Estática

Estática

Introducción

Este curso tiene como objetivo proporcionar las bases de la Estática, especificamente las condiciones de equilibrio de los cuerpos rigidos y las bases teoricas y practicas para las asignaturas subsecuentes en la carrera de ingenieria civil.

Objetivo del curso

El objetivo del curso es preparar al estudiante para analizar los sistemas de fuerzas externas para plantear las ecuaciones fundamentales de la estática y resolver el equilibrio externo de los cuerpos rígidos. Así mismo, el estudiante adquirirá las siguientes habilidades como base para su desarrollo en el área de estructuras:

- Podrá analizar la estabilidad cinemática de un cuerpo rígido para determinar si este es hipostático, isostático o hiperestático.
- Tendrá la capacidad para analizar las condiciones de apoyo de un cuerpo rigido respecto a otro y determinar las fuerzas externas que actuan en él.
- Será capaz de elaborar diagramas de cuerpos libres.
- El estudiante será capaz de definir y analizar el equilibrio externos de cuerpos rígidos.
- Podrá analizar armaduras planas por el método de los nudos y el método de las secciones.

Capítulo 1.- Nociones fundamentales y axiomas de la estática

Introducción

En este capítulo se abordarán las bases en las que se fundamenta el estudio de la estática así como los conceptos básicos para comprender los temas posteriores.

1.1.- Introducción a la mecánica y a la estática.

Apuntes culturales

En la mecánica newtoniana, los conceptos de espacio, tiempo y masa son independientes entre sí; pero el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres.

El estudio de la mecánica elemental descansa en seis principios fundamentales basados en la evidencia experimental:

- La ley del paralelogramo para la suma de fuerzas.
- El principio de transmisibilidad.
- Las tres leyes fundamentales de Newton.
- Ley de gravitación de Newton.

El desarrollo de la industria que exige la resolución de nuevos problemas técnicos, contribuyó al desarrollo de partes especiales de la Mecánica Teórica, que actualmente se presentan en forma independiente (Hidrodinámica, Aerodinámica y Dinámica de los Gases, Teoría de la elasticidad y plasticidad, Resistencia de Materiales, etc.), pero los métodos de resolución de los problemas que estudian éstas se basan en los de la Mecánica Teórica.

La Mecánica se divide en tres partes: Estática, Cinemática y Dinámica.

La Estática estudia el equilibrio de los cuerpos materiales y la reducción del sistema de fuerzas a un aspecto elemental.

La Cinemática estudia el movimiento de los cuerpos materiales desde el punto de vista geométrico, es decir, sin considerar las causas que provocaron este movimiento.

La Dinámica estudia el movimiento de los cuerpos materiales relacionado con las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

Lectura facilitada

La Mecánica Teórica, estrechamente vinculada con la actividad del hombre es una de las ciencias más antiguas. Aunque los escritos conocidos datan del siglo IV antes de nuestra era, los restos de las antiguas construcciones permiten afirmar que algunas nociones de la Mecánica eran conocidas por los hombres mucho antes.

Al principio la Mecánica se desarrolló principalmente en la rama de la Estática, es decir, del equilibrio de los cuerpos materiales. En el siglo III antes de nuestra era, en especial en las obras de Arquímedes (287-212 ane) fueron establecidas las bases científicas de la estática. Arquímedes dio la solución exacta del problema acerca del equilibrio de la palanca, creó la teoría sobre el centro de gravedad, descubrió la ley de la hidrostática que lleva su nombre, etc.

El período transcurrido entre Arquímedes y Newton, de casi dos mil años, puede caracterizarse en rasgos generales, como el período de acumulación de una enorme cantidad de material experimental referente a los diversos movimientos mecánicos (en especial, al movimiento de los cuerpos celestes) y de desarrollo lento, pero seguro, de los conocimientos matemáticos. El material experimental acumulado, el desarrollo de las matemáticas, los descubrimientos de Copérnico, Kepler y especialmente de Galileo, antecesores inmediatos de Newton, así como a las exigencias de la industria en desarrollo, de la navegación, del arte militar, etc., fueron las premisas objetivas que condujeron a Newton al descubrimiento de las leyes generales de la Mecánica (las cuales llevan su nombre) y la creación del aparato matemático (cálculo diferencial e integral) que permitió emplear estas leyes generales y sus efectos para la resolución de tareas prácticas.

