_1$ y $b_2 \in M_2$. Sean $m_1 \in M_1 \cap E_i$ y $m_2 \in M_2 \cap E_i$.
De aquí,

$$d\,(b_1, b_2) \leq d\,(b_1, m_1) + d\,(m_1, m_2) + d\,(m_2, b_2) < \frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{4} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4},$$

es decir, $d\,(b_1, b_2) < \delta$, de esta manera obtenemos la condición (2.15).
De la condición (2.10), para cada $i \in \{1, ..., n\}$, obtenemos que

$$B_i \subset S\,(A, \varepsilon)\,.$$

Para obtener la condición (2.3), resta probar que

$$S\,(A, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i. \tag{2.16}$$

Para esto, sea $y \in S\,(A, \varepsilon)$. Entonces tenemos dos casos.
Caso 1: $y \in K$
Notemos que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ (vea las condiciones (2.5) y (2.14)). De modo que si $y \in K$, tenemos que $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.
Caso 2: $y \notin K$
Como $y \in S\,(A, \varepsilon)$, existe una $S\,(\varepsilon)$-cadena $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_m\}$ de algún punto de A a y.
Como $y \notin K$, se tiene que $k < m$.
Sea

$$H = \bigcup_{i=k}^{m} L_i.$$

Notemos que $L_k \subset K$, porque si $z \in L_k$, la colección $\{L_1, ..., L_k\}$ es una $S\,(\varepsilon)$-cadena de algún punto de A a z. Así, $z \in K$.
Por (2.5), existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$L_k \cap E_j \neq \emptyset.$$

Nuestro objetivo es ver que

$$H \subset B_j. \tag{2.17}$$

Para ver que se cumple (2.17), basta demostrar que H satisface las condiciones (2.10) a (2.13).
Por la definición de $S(A,\varepsilon)$ se cumple que

$$\bigcup_{i=1}^{m} L_i \subset S(A,\varepsilon) \tag{2.18}$$

y así, H satisface la condición (2.10).

$$\text{Como } L_k \cap E_j \neq \emptyset, \text{ el conjunto } H \text{ cumple (2.11).} \tag{2.19}$$

Por (1) de la definición 2.2.7, se cumple la condición (2.12), es decir,

$$H \text{ es conexo.} \tag{2.20}$$

Por último, por la condición (2) de la definición 2.2.7, se tiene que

$$\textit{diám}\,(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \textit{diám}\,(L_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}. \tag{2.21}$$

Así, H cumple la condición (2.13). Por lo tanto, de las condiciones (2.18)-(2.21), se cumple la condición (2.17).
A partir de que $y \in L_m$, se tiene que $y \in B_j$. Por lo tanto se cumple la condición (2.16).
Con todo esto, concluimos que se satisface (2.3). □

Teorema 2.2.9. *Sean A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X,d) y $\varepsilon > 0$. Entonces se cumplen las condiciones siguientes:*

(1) *$\textit{diám}\,(S(A,\varepsilon)) \leq \textit{diám}\,(A) + 2\varepsilon$,*

(2) *si A es conexo entonces $S(A,\varepsilon)$ es conexo*

y

(3) *si X tiene la propiedad $\mathcal{S}$ entonces $S(A,\varepsilon)$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Sean (X,d) un espacio métrico con la propiedad $\mathcal{S}$, A un subconjunto no vacío de X y $\varepsilon > 0$.
Veamos que (1) es cierto, para esto, sean x y $y \in S(A,\varepsilon)$. Luego, existe una

$S_x(\varepsilon)$-cadena $L_1, \ldots, L_n$ desde a_x hasta x con $a_x \in A$ y una $S_y(\varepsilon)$-cadena $C_1, \ldots, C_n$ desde algún punto a_y hasta y con $a_y \in A$. Así,

$$d(x, a_x) \leq di\acute{a}m\left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

De manera análoga, se puede ver que $d(y, a_y) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$d(x, y) \leq d(x, a_x) + d(a_x, a_y) + d(a_y, y) < 2\varepsilon + di\acute{a}m(A).$$

Es decir,

$$di\acute{a}m(S(A, \varepsilon)) \leq di\acute{a}m(A) + 2\varepsilon.$$

Veamos que (2) es cierto, para esto supongamos que A es conexo y que $S(A, \varepsilon)$ no es conexo. Luego, existe una separación (U, V) tal que $S(A, \varepsilon) = U \cup V$ (vea la definición 1.1.4).
Sean x y $y \in S(A, \varepsilon)$ tales que $x \in U$ y $y \in V$, por la definición 2.2.7, existen $S(\varepsilon)$-cadenas $\mathcal{L}_x = \{L_1, ..., L_n\}$ y $\mathcal{L}_y = \{C_1, ..., C_m\}$ que enlazan dos puntos de A a x y y, respectivamente.
Luego, por (1) y (2) de la definición 2.2.7, por [5, Teorema 2.A.10] y por [11, Teorema 1.5, pág. 108] se cumple que

$$B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) \cup A \text{ es conexo.}$$

Así,

$$B \subset S(A, \varepsilon) = U \cup V,$$

donde $B \cap U \neq \emptyset$ y $B \cap V \neq \emptyset$, pero esto se contradice con [5, Teorema 2.A.6]
Por último, veamos que (3) es cierto, para esto supongamos que X tiene la propiedad $\mathcal{S}$ y veamos que

$$S(A, \varepsilon) \text{ es abierto en } X.$$

Para esto, sea $y \in S(A, \varepsilon)$, por la definición 2.2.7, existe una $S(\varepsilon)$-cadena

$$\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\} \tag{2.22}$$

de un punto de A a y y además, por el teorema 2.2.2, existe U abierto en X tal que

$$U \text{ es conexo, } y \in U \tag{2.23}$$

y

$$diám\,(U) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{2.24}$$

Luego, de (2.22) a (2.24), se tiene que la colección

$$\mathcal{L}_0 = \{L_1, ..., L_n, L_{n+1} = U\}$$

es una $S\,(\varepsilon)$-cadena de un punto de A a cualquier punto de U (vea la definición 2.2.7), es decir, $U \subset S\,(A, \varepsilon)$. Por lo tanto, $S\,(A, \varepsilon)$ es un conjunto abierto de X. □

Teorema 2.2.10. *Si X es un espacio métrico que tiene la propiedad $\mathcal{S}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el espacio X es unión finita de subconjuntos conexos los cuales tienen la propiedad $\mathcal{S}$ y diámetro menor que ε.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio métrico con la propiedad $\mathcal{S}$ y sea $\varepsilon > 0$. Luego, existen subconjuntos conexos $A_1, ..., A_n$ de X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

y $diám\,(A_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ (vea la definición 2.2.1).
Por el teorema 2.2.8, y por las condiciones (2) y (3) del teorema 2.2.9, resulta que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, los conjuntos

$$S\left(A_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

tienen la propiedad S, son conexos y abiertos. Por la condición (1) del teorema 2.2.9, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que

$$diám\left(S\left(A_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

es decir, $diám(S(A_i, \frac{\varepsilon}{3})) < \varepsilon$. □

Observación 2.2.11. *La condición de subconjuntos abiertos en el teorema 2.2.10 puede ser cambiada por subconjuntos cerrados. Por [11, Teorema 1.6, pág. 109] y 2.2.10, se cumple, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, que*

$$\overline{S\left(A_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

es un subconjunto conexo cerrado. Por el teorema 2.2.4, estos subconjuntos tienen la propiedad $\mathcal{S}$; como

$$\text{diám}\left(S\left(A_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) = \text{diám}\overline{\left(S\left(A_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)},$$

obtenemos que

$$\text{diám}\overline{\left(S\left(A_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si X es un espacio métrico con la propiedad $\mathcal{S}$ y $\varepsilon > 0$ entonces X se puede ver como la unión finita de subconjuntos cerrados (ó abiertos) los cuales tienen la propiedad $\mathcal{S}$ y de diámetro menor que ε.

2.3. Resultados

Se obtiene del teorema 2.2.3, el teorema 2.3.1 que se enuncia a continuación, éste da una noción importante de la estructura de los continuos localmente conexos.

Teorema 2.3.1. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el continuo X es unión finita de subcontinuos localmente conexos de diámetro menor que ε.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo. Por el teorema 2.2.3, el continuo X tiene la propiedad $\mathcal{S}$. Por la nota 2.2.11, tenemos que X es unión de subconjuntos cerrados conexos con diámetro menor que ε que tienen la propiedad $\mathcal{S}$. Notemos que estos subconjuntos son compactos. Finalmente, aplicando el teorema 2.2.2 a cada uno de estos subconjuntos, obtenemos el resultado deseado. □

Definición 2.3.2. *Un espacio topológico X es* ***arco-conexo*** *si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un arco en X que une a x con y.*

Una definición a la que se hará referencia en el siguiente resultado es la siguiente:

Definición 2.3.3. *Sean X un espacio topológico conexo y $x \in X$. El punto x es un* ***punto de corte*** *de X si $X - \{x\}$ es un conjunto disconexo. Los puntos que no son puntos de corte se llaman* ***punto de no corte****. Un punto x separa los puntos a y b en X si existe una separación (U, V) de $X - \{x\}$ tal que $a \in U$ y $b \in V$.*