La validez de los principios fundamentales planteados por Newton permaneció sin discusión hasta que Einstein formuló su Teoría de la Relatividad.

Los conceptos básicos empleados en mecánica son espacio, tiempo, masa y fuerza.

El concepto de espacio se asocia con la noción de la posición de un punto P. La posición de P puede ser definida por tres longitudes medidas desde cierto punto de referencia u origen, en tres direcciones dadas, conocidas como las coordenadas de P.

Para definir un acontecimiento no es suficiente con indicar su posición en el espacio, sino también debe conocerse el tiempo en que transcurre.

El concepto de masa se usa para caracterizar y comparar los cuerpos sobre las bases de ciertos experimentos mecánicos fundamentales.

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro. Puede ser ejercida por contacto directo o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y las magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su punto de aplicación, su magnitud y su dirección y puede representarse por un vector.

Actividad 1

Actividad 1 Introducción a la mecánica

Objetivo:

Comprender los aspectos fundamentales y el campo de estudio de la estática como área de la mecánica.

Actividad:

Responder el siguiente cuestionario.

Cuestionario

¿Cuáles son las partes en las que se divide la mecánica que són de interes para esta asignatura?

- ○ Mecánica cuántica, mecánica relativista, mecánica elemental
- ○ Estática, cinemática, dinámica
- ○ hidrodinámica, aerodinámica, mecánica teórica

Es la parte de la mecánica que se estudia el equilibrio de los cuerpos materiales y la reducción del sistema de fuerzas a un aspecto elemental.

- ○ Estática.
- ○ Cinemática.
- ○ Dinámica.

Es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos materiales relacionado con las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

- ○ Estática.
- Dinámica.

- ◯
- ◯ Cinemática.

Es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos materiales desde el punto de vista geométrico, es decir, sin considerar las causas que provocaron este movimiento.

- ◯ Cinemática.
- ◯ Estática.
- ◯ Dinámica.

ENVIAR RESPUESTAS

1.2.- Definiciones fundamentales

listado de definiciones fundamentales para la estática

Para lograr que el contenido del curso sea lo más entendible posible hay que aclarar y definir los siguientes conceptos:

\+ -

» Equilibrio

» Cuerpo rígido

» Fuerza

» Cuerpo libre

» Sistemas equivalentes

» sistema equilibrado

» Resultante de un sistema

» Equilibrante

» Fuerza repartida

» Fuerza concentrada

Ejemplo 1

Calcular la resultante de tres fuerzas O, P y Q cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son:

1.3.- Axiomas de la estática

Para comenzar...

Para comenzar es necesario conocer los axiomas en los que se fundamenta el estudio de la estatica, los cuales se enuncian a continuación

Axiomas básicos para la estática

\+ -

» Axioma 1

» Axioma 3

\+ -

» Axioma 2

» Axioma 4

actividad 2

Actividad 2: Axiomas de la estática

Objetivo:

Reconocer los axiomas en los que se fundamenta el estudio de la estática.

Actividad:

El alumno deberá completar los enunciados presentados a continuación colocando el número de axioma que corresponde en la lista desplegable.

Actividad desplegable

Lea los siguientes enunciados e identifique el axioma del que se está comentando. para ello, cada espacio cuenta con una lista desplegable de las opciones permitidas.

Axioma : Dos fuerzas aplicadas a un cuerpo en un punto tienen una resultante aplicada en el mismo punto y representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre estas fuerzas como lados.

Axioma : Si dos fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido libre, éste permanecerá en equilibrio sólo si las dos fuerzas son iguales, colineales y de sentido contrario.

Axioma : La acción de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo rígido no se modificará si se le agrega o se le quita un sistema de fuerzas en equilibrio.

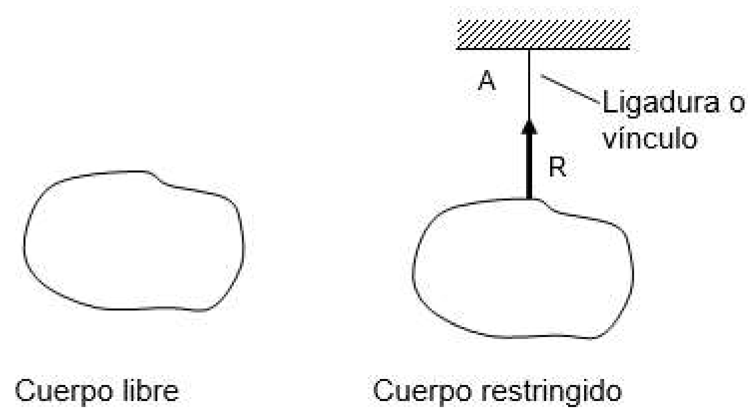
Axioma : Toda acción de un cuerpo material sobre otro trae consigo, por parte de este último, una reacción de la misma magnitud, pero de sentido contrario.

Comprobar Mostrar retroalimentación

Lee detenidamente cada enunciado para contestar.

1.4.- Ligaduras y sus reacciones

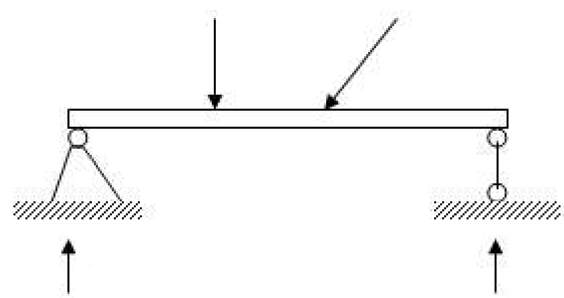
Condiciones de apoyo



Un cuerpo no ligado con otro cuerpo y que puede desplazarse arbitrariamente por el espacio se llama libre. Un cuerpo cuyos desplazamientos se ven restringidos, sea por encontrarse enlazado con otros cuerpos o por encontrarse en contacto con ellos se llama no libre. Todo lo que restringe el desplazamiento se llama ligadura o vínculo. Para impedir el movimiento la ligadura desarrolla una fuerza que se llama reacción.

Podemos distinguir actuando sobre un cuerpo dos tipos de fuerzas:

- Activas
- Reactivas



Las activas no dependen en magnitud y sentido de otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Las reacciones sí. La dirección de la reacción es siempre igual al movimiento impedido y de sentido contrario.

Suponiendo que las ligaduras están hechas de materiales rígidos y sin rozamiento en los puntos de contacto con los cuerpos, las reacciones de las ligaduras más frecuentes son:

+ -

- Superficie Lisa
- Articulación en el plano
- Apoyo simple
- Barra articulada en sus extremos
- Empotramiento
- Articulación espacial

Los apoyos utilizados con mayor frecuencia son los apoyos simples, las articulaciones y los empotramientos.

Actividad 3

Actividad 3: ligaduras y reacciones

Objetivo:

Por medio de esta actividad se evaluará los conocimientos adquiridos sobre los diferentes tipos de ligadura y las reacciones que producen.

Actividad:

El estudiante deberá contestar los siguientes cuestionarios.

Cuestionario 1

Es una condición de apoyo que restringe un solo movimiento translacional

- ◯ Apoyo simple
- ◯ Articulación
- ◯ Empotramiento.

Es una condición de apoyo que puede restringir un movimiento rotacional y dos movimientos translacionales.

- ◯ Apoyo simple
- ◯ Articulación
- ◯ Empotramiento

Es una condición de apoyo que impide dos movimientos translacionales sin tener restricciones rotacionales.

- ◯ Apoyo simple
- Articulación

○

○ Empotramiento

ENVIAR RESPUESTAS

Cuestionario 2

Lee atentamente cada enunciado e identifica si es verdadero o es falso.

Un cuerpo libre es el que se encuentra ligado con otro cuerpo y no puede desplazarse arbitrariamente

○ Verdadero ○ Falso

Falso

se le llama ligadura a todo objeto o vinculo que restringe el desplazamiento de un cuerpo respecto a otro, y esta a su vez produce una reacción para impedir los movimientos.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Capítulo 2.- Sistemas de fuerzas concurrentes en el espacio

Sistemas de fuerzas concurrentes en el plano

Introducción al capitulo:

En este capitulo se detallará la manera de analizar un sistema de fuerzas aplicados en un mismo punto.