Teorema 2.3.4. *Todo continuo localmente conexo X es arco-conexo.*

Demostración. Sean a y b puntos distintos de X (si no podemos encontrar puntos distintos en X, entonces X es arco-conexo).
Es necesario construir un *arco* de a a b.
Construiremos una sucesión de cadenas simples de a a b, a saber $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\ldots$, cada una compuesta de eslabones abiertos y conexos.
Construcción de las cadenas:
Para cada $x \in X$ sea U_x la componente de $B(x, 1/4)$ que contiene a x, entonces $diám(U_x) = diám\left(\overline{U_x}\right)$ es menor o igual a $\frac{1}{2}$. Aplicando [5, Teorema 2.F.2] a $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ obtenemos una cadena simple $\mathcal{C}_1 = \{U_{1,1}, U_{1,2}, \cdots, U_{1,k_1}\}$ de a a b cuyos eslabones son conjuntos abiertos y conexos, con diámetro menor o igual $\frac{1}{2}$.
Ahora para cada $i = 1, 2, \cdots, k_1 - 1$ seleccionamos un punto $x_i \in U_{1,i} \cap U_{1,i+1}$.
Construiremos una cadena simple $\mathscr{D}_i$ de x_i a x_{i+1} para cada $i = 1, 2, \cdots, k_1 - 1$.
Primero observemos que cada $U_{1,i}$ puede ser cubierto por conjuntos abiertos y conexos. Sea $x \in U_{1,i}$.
Caso 1. Si $x \in U_{1,i} - (U_{1,i-1} \cup U_{1,i+1})$, consideremos el conjunto $B(x, \delta) \subset U_{1,i}$ donde $\delta = min\left\{\frac{1}{8}, \frac{d(x, X - U_{1,i})}{2}\right\}$ y sea D_x la componente de $B(x, \delta)$ que contiene a x. Por construcción tenemos que D_x es conexo y además es abierto, pues es la componente de un conjunto abierto en un espacio localmente conexo. También tenemos que $diám(D_x) \leq \frac{1}{4}$ y $\overline{D}_x \subset U_{1,i}$.
Caso 2. Si $x \in U_{1,i} \cap U_{1,i-1}$, consideramos el conjunto $B(x, \delta) \subset U_{1,i}$ pero ahora con $\delta = min\left\{\frac{1}{8}, \frac{d(x, X - U_{1,i})}{2}, \frac{d(x, X - U_{1,i-1})}{2}\right\}$ y sea D_x la componente de $B(x, \delta)$ que contiene a x. Nuevamente tenemos que D_x es abierto, conexo, con $diám(D_x) \leq \frac{1}{4}$ y $\overline{D}_x \subset U_{1,i}$.
Caso 3. Si $x \in U_{1,i} \cap U_{1,i+1}$, consideramos el conjunto $B(x, \delta) \subset U_{1,i}$ pero ahora con $\delta = min\left\{\frac{1}{8}, \frac{d(x, X - U_{1,i})}{2}, \frac{d(x, X - U_{1,i+1})}{2}\right\}$ y sea D_x la componente de $B(x, \delta)$ que contiene a x. Así, D_x es abierto, conexo, con $diám(D_x) \leq \frac{1}{4}$ y $\overline{D}_x \subset U_{1,i}$.
Ahora, para cada $i = 1, 2, \cdots, k_1 - 1$, aplicando nuevamente [5, teorema 2.F.2], obtenemos una cadena simple de x_i a x_{i+1} y similarmente obtenemos una cadena simple de a a x_1 y de $x_{k_1 - 1}$ a b. Denotemos por $\mathscr{D}_i$ tales cadenas.
Ahora construiremos $\mathcal{C}_2$ de la siguiente manera:
Supongamos que $\mathscr{D}_0 = \{D_{0,1}, D_{0,2}, \cdots, D_{0,r}\}$, donde $\mathscr{D}_0$ es la cadena sim-

ple de a hasta x_1 y sea $\mathscr{D}_1 = \{D_{1,1}, D_{1,2}, \cdots, D_{1,s}\}$ la cadena simple de x_1 a x_2. Entonces algún eslabón $D_{0,l}$ de $\mathscr{D}_0$ intersecta a algún eslabón $D_{1,m}$ de $\mathscr{D}_1$, ya que en el caso más extremo estos eslabones son $D_{0,r}$ y $D_{1,1}$ porque $x_1 \in D_{0,r} \cap D_{1,1}$. Sea $D_{1,w}$ el último eslabón de $\mathscr{D}_1$ que intersecta a $D_{0,l}$. Entonces descartamos los eslabones de $\mathscr{D}_0$ posteriores a $D_{0,l}$ y también descartamos todos los eslabones anteriores a $D_{1,w}$ en $\mathscr{D}_1$. Ahora procedemos de la misma manera para las cadenas $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ (recordando que $\mathscr{D}_1 = \{D_{1,w}, D_{1,w+1}, \cdots, D_{1,s}\}$) y así para $\mathscr{D}_i$ con $i = 1, 2, \cdots, k_1$, donde $\mathscr{D}_{k_1}$ es la cadena de x_{k_1} hasta b.
Sean $\mathscr{D}'_i$ las cadenas resultantes de este proceso, entonces $\mathcal{C}_2 = \mathscr{D}'_1 \cup \mathscr{D}'_2 \cup \cdots \cup \mathscr{D}'_{k_1}$ es una cadena simple de a a b cuyos eslabones son conjuntos abiertos, conexos, con diámetro menor o igual a $\frac{1}{4}$ y cada eslabón $U_{2,i}$ cumple que $\overline{U}_{2,i} \subset U_{1,j}$ para algún j.
Repitiendo el mismo procedimiento que se realizo con $\mathcal{C}_1$, pero ahora aplicado a $\mathcal{C}_2$, obtenemos una cadena simple $\mathcal{C}_3$ de a a b cuyos eslabones son conjuntos abiertos, conexos y con diámetro menor o igual a $\frac{1}{8}$.
Aplicando un proceso inductivo obtenemos una sucesión $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., de cadenas simples que van desde a hasta b y que además cumplen las siguientes propiedades:

(i) Si $U_{n,i}$ es un eslabón de $\mathcal{C}_n$, entonces $di\acute{a}m(U_{n,i}) \leq \frac{1}{2^n}$.

(ii) Si $U_{n,i}$ es un eslabón de $\mathcal{C}_n$, entonces $\overline{U}_{n,i} \subset U_{n-1,j}$ para algún $U_{n-1,j} \in \mathcal{C}_{n-1}$.
Por lo tanto, $U_{n,i}$ no puede intersectar a $U_{n-1,l}$ si $l < j-1$ o $l > j+1$.

(iii) Si $U_{n,i} \subset U_{n-1,j}$, entonces ningún $U_{n,k}$, para $k > i$, tiene un punto en común con $U_{n-1,m}$ para $m < j-2$, y ningún $U_{n,k}$, para $k < i$, tiene un punto en común con $U_{n-1,m}$ para $m > j-2$

Ahora ya tenemos construida la sucesión de cadenas simples $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ...
Para $n \geq 1$ definimos $C_n = \bigcup \mathcal{C}_n = \bigcup\limits_{i \in I} U_{n,i}$, donde I es un conjunto finito de indices.
Observemos que $\overline{C}_n = \bigcup\limits_{i \in I} \overline{U}_{n,i}$, porque esta unión es finita. Además cada $\overline{C}_n$ es un continuo métrico que contiene a los puntos a y b.
Definimos $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{C}_n$, entonces por [20, Teorema 1.8], A es un continuo métrico. Para demostrar que A es un arco, por [5, Teorema 9.A.10], es suficiente demostrar que todo punto $x \in A - \{a, b\}$ es un punto de corte (vea la

definición 2.3.3).
Sea $x \in A - \{a, b\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in \overline{U}_{n+1,i} \subset U_{n,j}$ para algún j.
Definimos $D_n = \bigcup_{i=1}^{j-2} U_{n,i}$ y $E_n = \bigcup_{i \geq j+2} U_{n,i}$.
Tenemos entonces que $D_n \cap E_n = \emptyset$, ya que para cualesquiera elementos $U_{n,i}$ y $U_{n,k}$ se tiene que $|i - j| \geq 4$.
También por la condición **(iii)** tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $D_{n+1} \cap E_n = \emptyset$ y $D_n \cap E_{n+1} = \emptyset$.
Sean $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap A)$ y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A)$.
Entonces tenemos que D y E son abiertos en A (son uniones de conjuntos abiertos) y además $D \neq \emptyset \neq E$. Se sigue de **(iii)** que $D \cap E = \emptyset$. Ahora de **(i)** y de la definición de D y E tenemos que $D \cup E = A - \{x\}$. Por lo tanto x es un punto de corte de A y asi A es un arco que va de a hasta b. $\square$

Definición 2.3.5. *Sea X un espacio topológico. Una **métrica convexa** para el espacio X es una métrica, d, que induce la topología en X y para la cual los puntos medios siempre existen, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$, existe $m \in X$ tal que*

$$d(x, m) = \frac{1}{2} d(x, y) = d(m, y).$$

Un aspecto importante de los continuos localmente conexos es el siguiente:

Teorema 2.3.6. *[19, Teorema 4] Todo continuo localmente conexo admite una métrica convexa.*

Las métricas convexas fueron estudiadas primero por Menger en [18]. El teorema 2.3.6 se debe a Bing ([3]) y a Moise ([19]), responde una pregunta en [18]. La convexidad de la métrica de Hausdorff fue estudiada por Duda en [9] y [10].
Revisaremos algunas propiedades elementales de las métricas convexas. Usaremos los resultados en 2.3.9 y 2.3.10 en la siguiente sección.
El siguiente resultado demuestra que si un continuo tiene una métrica convexa entonces los puntos del continuo pueden ser unidos por segmentos lineales metricamente rectos, esto es, por arcos que son isométricos a intervalos en $\mathbb{R}$. Recordamos que una ***isometría*** es una función que preserva distancias.

Teorema 2.3.7. *Sea X un continuo con una métrica convexa d. Entonces cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ pueden ser unidos por un arco J en X tal que J es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(x, y)]$.*

Demostración. Sea $m(1/2)$ el punto medio de x y y. Ahora sean $m(1/4)$ el punto medio de x y $m(1/2)$ y $m(3/4)$ el punto medio de $m(1/2)$ y y. De forma similar sea $m(k/8)$ el punto medio de $m([k-1]/8)$ y $m([k+1]/8)$ para $k = 1, 3, 5, 7$ y $m(0) = x$ y $m(1) = y$. Por inducción formal, acorde con el patrón indicado, obtenemos el siguiente subconjunto, M de X:

$$M = \{m(k/2^n) : n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, 2^n - 1\},$$

donde cada $m(k/2^n)$ es el punto medio de $m([k-1]/2^n)$ y $m([k+1]/2^n)$, Sea $J = \overline{M}$. Tomando

$$f(z) = d(x, z) \text{ para cada } z \in J,$$

se sigue que f es una isometría de J en $[0, d(x, y)]$. Notemos que J debe ser, por lo tanto, un arco dado que las isometrías son homeomorfismos. También, $x, y \in J$ por la forma en que se construyó J. $\square$

Las siguientes dos propiedades de las métricas convexas involucran bolas cerradas generalizadas. Las cuales definimos a continuación.

Definición 2.3.8. *Sean (X, d) un espacio métrico, $r > 0$ y $A \in 2^X$ la **d-bola cerrada generalizada en** X **centrada en** A **de radio** r, la cual denotamos por $C_d(r, A)$, es definida como sigue:*

$$C_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}.$$

El siguiente resultado puede no ser verdad cuando la métrica d para el continuo X no sea convexa.

Teorema 2.3.9. *Sea X un continuo con una métrica convexa d. Si $r > 0$ es fijo, entonces para cualesquiera $A, B \in 2^X$,*

$$H\left[C_d(r, A), C_d(r, B)\right] \leq H(A, B).$$

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$. Usaremos el teorema 1.2.16; por simetría es suficiente demostrar que

$$d(x, C_d(r, B)) \leq H(A, B) \text{ para todo } x \in C_d(r, A). \tag{2.25}$$

Para demostrar (2.25), sea $x \in C_d(r, A)$. Dado que es obvio que (2.25) se cumple si $x \in C_d(r, B)$, podemos asumir que $x \notin C_d(r, B)$.

Dado que $x \in C_d(r, A)$ y $A \in 2^X$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) \leq r$. Dado que $B \in 2^X$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) = d(a, B)$. Note que $d(x, b) > r$ (por la suposición de que $x \notin C_d(r, B)$).
Ahora, por el teorema 2.3.7, existe un arco J en X de x a b tal que J es isométrico a $[0, d(x, b)]$. Dado que $d(x, b) > r$, existe un punto $y \in J$ tal que $d(y, b) = r$. Entonces, dado que x y b son los puntos extremos de J y J es isométrico a $[0, d(x, b)]$, la usual desigualdad tríangular para x, y y b (con y como el punto repetido) es una igualdad:

$$d(x, y) + d(y, b) = d(x, b).$$

Por lo tanto, dado que $d(y, b) = r$,

$$d(x, y) = d(x, b) - r \leq d(x, a) + d(a, b) - r;$$

entonces, dado que $d(x, a) \leq r$ y $d(a, b) = d(a, B)$, tenemos que

$$d(x, y) \leq d(a, B).$$

Por lo tanto, por el teorema 1.2.16, $d(x, y) \leq H(A, B)$. Por lo tanto, dado que $y \in C_d(r, B)$, hemos probado (2.25). □

Nuestra propiedad final de métricas convexas se refiere a la conexidad de las bolas cerradas generalizadas.

Teorema 2.3.10. *Sea X un continuo con una métrica convexa d. Entonces, para cualquier $A \in C(X)$ y $r > 0$, tenemos que $C_d(r, A) \in C(X)$.*

Demostración. El hecho de que $C_d(r, A)$ es conexo cuando $A \in C(X)$ es una consecuencia del teorema 2.3.7. □

Usaremos el siguiente resultado acerca de la unión de continuos localmente conexos en la siguiente sección.

Teorema 2.3.11. *Sea X un espacio métrico. Si X_1 y X_2 son subcontinuos localmente conexos de X tales que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, entonces $X_1 \cup X_2$ es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Como la unión de dos conexos que se intersectan es conexa y la unión de compactos es un compacto, es inmediato que $X_1 \cup X_2$ es un continuo. Por consiguiente, por el teorema 2.1.7, basta probar que $X_1 \cup X_2$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Para tal fin, tomemos $x \in X_1 \cup X_2$ y un abierto U en $X_1 \cup X_2$, tal que $x \in U$. Queremos hallar una vecindad conexa V de x en $X_1 \cup X_2$, tal que $V \subset U$. Supongamos primero que $x \in X_1 - X_2$. Observemos que $X_1 \cap X_2$ es un subconjunto compacto de X_1 y que $X_1 - X_2$ es abierto en X_1. Luego, $U \cap (X_1 - X_2)$ es un subconjunto abierto de X_1. Como X_1 es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V de X_1, tal que $x \in V \subset U \cap (X_1 - X_2)$. Pero $X_1 - X_2 = (X_1 \cup X_2) - X_2$, por lo cual $X_1 - X_2$ y $U \cap (X_1 - X_2)$ son subconjuntos abiertos de $X_1 \cup X_2$. Esto implica que V es abierto en $X_1 \cup X_2$ y concluye este caso. En caso que $x \in X_2 - X_1$, podemos proceder de igual forma para hallar V. Ahora supongamos que $x \in X_1 \cap X_2$. Como $U \cap X_1$ y $U \cap X_2$ son vecindades de x en X_1 y X_2, respectivamente, existen abiertos V_1 en X_1 y V_2 en X_2, tales que $x \in V_1 \subset U \cap X_1$ y $x \in V_2 \subset U \cap X_2$. Observemos que $V_1 \cup V_2$ es conexo. Sean W_1 y W_2 abiertos en X, tales que $V_1 = W_1 \cap X_1$ y $V_2 = W_2 \cap X_2$. Luego, $W_1 \cap W_2 \cap (X_1 \cup X_2)$ es un subconjunto abierto de $X_1 \cup X_2$ y $x \in W_1 \cap W_2 \cap (X_1 \cup X_2) = (W_1 \cap W_2 \cap X_1) \cup (W_1 \cap W_2 \cap X_2) = (V_1 \cap W_2) \cup (V_2 \cap W_1) \subset V_1 \cup V_2$. Por tanto, $V_1 \cup V_2$ es una vecindad conexa de x en $X_1 \cup X_2$. Así, se concluye que X es conexo en pequeño en X. Esto termina la demostración de este teorema. $\square$

Capítulo 3

El teorema de Curtis y Schori para 2^X y $C(X)$

3.1. Retractos absolutos, Z-conjuntos, teorema de Toruńczyk

Discutiremos los conceptos que son necesarios para entender el teorema de Toruńczyk. Estableceremos el teorema de Toruńczyk al final de ésta sección. Las notaciones usadas son debido a Borsuk.

Daremos algunos ejemplos de retractos absolutos usando el corolario 3.1.4. Primero, probaremos un importante resultado de caracterización en el teorema 3.1.3, el cual usa la siguiente terminología.
Cuando hablamos de un *compactum* nos referimos a un espacio métrico no vacío y compacto.

Definición 3.1.1. *Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset Y$ y $f : A \to X$ una función continua. Una función $F : Y \to X$ es una* ***extensión continua*** *de f a Y si F es continua y $F|_A = f$. Un espacio normal X es un* ***extensor absoluto*** *(escrito* ***AE****) si, para cada espacio normal Y, cada subconjunto cerrado A de Y y cada función continua $f : A \to X$, f tiene una extensión continua a Y.*

Definición 3.1.2. *Un subconjunto cerrado A de un espacio topológico Y es un* ***retracto*** *de Y si la función identidad Id_A en A tiene una una extensión continua a Y. Un espacio normal X es un* ***retracto absoluto*** *(escrito*

***AR**) si, para cada espacio normal Y y cada subconjunto cerrado B de Y homeomorfo a X, se satisface que B es un retracto de Y.*

Teorema 3.1.3 (Borsuk)**.** *Un compactum K es un AR si y solo si K es un AE.*

Demostración. Sea K un compactum y supongamos que K es un AR. Por el teorema de metrización de Urysohn [16, pág. 241], podemos asumir que existen $K' \subset I^\infty$, $\varphi : K' \to K$ un homeomorfismo y $r : I^\infty \to K'$ una retracción. Sea B un subconjunto cerrado de un espacio métrico M y sea $f : B \to K$ una función continua. Como la función f es continua tenemos que $\varphi^{-1} \circ f : B \to K'$ es continua.
Notemos que $\varphi^{-1} \circ f = (f_i)_{i=1}^\infty$ donde $f_i : B \to [0,1]$ para cada i.
Por el teorema de extensión de Tietze [16, pág. 127], cada f_i puede ser extendida a una función continua $g_i : M \to [0,1]_i$. Consideremos $g = (g_i)_{i=1}^\infty : M \to I^\infty = \prod_{i=1}^{\infty}[0,1]_i$, entonces $\varphi \circ r \circ g : M \to K$ es una extensión continua de f, es decir, $\varphi \circ r \circ g|_B = f$ pues si $x \in B$ entonces tenemos que $(\varphi \circ r \circ g)(x) = (\varphi \circ r)(g(x)) = (\varphi \circ r)(\varphi^{-1} \circ f(x)) = \varphi((\varphi^{-1} \circ f)(x)) = f(x)$. Por lo tanto K es un AE.
Ahora asumamos que K es un AE. Supongamos que K es homeomorfo a un subespacio cerrado K' de un espacio métrico Y. Entonces existe $\varphi : K' \to K$ homeomorfismo. Por lo tanto, $\varphi \circ Id_{K'} : K' \to K$ es continua y como K es un AE, $\varphi \circ Id_{K'}$ se puede extender a una función continua $f : Y \to K$ y $f|_{K'} = \varphi \circ Id_{K'}$. Así, $\varphi^{-1} \circ f : Y \to K' \subset Y$ es la función buscada, ya que si $k \in K'$ se tiene que $(\varphi^{-1} \circ f)(k) = \varphi^{-1}(f(k)) = \varphi^{-1}((\varphi \circ Id_{K'})(k)) = Id_{K'}(k) = k$. □

Corolario 3.1.4. *Sea K un compactum encajado en I^∞. Si K es un retracto de I^∞, entonces K es un AR.*

Demostración. Por el teorema 3.1.3 tenemos que cualquier retracto de I^∞ es un AE. Por lo tanto, por el teorema 3.1.3, cualquier retracto de I^∞ es un AR. □

Ahora, usando el corolario 3.1.4 daremos algunos ejemplos simples de retractos absolutos.