2.1.- Sistemas de fuerzas concurrentes

2.1.- Métodos geométricos de composición de fuerzas

Introducción:

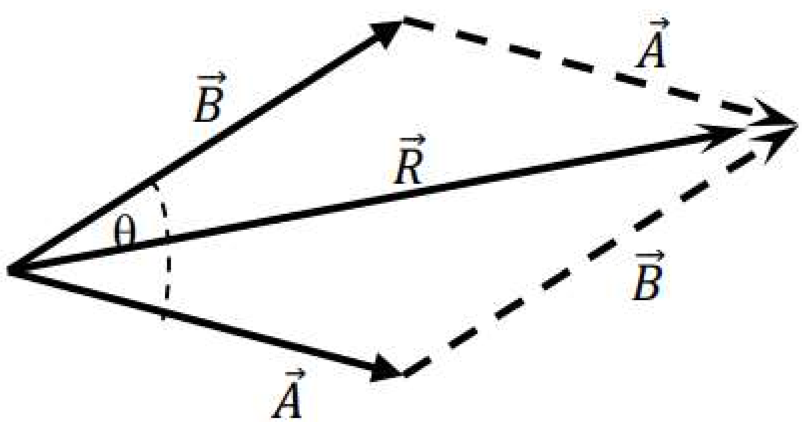
Debido a que las fuerzas son representadas por vectores, estas cuentan con las cuatro caracteristicas basicas de un vector: magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación. Para el analisis de un sistema de fuerzas que se aplican en un punto, es posible analizarlos por distintos metodos.

existen varios metodos para la solución analitica o numerica de vectores, los cuales son: los que tienen una base geometria, el método de descomposición o de ejes cartesianos y el método vectorial

Los métodos que tienen una base geométrican consisten en la obtención de la resultante de dos fuerzas mediante la suma geometrica de dichas fuerzas utilizando la regla del paralelogramo, la ley de los senos y cosenos, el teorema de pitagoras, etc.

2.1.1.- Metodo del paralelogramo

El método del paralelogramo se puede aplicar para obtener la fuerza resultante de dos fuerzas separadas por un angulo cualquiera e indica que la resulante al cuadrado de dos vectores es igual a la suma de los dos vectoresal cuadrado mas el doble producto de amobs vectores por el coseno del ángulo que separa los mismos.

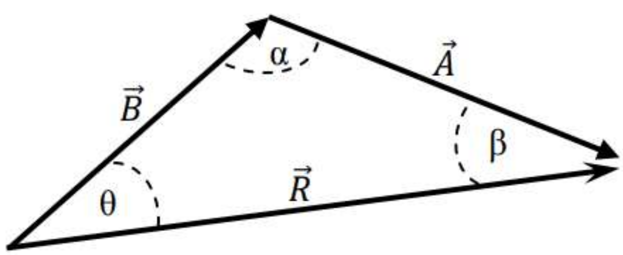


$$R^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\theta$$

En la imagen anterior se puede apreciar como al trazar los dos vectores A y B, y desde la punta de cada vector trazar el otro, se llega a una forma de paralelogramo donde la resultante R es igual al cuadrado de la diagonal principal.

2.1.2.- Ley de senos

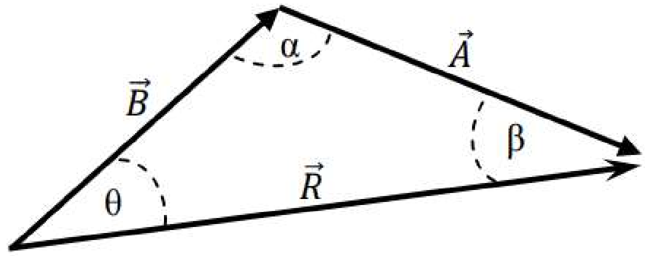
El método de la ley de senos se puede aplicar para obtener la resultante de dos fuerzas, para ello se debe trazar un triangulo donde el primer lado será igual al trazo de un vector cualquiera, desde la punta trazar el siguiente y finalmente trazar una recta desde el inicio del primer vector hasta el final del segundo. Con ello formamos un triangulo. La ley de senos nos dice que los cocientes de cualquiera de sus lados entre el ángulo opuesto a estos son iguales entre sí. Para utilizar este método es necesario conocer al menos dos ángulos y la magnitud de uno de los vectores.