Ejemplo 3.1.5. *Por el corolario 3.1.4, I^∞ es en si mismo un AR (la función identidad de I^∞ es una retracción).*

Ejemplo 3.1.6. *Por el corolario 3.1.4, cualquier n-celda es un AR (la función $(x_i)_{i=1}^{\infty} \to (y_i)_{i=1}^{\infty}$, donde $y_i = x_i$ para todo $i \leq n$ y $y_i = 0$ para todo $i > n$, es una retracción de I^{∞} sobre una copia de I^n).*

Observación 3.1.7. *Todo AR es un continuo localmente conexo. En efecto. Por [16, pág. 241], todo compactum es encajable en I^{∞}; I^{∞} es un continuo localmente conexo; y todo retracto de un continuo localmente conexo es un continuo localmente conexo.*

Ejemplo 3.1.8. *Notemos que una n-esfera para $n > 0$ es un ejemplo de un continuo localmente conexo que no es un AR (dado que ∂I^{n+1} no es un retracto de I^{n+1} [16, pág. 314]).*

Para un tratamiento sistemático de los fundamentos de retractos absolutos, vea [4]. Ahora ponemos nuestra atención al concepto de un Z-conjunto. En [2], Anderson define una noción acerca de subconjuntos cerrados de ciertos espacios lineales, de dimensión infinita. Él llamó a esta noción Propiedad Z (la letra Z intentaba sugerir los movimientos de zigzag que Anderson, Klee y otros usaron para mover puntos en espacios de dimensión infinita). La definición de Anderson de la Propiedad Z fue modificada, resultando en lo que ahora se conoce como Z-conjuntos. Definiremos los Z-conjuntos y discutiremos algunas de sus propiedades que nos serán útiles.

Definición 3.1.9. *Sean X y Y espacios métricos, X con métrica acotada, y $f, g : Y \to X$ funciones continuas, denotaremos por*

$$d_{\infty}(f, g) = \sup\{d(f(y), g(y)) : y \in Y\}.$$

Sean X y Y espacios métricos y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en Y. Decimos que $f : X \to Y$ es el ***límite uniforme*** *de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim_{n\to\infty} d_{\infty}(f_n, f) = 0$.*

Definición 3.1.10. *Sean X un espacio métrico compacto y A un subconjunto cerrado de X. Decimos que A es un* ***Z-conjunto*** *en X si Id_X es el límite uniforme de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan a A. Decimos que una función continua f entre espacios métricos compactos X_1 y X_2 es una* ***Z-función*** *si $f(X_1)$ es un Z-conjunto en X_2.*

Observación 3.1.11. *Una definición equivalente a la definición 3.1.10 es la siguiente.*
Sea Y un compactum con métrica d. Un subconjunto cerrado A de Y es un Z-conjunto en Y si para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua f_{ε}

de Y en $Y - A$ tal que f_ε es ε-cercana a la función identidad en Y (i. e., $d_\infty(f_\varepsilon(y), y) < \varepsilon$ para todo $y \in Y$).

Para manipular Z-conjuntos se requiere el siguiente resultado, el cual garantiza que al realizar ciertas operaciones sobre ellos, se siguen obteniendo Z-conjuntos.

Teorema 3.1.12. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Un subconjunto cerrado de un Z-conjunto en X, es a su vez un Z-conjunto en X.

(2) La unión finita de Z-conjuntos en X es un Z-conjunto en X.

Demostración. (1). Supongamos que A es un Z-conjunto en X y B es un subconjunto cerrado de A. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existe una función continua $f_\varepsilon : X \to X - A$ tal que $d_\infty(f_\varepsilon, Id_X) < \varepsilon$. Observemos que $X - A \subset X - B$. De esta manera, podemos considerar que $f_\varepsilon : X \to X - B$. Además, B es un subconjunto cerrado de X. Por lo tanto, B es un Z-conjunto en X.

(2). Bastará probar la afirmación para dos elementos. Sean A_1 y A_2 dos Z-conjuntos en X y $\varepsilon > 0$. Tomemos una función continua $f_1 : X \to X - A_1$, tal que $d_\infty(f_1, Id_X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Observemos que, dado $a \in A$, se cumple que $d(f_1(X), A_1) \leq d(f(a), a) \leq d_\infty(f_1, Id_X)$. Así, $d(f_1(X), A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como X es compacto, $f_1(X)$ es compacto. Además, $f_1(X) \cap A_1 = \emptyset$. Luego, $d(f_1(X), A_1) > 0$. Así, existe una función continua $f_2 : X \to X - A_2$, tal que $d_\infty(f_2, Id_X) < \frac{1}{2}d(f_1(X), A_1)$. Observemos que para cualquier $x \in X$ se cumple que $d(f_1(x), f_2(f_1(x))) < \frac{1}{2}d(f_1(X), A_1) < d(f_1(X), A_1)$ y, por tanto, $f_2(f_1(x)) \notin A_1$. Se sigue de esto último que $f_2(f_1(X)) \subset X - A_1$. Como también $f_2(X) \subset X - A_2$, podemos considerar la función continua $g = f_2 \circ f_1 : X \to X - (A_1 \cup A_2)$. Observemos también que $d(g(x), x) \leq d(g(x), f_1(x)) + d(f_1(x), x) = d(f_2(f_1(x)), f_1(x)) + d(f_1(x), x) < \frac{1}{2}d(f_1(X), A_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$, para cualquier $x \in X$. Luego, $d_\infty(g, Id_X) < \varepsilon$. Por tanto, $A_1 \cup A_2$ es un Z-conjunto en X. □

Como un ejemplo, tenemos que $\partial I^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in I^n : x_i = 0 \text{ o } 1 \text{ para algún } i\}$ es un Z-conjunto en I^n.
Ahora analicemos los Z-conjuntos en I^n y los Z-conjuntos en el cubo de Hilbert I^∞. Usaremos la métrica d para I^∞ dada por

$$d((x_i)_{i=1}^{\infty},(y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \text{ para todo } (x_i)_{i=1}^{\infty},(y_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty}.$$

A diferencia de I^n, cualquier punto de I^{∞} es un Z-conjunto en I^{∞}. Para ver esto, sea $p = (p_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty}$. Sea $\varepsilon > 0$. Fijemos $j \geq 1$ tal que $2^{-j} < \varepsilon$ y sea $q \in [0,1]$ tal que $q \neq p_j$. Definimos $f_{\varepsilon} : I^{\infty} \to I^{\infty}$ como sigue:

$$f_{\varepsilon}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, q, x_{j+1}, \ldots) \text{ para cada } (x_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty}.$$

Entonces, tenemos que, $p \notin f_{\varepsilon}(I^{\infty})$ y f_{ε} es ε-cercana a la función identidad en I^{∞} (con la métrica d_{∞}). Un argumento similar muestra que cualquier conjunto finito (y cualquier conjunto cerrado numerable) en I^{∞} es un Z-conjunto en I^{∞}. Esto implica que, a diferencia de I^n, existe una sucesión de Z-conjuntos en I^{∞} cuya unión es densa en I^{∞}.
Daremos otro ejemplo de Z-conjuntos en I^{∞}. El ejemplo involucra las Z-funciones.
Ahora, para cada $n = 1, 2, \ldots$, sea $f_n : I^{\infty} \to I^{\infty}$ la siguiente «proyección»:

$$f_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \text{ para todo } (x_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty}.$$

Observemos que cada f_n es una Z-función (usando el reemplazo de coordenadas, como hicimos anteriormente). Notemos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad en I^{∞} (con respecto a la métrica d).
Por lo tanto, hemos determinado un hecho elemental acerca de los cubos de Hilbert: si I^{∞} es un cubo de Hilbert, entonces la función identidad en I^{∞} es un limite uniforme de Z-funciones. El inverso, para retractos absolutos, es el teorema de Toruńczyk

Teorema 3.1.13 (Toruńczyk)**.** *[23, Teorema 1] Sea Y un AR. Si la función identidad en Y es un limite uniforme de Z-funciones, entonces Y es el cubo de Hilbert.*

Finalmente, presentamos el teorema de Wojdyslawski que sera usado en la siguiente sección.

Teorema 3.1.14 (Wojdyslawski)**.** *[24, Teorema II, Teorema II_m] Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ son retractos absolutos.*

3.2. Cuando 2^X_K y $C_K(X)$ son Z-conjuntos

Esta sección está dedicada a la demostración del teorema de Curtis y Schori (teorema 3.3.2), para lo cual presentamos unos resultados auxiliares que nos permitirán entender la demostración.

Recordemos que

$$2^X_K = \left\{A \in 2^X : K \subset A\right\} \text{ y}$$
$$C_K(X) = \{A \in C(X) : K \subset A\}.$$

Teorema 3.2.1. *Sea J un arco con puntos extremos p y q. Existe una función continua $\varphi : 2^J \to 2^J$ tal que φ tiene las siguientes propiedades: si $A \in 2^J$ y $S \subset \{p, q\}$, entonces $\varphi(A) \neq J$, $\varphi(S) = S$ y $\varphi(A \cup S) = \varphi(A) \cup S$.*

Demostración. Por conveniencia, probaremos primero el teorema para el arco $Y = [-1, 1]$. Si $A \in 2^Y$, sea

$$\begin{array}{rcll} a^+ & = & \text{ínf}\,(A \cap [0,1]) & \text{si} \quad A \cap [0,1] \neq \emptyset, \\ a^- & = & \sup\,(A \cap [-1,0]) & \text{si} \quad A \cap [-1,0] \neq \emptyset, \\ a^0 & = & \text{ínf}\,\{|a| : a \in A\}. & \end{array}$$

Si $A \in 2^Y$ es tal que $0 \notin A$, sea

$$\gamma(A) = \begin{cases} A \cup \{2a^+ - 1\}, & \text{si} \quad A \subset (0,1] \\ A \cup \{2a^- + 1\}, & \text{si} \quad A \subset [-1,0) \\ A \cup \{2a^+ - 1,\, 2a^- + 1\}, & \text{si} \quad A \cap [-1,0) \neq \emptyset \neq A \cap (0,1]. \end{cases}$$

Veamos que γ es continua. La prueba se hará por casos, dependiendo del elemento que se tome en $2^Y_{\{0\}}$.

Caso (a): $A \subset (0, 1]$.

Sea $A \in 2^Y$ tal que $A \subset (0, 1]$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^Y que converge a A. Como A es cerrado tenemos que $a^+ = \text{mín}\, A$ por lo tanto $a^+ > 0$. Tomemos $\varepsilon = \frac{a^+}{2}$, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$ se cumple que $H(A_m, A) < \varepsilon$. Como $H(A_m, A) < \varepsilon$ se cumple que para todo $m \geq N$, $A_m \subset N(\varepsilon, A)$.

Afirmación 1: $N(\varepsilon, A) \subset (0, 1]$.

Sea $x \in N(\varepsilon, A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$, por lo cual tenemos que $x \in \left(a - \frac{a^+}{2}, a + \frac{a^+}{2}\right)$, así $0 < a^+ - \frac{a^+}{2} \leq a - \frac{a^+}{2} < x$, por lo tanto $0 < x$ y así, $x \in (0, 1]$. Con lo anterior concluimos que $N(\varepsilon, A) \subset (0, 1]$. Consecuentemente tenemos que para todo $m \geq N$, $A_m \subset (0, 1]$ y por lo tanto

$\gamma(A_m) = A_m \cup \{2a_m^+ - 1\}$
Ahora, para cada $m \geq N$, sea $a_m^+ = \text{mín}\, A_m$ y consideremos la sucesión $\left\{a_k^+\right\}_{n=1}^{\infty}$.
Afirmación 2: La sucesión $\left\{a_k^+\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $a^+ = \text{mín}\, A$
Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ se cumple que $H(A_m, A) < \varepsilon$, lo que es equivalente a que para cada $m \geq N$, $A_m \subset N(\varepsilon, A)$ y $A \subset N(\varepsilon, A_m)$.
Observemos que $a^+ \in A$ y para cada $m \geq N$, $a_m^+ \in A_m$, pues cada A_m es cerrado al igual que A.
Dado que $a_m^+ \in A_m$ existe $b \in A$ tal que $|a_m^+ - b| < \varepsilon$, también como $a^+ \in A$ existe $b_m \in A_m$ tal que $|a^+ - b_m| < \varepsilon$. Notemos que se cumple que $a^+ \leq b$ y $a_m^+ \leq b_m$.
Supongamos que $a^+ \leq a_m^+$. Entonces tenemos los siguientes casos:

(i) $a^+ \leq b \leq a_m^+ \leq b_m$.
En este caso tenemos lo siguiente:

$$|a^+ - a_m^+| \leq |a^+ - b_m| < \varepsilon,\ i.\text{ e.},\ |a^+ - a_m^+| < \varepsilon.$$

(ii) $a^+ \leq a_m^+ \leq b \leq b_m$.
En este caso tenemos lo siguiente:

$$|a^+ - a_m^+| \leq |a^+ - b_m| < \varepsilon,\ i.\text{ e.},\ |a^+ - a_m^+| < \varepsilon.$$

(iii) $a^+ \leq a_m^+ \leq b_m \leq b$.
En este caso tenemos lo siguiente:

$$|a^+ - a_m^+| \leq |a^+ - b_m| < \varepsilon,\ i.\text{ e.},\ |a^+ - a_m^+| < \varepsilon.$$

Ahora supongamos que $a_m^+ \leq a^+$. Tenemos los siguientes casos:

(iv) $a_m^+ \leq b_m \leq a^+ \leq b$.
En este caso tenemos lo siguiente:

$$|a_m^+ - a^+| \leq |a_m^+ - b| < \varepsilon,\ i.\text{ e.},\ |a_m^+ - a^+| < \varepsilon.$$

(v) $a_m^+ \leq a^+ \leq b_m \leq b$.
En este caso tenemos lo siguiente:

$$|a_m^+ - a^+| \leq |a_m^+ - b| < \varepsilon, \text{ i. e., } |a_m^+ - a^+| < \varepsilon.$$

(vi) $a_m^+ \leq a^+ \leq b \leq b_m$.
En este caso tenemos lo siguiente:

$$|a_m^+ - a^+| \leq |a_m^+ - b| < \varepsilon, \text{ i. e., } |a_m^+ - a^+| < \varepsilon.$$

Por los casos **(i)** a **(vi)** tenemos que para todo $m \geq N$ se cumple que $|a_m^+ - a^+| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario concluimos que $a_m^+ \to a^+$ y por lo tanto $2a_m^+ - 1 \to 2a^+ - 1$.
Por todo lo anterior concluimos que

$$\gamma(A_m) = A_m \cup \{2a_m^+ - 1\} \to \gamma(A) = A \cup \{2a^+ - 1\}.$$

Caso (b): $A \subset [-1, 0)$.
La demostración es similar que para el caso **(a)**.
Caso (c): $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset \neq A \cap (0, 1]$.
Como $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset \neq A \cap (0, 1]$ tenemos que A se puede ver como $A = A^1 \cup A^2$ donde $A^1 \subset (0, 1]$ y $A^2 \subset [-1, 0)$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^Y que converge a A, entonces tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq N$, $A_m = A_m^1 \cup A_m^2$ donde $A_m^1 \subset (0, 1]$ y $A_m^2 \subset [-1, 0)$.
Por el caso **(a)** tenemos que $\gamma(A_m^1) = A_m^1 \cup \{2a_m^+ - 1\}$ converge a $\gamma(A^1) = A^1 \cup \{2a^+ - 1\}$ y por el caso **(b)** tenemos que $\gamma(A_m^2) = A_m^2 \cup \{2a_m^- + 1\}$ converge a $\gamma(A^2) = A^2 \cup \{2a^- + 1\}$.
Así, $\gamma(A_m) = \gamma(A_m^1 \cup A_m^2) = \gamma(A_m^1) \cup \gamma(A_m^2)$ converge a $A^1 \cup \{2a^+ - 1\} \cup A^2 \cup \{2a^- + 1\} = A \cup \{2a^+ - 1, 2a^- + 1\}$, es decir $\gamma(A_m)$ converge a $\gamma(A)$.
Por los casos **(a)**, **(b)** y **(c)**, tenemos que γ es continua en $2^Y - 2_0^Y$.
Finalmente, definimos $\varphi : 2^Y \to 2^Y$ como sigue:

$$\varphi(A) = \begin{cases} \gamma(A), & \text{si} \quad A \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset \\ [A - (-1, 1)] \cup \{-1, 1\}, & \text{si} \quad 0 \in A \\ [\gamma(A) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)] \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\}, & \text{si} \quad 0 < a^0 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Verifiquemos que φ posee las propiedades enunciadas en el teorema 3.2.1 (para el caso cuando $J = Y$).
Primero notemos que $\varphi(A) \neq Y$. Si $A = Y$, tenemos que $\varphi(A) = \varphi(Y) = \{-1, 1\}$, así $\varphi(A) \neq Y$.
Si A es un subconjunto propio de Y, tenemos que $\varphi(A) = \gamma(A)$ o $\varphi(A) = [A - (-1, 1)] \cup \{-1, 1\}$ o $\varphi(A) = [\gamma(A) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)] \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\}$.
Si $\varphi(A) = \gamma(A)$, tenemos que $\gamma(A) \neq Y$ y por lo tanto $\varphi(A) \neq Y$.