$$\frac{R}{sen\alpha} = \frac{B}{sen\beta} = \frac{A}{sen\theta}$$

2.1.3.- Ley de cosenos

La ley de cosenos tiene un planteamiento similar al de la ley de senos, sin embargo para aplicar este método es necesario conocer la magnitud de los dos vectores y el angulo que existe entre ellos. La ley de los cosenos nos dice que el cuadrado de la resultante R es igual a la suma de los cuadrados de los vectores A y B menos el doble producto de dichos vectores multiplicado por el coseno del ángulo que existe entre ellos.



$$R^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

Recursos adicionales

Video de apoyo 1

https://www.youtube.com/embed/e2_WDo5yK_Q <https://www.youtube.com/embed/e2_WDo5yK_Q>

Matemáticas profe alex <https://www.youtube.com/c/MatematicasprofeAlex> . *Ley de seno | Introducción* <https://www.youtube.com/watch?v=e2_WDo5yK_Q> (CC0 <http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.es>)

Video de apoyo 2

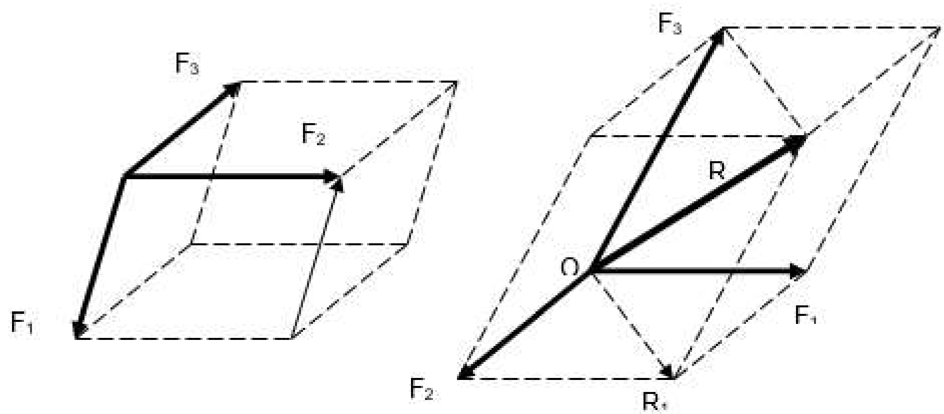
https://www.youtube.com/embed/65RP6V0hsy4 <https://www.youtube.com/embed/65RP6V0hsy4>

Matemáticas profe Alex <https://www.youtube.com/c/MatematicasprofeAlex> . *Ley de cosenos | Introducción* <https://www.youtube.com/watch?v=65RP6V0hsy4> (CC0 <http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.es>)

2.2.- Composicion de tres fuerzas no coplanares

Composición de tres fuerzas no coplanares

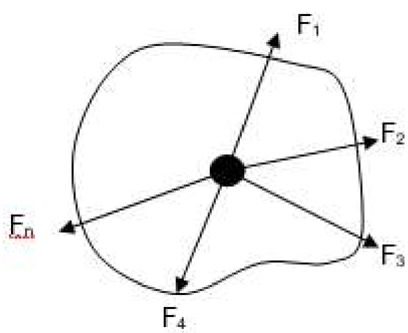
Para la composición de 3 fuerzas no coplanares se puede realizar mediante los metodos para fuerzas concurrentes en el plano realizandolos de manera subsecuente, es decir al momento de calcular la resultante de dos fuerzas, calcular la resultante de esta con la tercera. De la misma manera se puede extender este procedimiento a un numero arbitrario de fuerzas a considerar.