Por otro lado, cuando $\varphi(A) = [A - (-1,1)] \cup \{-1,1\}$, inferimos que $A - (-1,1) = \emptyset$, así $\varphi(A) = \{-1,1\}$, y por lo tanto $\varphi(A) \neq Y$. Finalmente cuando $\varphi(A) = [\gamma(A) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)] \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\}$, notemos que $(2a^0 - 1, 1 - 2a^0)$ es un intervalo y por lo tanto tiene una cantidad no numerable de puntos, también tenemos que $\gamma(A) \neq Y$, por lo cual $\gamma(A) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0) \neq Y$ y así $\varphi(A) = [\gamma(A) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)] \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\} \neq Y$, pues solo se están agregando dos puntos.
Por lo anterior concluimos que $\varphi(A) \neq Y$ para cualquier elemento $A \in 2^Y$.
Ahora veamos que φ es continua, la prueba se hará por casos dependiendo del elemento $A \in 2^Y$.
Caso (a'): $A \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$.
En este caso tenemos que $\varphi(A) = \gamma(A)$ y γ es continua.
Caso (b'): $0 \in A$.
Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^Y que converge a A. Entonces tenemos que $[A_m - (-1,1)] \cup \{-1,1\} \to [A - (-1,1)] \cup \{-1,1\}$, así $\varphi(A_m) \to \varphi(A)$, por lo tanto φ es continua.
Caso (c'): $0 < a^0 \leq \frac{1}{2}$.
Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^Y que converge a A. Como γ es continua tenemos que $[\gamma(A_m) - (2a^0_m - 1, 1 - 2a^0_m)] \cup \{2a^0_m - 1, 1 - 2a^0_m\}$ converge a $[\gamma(A) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)] \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\}$, así $\varphi(A_m) \to \varphi(A)$, por lo tanto φ es continua.
Por los casos **(a')**,**(b')** y **(c')** tenemos que φ es continua en 2^Y.
Ahora veamos que $\varphi(S) = S$ cuando $S \subset \{-1,1\}$.
Sea $S \subset \{-1,1\}$ entonces tenemos los siguientes casos:
Caso 1: $S = \{-1,1\}$.
En este caso tenemos que $S \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$, así

$$\varphi(S) = \{-1,1\} \cup \{2a^+ - 1, 2a^- + 1\}.$$

Observemos que $a^+ = 1$ y $a^- = -1$, por lo tanto tenemos que

$$\{2a^+ - 1, 2a^- + 1\} = \{-1,1\}.$$

Así concluimos que $\varphi(S) = \{-1,1\} \cup \{-1,1\} = \{-1,1\} = S$.
Caso 2: $S = \{-1\}$.
En este caso tenemos que $S \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$, así

$$\varphi(S) = \{-1\} \cup \{2a^- + 1\}.$$

Observemos que $a^- = -1$, por lo tanto tenemos que

$$\{2a^- + 1\} = \{-1\}.$$

Así concluimos que $\varphi(S) = \{-1\} \cup \{-1\} = \{-1\} = S$.
Caso 3: $S = \{1\}$.
En este caso tenemos que $S \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$, así

$$\varphi(S) = \{1\} \cup \{2a^+ - 1\}.$$

Observemos que $a^+ = 1$, por lo tanto tenemos que

$$\{2a^+ - 1\} = \{1\}.$$

Así concluimos que $\varphi(S) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\} = S$.
Ahora para toda función se tiene que la imagen directa se preserva, entonces tenemos que $\varphi(A \cup S) = \varphi(A) \cup \varphi(S)$, pero $\varphi(S) = S$, por lo tanto tenemos que $\varphi(A \cup S) = \varphi(A) \cup S$.
El resultado general para cualquier arco se sigue fácilmente: Sea h un homeomorfismo de J en Y, sea $h^* : 2^J \to 2^Y$ definida para cada $A \in 2^J$ por $h^*(A) = h(A)$, la cual es un homeomorfismo por [14, Teorema 1.3], y sea $\varphi : 2^Y \to 2^Y$ justo como la acabamos de construir; entonces $\psi = (h^*)^{-1} \circ \varphi \circ h^*$ es la función requerida para 2^J.
Tenemos que ψ es una función continua pues es la composición de funciones continuas.
También se cumple que $\psi(A) = ((h^*)^{-1} \circ \varphi \circ h^*)(A) \neq J$ pues $\varphi(A) \neq J$.
Si $S \subset \{p, q\}$ entonces tenemos que $h^*(S) = h(S) \subset \{-1, 1\}$, así $\varphi(h^*(S)) = h(S)$ y por lo tanto $(h^*)^{-1}(h^*(S)) = S$, es decir $\psi(S) = S$.
Finalmente tenemos que $\psi(A \cup S) = \psi(A) \cup \psi(S) = \psi(A) \cup S$. $\square$

Para el siguiente teorema necesitamos recordar la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un arco, con p y q sus puntos extremos. El arco A es un* ***a****rco libre en X si $A - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X.*

Si X es un continuo y $B \subset X$ recordemos que el símbolo B° es usado para denotar el interior de B en X.

Teorema 3.2.3. *Sea X un continuo localmente conexo no degenerado. Si K es un subconjunto cerrado de X tal que $K^\circ \neq \emptyset$, entonces 2^X_K es un Z-conjunto en 2^X; también, si K no contiene arcos libres en X, $C_K(X)$ es un Z-conjunto en $C(X)$.*

Demostración. En vista de la definición de un Z-conjunto, comenzamos notando que por el teorema 1.2.19, 2^X_K es cerrado en 2^X ; también, por el teorema 1.2.19 tenemos que $C_K(X)$ es cerrado en $C(X)$.
Ahora, sea d una métrica para X. Para determinar que tan cerca está una función a la función identidad en 2^X o $C(X)$, usaremos la métrica de Hausdorff H como está definida en 1.2.11.
Primero probaremos el teorema para 2^X_K, para esto tenemos dos casos.
Caso 1. K contiene un arco libre en X.
Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, dado que K contiene un arco libre en X, K contiene un arco libre J en X tal que

$$diám_d(J) < \varepsilon.$$

Denotemos por p y q los puntos extremos de J, sea $\varphi : 2^J \to 2^J$ la función garantizada por el teorema 3.2.1. Definimos $f_\varepsilon : 2^X \to 2^X$ como sigue:

$$f_\varepsilon(B) = \begin{cases} B, & \text{si} \quad B \cap J = \emptyset, \\ (B - J^\circ) \cup \varphi(B \cap J), & \text{si} \quad B \cap J \neq \emptyset. \end{cases}$$

Veamos que f_ε es continua en 2^X. Sea $B \in 2^X$. Entonces tenemos los dos casos siguientes:
Caso (a) $B \cap J = \emptyset$.
Sea $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X que converge a B. Como $B_n \to B$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $B_n \cap J = \emptyset$, así tenemos que $f_\varepsilon(B_n) = B_n$ y por lo tanto $f_\varepsilon(B_n)$ converge a $B = f_\varepsilon(B)$.
Caso (b) $B \cap J \neq \emptyset$.
Sea $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X que converge a B. Tenemos que demostrar que $f_\varepsilon(B_n) \to f_\varepsilon(B)$.
Notemos que si $a^+, a^-, a^0 \in J^\circ$, entonces $a_n^+ \to a^+$, donde $a_n^+ = \text{ínf}\,(B_n \cap [0,1])$, $a^+ = \text{ínf}\,(B \cap [0,1])$, $a_n^- \to a^-$, donde $a_n^- = \sup\,(B_n \cap [-1,0])$, $a^- = \sup\,(B \cap [-1,0])$ y $a_n^0 \to a^0$, donde $a_n^0 = \{|b| : b \in B_n \cap J\}$, $a^0 = \{|b| : b \in B \cap J\}$.
Por definición

$$\varphi(B \cap J) = \begin{cases} \gamma(B \cap J), & \text{si} \quad (B \cap J) \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset \\ [(B \cap J) - (-1,1)] \cup \{-1,\, 1\}, & \text{si} \quad 0 \in B \cap J \\ [\gamma(B \cap J) - (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)] \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\}, & \text{si} \quad 0 < a^0 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

donde

$$\gamma(B \cap J) = \begin{cases} (B \cap J) \cup \{2a^+ - 1\}, & \text{si} \quad (B \cap J) \subset (0,1] \\ (B \cap J) \cup \{2a^- + 1\}, & \text{si} \quad (B \cap J) \subset [-1,0) \\ (B \cap J) \cup \{2a^+ - 1,\, 2a^- + 1\}, & \text{si} \quad (B \cap J) \cap [-1,0) \neq \emptyset \neq (B \cap J) \cap (0,1]. \end{cases}$$

De la misma manera se define $\varphi(B_n \cap J)$.
Sea $y \in f_\varepsilon(B)$ y denotemos por $E(J)$ al conjunto de puntos extremos de J.
(i) Supongamos que $y \in \varphi(B \cap J)$; primero supongamos que $y \in \gamma(B \cap J)$.
Supongamos que $y \in B \cap J^\circ$. Como J es un arco libre, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tal que para toda n se cumple que $y_n \in B_n \cap J^\circ$ y $y_n \to y$.
Supongamos que $y \notin \{2a^+ - 1, 2a^- + 1\}$, como $a_n^+ \to a^+$ y $a_n^- \to a^-$ existe N tal que si $n \geq N$, entonces $y_n \in B_n \cap J^\circ$, $y_n \notin \{2a_n^+ - 1, 2a_n^- + 1\}$ y tal que $y_n \to y$, para $n \geq N$, $y_n \in \gamma(B_n \cap J)$, así $y_n \in \varphi(B_n \cap J)$. De donde $y_n \in f_\varepsilon(B_n)$.
Ahora supongamos que $y \in B \cap J^\circ$ y $y = 2a^+ - 1$, entonces $y_n = 2a_n^+ - 1 \to 2a^+ - 1$. Si $y_n = 2a^- + 1$, entonces $y_n = 2a_n^- + 1 \to 2a^- + 1$. Por lo tanto $y_n \to y$ y $y_n \in \gamma(B_n \cap J)$, de donde $y_n \in \varphi(B_n \cap J)$. Así $y_n \in f_\varepsilon(B_n)$.
Ahora tomemos $y \in E(J)$. Entonces existe $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $y_n \to y$ con $y_n \in B_n$. Tenemos los siguientes casos $y_n \in B_n \cap J^\circ$ o $y_n \in B_n - J^\circ$. De cualquier manera $y_n \in f_\varepsilon(B_n)$.
(ii) Finalmente supongamos que $y \in B - J^\circ$ y $y \notin E(J)$. Entonces existe $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $y_n \to y$ y $y_n \in B_n - J^\circ$, entonces $y_n \in f_\varepsilon(B_n)$.
Por lo anterior, hemos demostrado que $f_\varepsilon(B) = (B - J^\circ) \cup \varphi(B \cap J) \subset \liminf(f_\varepsilon(B_n))$.
Ahora demostremos que $\limsup((B - J^\circ) \cup \varphi(B \cap J)) \subset (B - J^\circ) \cup \varphi(B \cap J)$.
Sea $x \in \limsup((B_n - J^\circ) \cup \varphi(B_n \cap J))$ y supongamos que $x \in B_n \cap J$ y $x \in J^\circ$, entonces existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in B_{n_k} \cap J$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $x_{n_k} \to x$. Ya tenemos que $x \in J$, falta ver que $x \in B$. Supongamos que $x \notin B$, entonces tenemos que $d(x, B) > 0$. Sea $\varepsilon_1 = \frac{d(x,B)}{2}$. Como $B_n \to B$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se cumple que $H(B_n, B) < \varepsilon_1$, así para cada $n \geq N$ tenemos que $B_n \in N(\varepsilon_1, B)$ y $B \in N(\varepsilon_1, B_n)$.
Como $n_1 < n_2 < \cdots$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente tenemos que existe n_r tal que $n_r > N$y por lo tanto $x_{n_r} \in B_{n_r}$ y además $x_{n_r} \in N(\varepsilon_1, B)$, así existe $b \in B$ tal que $d(x_{n_r}, b) < \varepsilon_1$ y $d(x_{n_r}, x) < \varepsilon_1$. Por lo tanto tenemos que $d(x, b) \leq d(x, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, b) < 2\varepsilon_1 = d(x, B)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in B$, y así $x \in B \cap J$, por lo cual $x \in \varphi(B \cap J)$.
Por otro lado si $x \in B_n \cap J$ y $x \in E(J)$, tenemos al igual que en el párrafo anterior, que $x \in B$ y por lo tanto $x \in B \cap J$, así $x \in \varphi(B \cap J)$.
Finalmente cuando $x \in B_n - J^\circ$ y $x \notin E(J)$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $y_n \to x$ con $y_n \in B_n - J^\circ$, por lo tanto $x \in B - J^\circ$ y así $x \in f_\varepsilon(B)$ Por lo anterior concluimos que $\limsup((B - J^\circ) \cup \varphi(B \cap J)) \subset (B - J^\circ) \cup \varphi(B \cap J)$.

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f_\varepsilon(B_n) = f_\varepsilon(B)$.

Finalmente, f_ε es ε-cercana a la función identidad en 2^X (con H) dado que $diám_d(J) < \varepsilon$. Por lo tanto, hemos probado que 2^X_K es un Z-conjunto en 2^X en el caso cuando K contiene un arco libre en X.

Caso 2. K no contiene arcos libres en X.

Probaremos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua g_ε, de 2^X en $2^X - 2^X_K$ tal que g_ε es ε-cercana a la función identidad en 2^X (con H).

Sea $\varepsilon > 0$. Recordemos de las hipótesis del teorema que $K^\circ \neq \emptyset$; sea $p \in K^\circ$. Por el teorema 2.3.1, $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, donde $n < \infty$, cada X_i es un continuo localmente conexo y $diám_d(X_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ para cada i.

Definimos el siguiente conjunto, llamado la estrella de p con respecto a $X_1, \dots, X_n$, como sigue:

$$St(p) = \bigcup \{X_i : p \in X_i\}.$$

Sin pérdida de generalidad (recuerde que $p \in K^\circ$), supongamos que ε es lo suficientemente pequeño tal que $St(p) \subset K$ y $St(p) \neq X$. Sea

$$\mathcal{C} = \{X_j : p \notin X_j \text{ y } X_j \cap St(p) \neq \emptyset\}.$$

Dado que $St(p) \neq X$ y $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ es conexo, se tiene que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Para cada $X_j \in \mathcal{C}$, sea $p_j \in X_j \cap St(p)$; note que los puntos p_j realmente existen (dado que $\mathcal{C} \neq \emptyset$). Por el teorema 2.3.11, $St(p)$ es un continuo localmente conexo. Por lo tanto, por el teorema 2.3.4, existe un arco A_j en $St(p)$ de p a cada uno de los puntos p_j elegidos anteriormente. Sea $A = \bigcup A_j$ y sea

$$Y = A \cup (\bigcup \mathcal{C}).$$

Se sigue nuevamente del teorema 2.3.11 que Y es un continuo localmente conexo. Por lo tanto, por el teorema 3.1.14, $C(Y)$ es un AR.

Notemos que

$$\overline{[X - St(p)]} \cap St(p) \subset Y. \tag{3.1}$$

En efecto, sea $z \in \overline{[X - St(p)]} \cap St(p)$. Sea $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $X - St(p)$ tal que $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a z. Dado que $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ y $n < \infty$, existe m tal que $z_k \in X_m$ para una cantidad infinita k. Esto implica que X_m tiene las siguientes tres propiedades: (i) $z \in X_m$; (ii) $p \notin X_m$ (dado que $z_k \notin St(p)$ para cualquier k); (iii) $X_m \cap St(p) \neq \emptyset$ (por (i) dado que $z \in St(p)$). Por (ii) y (iii), $X_m \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, por (i), $z \in Y$. Esto prueba 3.1.

Definimos $\alpha : Y \to C(Y)$ como sigue:

$$\alpha(y) = \{y\} \text{ para todo } y \in Y.$$

Entonces, dado que $C(Y)$ es un AR, por el teorema 3.1.3, α puede ser extendida a una función continua $\beta : St(p) \cup Y \to C(Y)$. Además tenemos que $i : \overline{X - [St(p) \cup Y]} \to C(X)$ dada por $i(x) = \{x\}$ para cada $x \in \overline{X - [St(p) \cup Y]}$ es una función continua.
Notemos que

$$(St(p) \cup Y) \cap \overline{X - [St(p) \cup Y]} = Fr(St(p) \cup Y) \subset Fr(St(p)) \cup Fr(Y).$$

Por 3.1 tenemos que $Fr(St(p)) \subset Y$ y, como Y es cerrado, $Fr(Y) \subset Y$. Por lo tanto, $(St(p) \cup Y) \cap \overline{X - [St(p) \cup Y]} \subset Y$.
Así, si $x \in (St(p) \cup Y) \cap \overline{X - [St(p) \cup Y]}$, se tiene que $x \in Y$ y por lo tanto $\beta(x) = \{x\} = i(x)$.
Por [11, Teorema 9.4, pág. 83] existe una función continua γ, dada por

$$\gamma(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{si} \quad x \in St(p) \cup Y \\ \{x\}, & \text{si} \quad x \in \overline{X - [St(p) \cup Y]}. \end{cases}$$

la cual es una extensión de β e i.

Ahora, utilizando la función γ definimos la función g_ε dada por: para cada $B \in 2^X$, sea

$$g_\varepsilon(B) = \bigcup \{\gamma(b) : b \in B\}.$$

Probaremos que g_ε tiene las siguientes tres propiedades:

(a) g_ε es una función de 2^X en 2^X y g_ε es continua;

(b) $K \not\subset g_\varepsilon(B)$ para todo $B \in 2^X$;

(c) g_ε es ε-cercana a la función identidad en 2^X (con H).

Prueba de **(a)**: Sea $B \in 2^X$. Dado que γ es una función continua de X en $C(X)$, $\gamma(B)$ es un subconjunto compacto no vacío de $C(X)$; por lo tanto, $\gamma(B) \in 2^{2^X}$. Entonces, dado que $g_\varepsilon(B) = \bigcup \gamma(B)$, observamos que por [6, Teorema 3.26], $g_\varepsilon(B) \in 2^X$. Esto prueba que g_ε enviá a 2^X en 2^X. El hecho de que g_ε es continua se sigue de la continuidad de γ y de [6, Teorema 3.26] como sigue. Sea u la función unión descrita en [6, Teorema 3.26]. Sea $\gamma^* : 2^X \to 2^{2^X}$ definida por

$$\gamma^*(B) = \gamma(B) \text{ para todo } B \in 2^X.$$

Observamos que $g_\varepsilon = u \circ \gamma^*$; también, γ^* es continua (por la continuidad de γ y por [14, Teorema 1.3]) y u es continua. Por lo tanto, g_ε es continua. Esto prueba **(a)**.

Prueba de **(b)**: La razón de que (b) es verdadero es que $St(p) \not\subset Y$. Aquí los detalles. Primero probemos que

$$St(p) \not\subset Y. \tag{3.2}$$

Para usarse en la prueba de 3.2, sea $U = X - \bigcup\{X_i : p \notin X_i\}$. Note que

$$U \subset St(p) - \bigcup \mathcal{C}.$$

Por lo tanto, para probar 3.2, es suficiente demostrar que $U - A \neq \emptyset$ (dado que $Y = A \cup (\bigcup \mathcal{C})$). Recuerde que A fue definido como la unión de los arcos en $St(p)$ y que $St(p) \subset K$; también, recuerde nuestra hipótesis de que K no contiene arcos libres en X. Por lo tanto, A es la unión finita de arcos cada uno de los cuales tiene interior vacío en X. Por lo tanto, por el teorema de Baire [16, pág. 414], $A^\circ = \emptyset$. Entonces, dado que U es claramente no vacío y abierto en X, tenemos que $U \not\subset A$; *i.* e., $U - A \neq \emptyset$. Por lo tanto hemos probado 3.2.