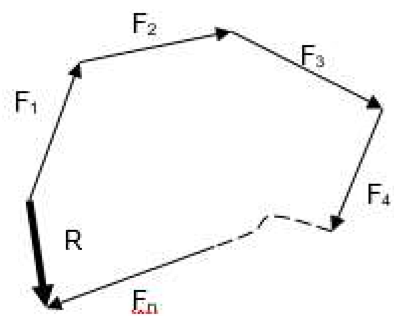


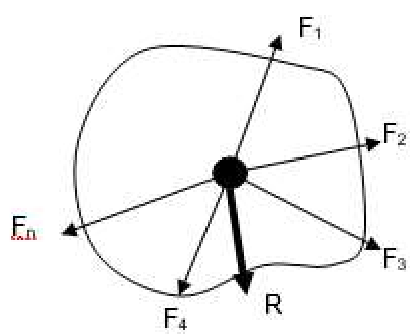
2.3.- Composición de multiples fuerzas en el plano

Composición de múltiples fuerzas en el plano

El metodo gráfico para la composición de múltiples fuerzas consiste en trazar los vectores de cada fuerza, respetando magnitud, dirección y sentido, una tras otra. La resultante será igual al vector que uniría el punto inicial del primer vector con el punto final, sin importar el orden en que se agregan los vectores.







$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \Sigma F_k$$

2.4.- Descomposición de fuerzas.

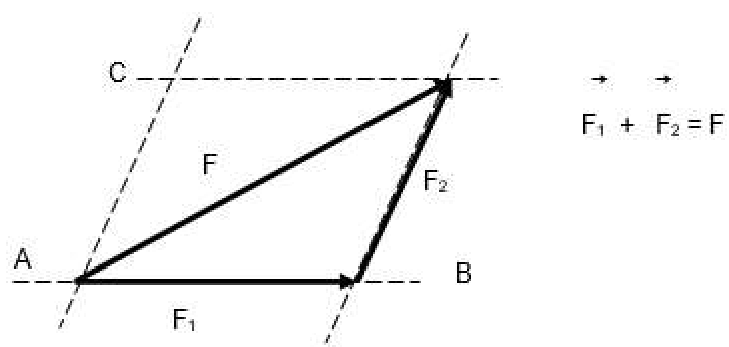
Descomposición de fuerzas

De la misma manera en que se puede obtener la resultante de un sistema de fuerzas., una fuerza puede descomponerse en un sistema de fuerzas cuya resultante sea la fuerza que estamos descomponiendo.

De este analisis, los dos casos particulares más interesantes son:

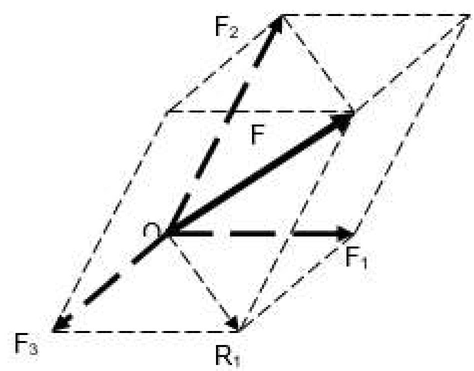
- La descomposición de una fuerza según dos direcciones dadas.

Al tener una fuerza F y dos direcciones dadas, se pueden trazar los planos de dichas direcciones donde los cruces de estos planos definiran los vectores que componen dicha fuerza F.



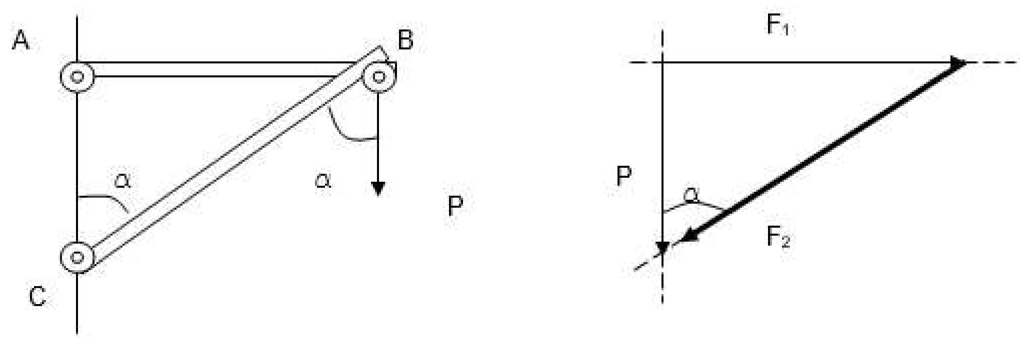
- La descomposición de fuerzas en tres direcciones dadas.

al tener una fuerza F compuesta en un espacio tridimensional, se deben trazar los planos correspondientes a las tres direcciones dadas, de tal manera que se defina un paralelepipedo cuyas aristas definen los vectores que componen a la fuerza F.