Ahora, completemos la prueba de (b). Por 3.2, existe un punto $q \in St(p) - Y$. Recuerde la fórmula para γ y el hecho de que β es una función que va de $St(p) \cup Y$ en $C(Y)$. Entonces podemos observar que $q \notin \gamma(x)$ para cualquier $x \in X$. Por lo tanto, por la fórmula para g_ε, $q \notin g_\varepsilon(B)$ para cualquier $B \in 2^X$. Por lo tanto, dado que $q \in St(p) \subset K$, $K \not\subset g_\varepsilon(B)$ para cualquier $B \in 2^X$. Esto prueba **(b)**.

Prueba de **(c)**: Observemos que el $diám_d[St(p) \cup Y] < \varepsilon$. Por lo tanto, por la fórmula para γ y el hecho de que β es una función de $St(p) \cup Y$ en $C(Y)$, observamos que

$$diám[\{x\} \cup \gamma(x)] < \varepsilon \text{ para todo } x \in X.$$

Entonces, para cualquier $B \in 2^X$, se sigue que $B \subset N_d(\varepsilon, g_\varepsilon(B))$ y $g_\varepsilon(B) \subset N_d(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $H(g_\varepsilon(B), B) < \varepsilon$ para todo $B \in 2^X$ (teorema 1.2.12). Esto prueba **(c)**.

Por **(a)**, **(b)** y **(c)**, 2^X_K es un Z-conjunto en 2^X.

La prueba del teorema para $C_K(X)$ es una adaptación de lo hecho para

2^X. Considere la función $g_\varepsilon|_{C(X)}$, donde g_ε es como se definió anteriormente. Probaremos que $g_\varepsilon|_{C(X)}$ es una función de $C(X)$ en $C(X)$. Sea $B \in C(X)$. Entonces, dado que $\gamma : X \to C(X)$ es continua, $\gamma(B)$ es un subcontinuo de $C(X)$; *i.* e., $\gamma(B) \in C\,[C(X)]$. Entonces, dado que $g_\varepsilon = \bigcup \gamma(B)$, por [14, Ejercicio 11.5] tenemos que $g_\varepsilon(B) \in C(X)$. Por lo tanto, en vista de los incisos (a), (b) y (c) anteriores, se sigue que $C_K(X)$ es un Z-conjunto en $C(X)$. $\square$

3.3. El teorema de Curtis y Schori

Existen tres partes del teorema de Curtis y Schori; las dos primeras partes son de importancia primaria, mientras que la tercera parte es un caso especial del teorema de Edwards, el cual enunciamos en 3.3.1Con respecto a la terminología en la tercera parte del teorema de Curtis y Schori, un *factor del cubo de Hilbert* es un espacio, Y, tal que $Y \times I^\infty \approx I^\infty$.
Para la demostración de la parte (3) del teorema de Curtis y Schori se necesita el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 (Edwards)**.** *[12] Todo AR es un factor del cubo de Hilbert.*

A continuación presentamos uno de los resultados principales.

Teorema 3.3.2 (Curtis y Schori)**.** *Sea X un continuo localmente conexo no degenerado. Entonces*

(1) *2^X es el cubo de Hilbert,*

(2) *$C(X)$ es el cubo de Hilbert cuando no existen arcos libres en X, y*

(3) *$C(X) \times I^\infty$ es homeomorfo a I^∞.*

Demostración. **(1)** La prueba se basa en el teorema de Toruńczyk en 3.1.13. Recurriendo a la primera hipótesis de 3.1.13, notamos primeramente que por el teorema 3.1.14, 2^X y $C(X)$ son retractos absolutos.
Verificaremos la segunda hipótesis en 3.1.13 para 2^X y después para $C(X)$. Para esto, asumamos por el teorema 2.3.6 que d es una métrica convexa para X.
Sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo a 3.1.13, debemos probar que existe un Z-función de 2^X en 2^X que es ε-cercana a la función identidad en 2^X. Definimos $\Phi_\varepsilon : 2^X \to 2^X$ como sigue (vea la definición 2.3.8):

$$\Phi_\varepsilon(A) = C_d(\varepsilon, A) \text{ para todo } A \in 2^X.$$

Por el teorema 2.3.9, Φ_ε es continua. Observemos que $A \subset C_d(\varepsilon, A)$, por lo tanto Φ_ε es ε-cercana a la función identidad en 2^X (con H). Finalmente, demostremos que Φ_ε es una Z-función. Dado que X es compacto, existe una cantidad finita de puntos, $p_1, \ldots, p_n$ de X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} C_d\left(\tfrac{\varepsilon}{2}, \{p_i\}\right).$$

Sea $K_i = C_d\left(\frac{\varepsilon}{2}, \{p_i\}\right)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por la primera parte del teorema 3.2.3, $2^X_{K_i}$ es un Z-conjunto en 2^X para cada i. Por lo tanto, por el teorema 3.1.12, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} 2^X_{K_i}$ es un Z-conjunto en 2^X. Para cada $A \in 2^X$,como $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, se tiene que existe j tal que $\Phi_\varepsilon(A) \in 2^X_{K_j}$; en otras palabras,

$$\Phi_\varepsilon(2^X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} 2^X_{K_i}.$$

Entonces, por el teorema 3.1.12 tenemos que un subconjunto cerrado de un Z-conjunto es un Z-conjunto, así $\Phi_\varepsilon(2^X)$ es un Z-conjunto en 2^X. Por lo tanto, hemos probado que Φ_ε es una Z-función.
Por lo tanto, habiendo verificado la hipótesis de 3.1.13, tenemos que 2^X es el cubo de Hilbert. Esto prueba la parte (1) del teorema.
(2) Ahora, demostremos la parte (2) del teorema. Supongamos que no existen arcos libres en X. La prueba de que $C(X)$ satisface la segunda hipótesis de 3.1.13 es una simple adaptación de lo que ya hicimos para 2^X. A saber, sea Φ_ε como se definió anteriormente, y sea $\varphi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon|_{C(X)}$. Por el teorema 2.3.10, φ_ε es una función de $C(X)$ en $C(X)$. De las propiedades de Φ_ε, obtenemos que φ_ε es continua y que φ_ε es ε-cercana a la función identidad en $C(X)$. Para ver que φ_ε es una Z-función, sea $W_i = C_d\left(\frac{\varepsilon}{2}, \{p_i\}\right)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces por la segunda parte del teorema 3.2.3, $C_{K_i}(X)$ es un Z-conjunto en $C(X)$ para cada i. Por lo tanto, por el teorema 3.1.12, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{K_i}(X)$ es un Z-conjunto en $C(X)$. Para cada $B \in C(X)$, como $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, se tiene que existe j tal que $\varphi_\varepsilon(B) \in C_{K_i}(X)$; en otras palabras,

$$\varphi_\varepsilon(C(X)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_{K_i}(X).$$

Entonces, por el teorema 3.1.12 tenemos que un subconjunto cerrado de un Z-conjunto es un Z-conjunto, así $\varphi_\varepsilon(C(X))$ es un Z-conjunto en $C(X)$. Por

lo tanto, hemos probado que φ_ε es una Z-función.
Por lo tanto, habiendo verificado la hipótesis de 3.1.13, nuevamente tenemos que $C(X)$ es el cubo de Hilbert. Esto prueba la parte (2) del teorema.
(3) Para la parte (3) del teorema observemos que por el teorema 3.1.14, $C(X)$ es un retracto absoluto, también por el Corolario 3.1.4, I^∞ es un retracto absoluto. Por [4, Teorema 7.1, pág. 92], $C(X) \times I^\infty$ es un retracto absoluto. Por lo tanto, por el teorema 3.3.1, tenemos que $C(X) \times I^\infty$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. $\square$

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo Coahuila, 1994.

[2] R. D. Anderson, *On topological infinite deficiency*, Mich. Math. J. 14, 1967, 365-383.

[3] R. H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc. 55, 1949, 1101-1110.

[4] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne, Vol. 44, Polish Scientific Publishers, Warszawa, Poland, 1967.

[5] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[6] V. Córdova Salazar, *Elementos básicos de Hiperespacios de Conjuntos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.

[7] D. W. Curtis y R. M. Schori, 2^X *and* $C(X)$ *are homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 1974, 927-931.

[8] D. W. Curtis y R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101, 1978, 19-38.

[9] R. Duda, *On convex metric spaces III*, Fund. Math. 51, 1962, 23-33.

[10] R. Duda, *On convex metric spaces V*, Fund. Math. 68, 1970, 87-106.

[11] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.

[12] R. D. Edwards, *Characterizing infinite dimensional manifolds topologically*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 770, Séminaire Bourbaki (Ed. by A. Dold and B. Eckmann), Springer-Verlag, Berlin, 1980, 278-302

[13] D. Herrera Carrasco, *Hiperespacios de Dendritas*, Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.

[14] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1999.

[15] I. L. Iribarren T., *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, Noriega Editores, 2008.

[16] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Acad. Press, New York, N.Y., 1966.

[17] F. B. Mendoza, *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[18] K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. 100, 1928, 75-163.

[19] E. E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1111-1121.

[20] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An Introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[21] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1978.

[22] R. M. Schori y J. E. West, 2^I *is homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1972, 402-406.

[23] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fund. Math. 106, 1980, 31-40.

[24] M. Wojdyslawski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math. 32, 1939, 184-192.

Índice de conceptos