El método de descomposición de fuerzas puede aplicarse para determinar las reacciones que una fuerza conocida produce sobre las ligaduras. Para ello es necesario descomponer la fuerza conocida en la dirección de las ligaduras.

Ejemplo 1.- determinar las fuerzas desarrolladas por la carga *P* en las ligaduras *A-B* y *C-B*.



ejemplo 1 descomposición de fuerzas (CC BY <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Si $P = 100\ kgf$ y $\alpha = 60°$

Entonces:

$$F_1 = \frac{P}{\sin(\alpha)} \qquad F_2 = P\ \tan(\alpha)$$

$$F_1 = \frac{100\ kgf}{\sin(60°)} = 115.43\ kgf$$

$$F_2 = 100\ kgf\ \tan(60°) = 173.20\ kgf$$

Mostrar retroalimentación

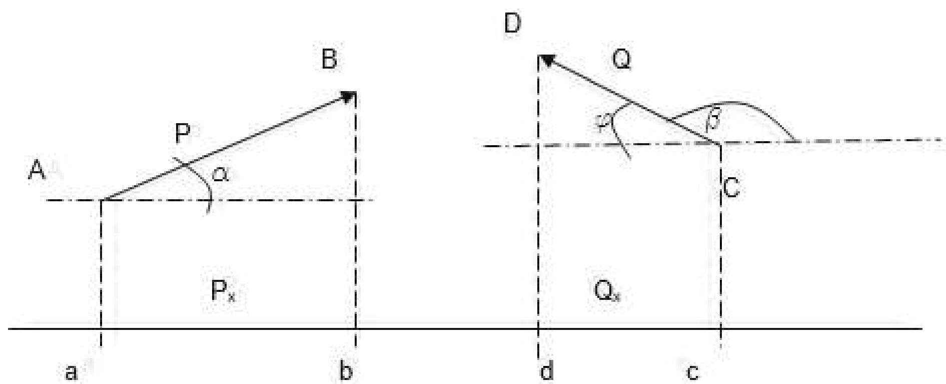
$$P = 100kg$$

2.5.- Proyección de una fuerza sobre un plano

Proyección de una fuerza sobre un eje de un plano.

El método analítico para resolver el problema se basa en el siguiente concepto:

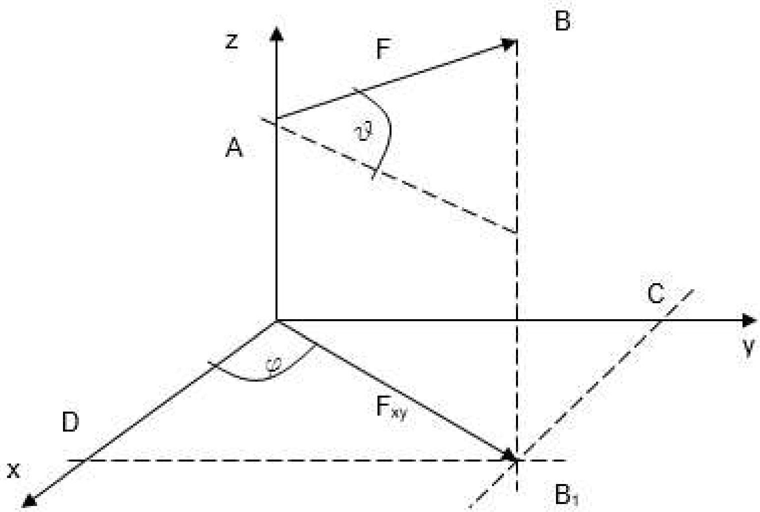
La proyección de una fuerza sobre un eje es una magnitud escalar igual a la longitud del segmento, tomado con el signo correspondiente, que se encuentra entre las proyecciones del origen y del extremo de la fuerza sobre dicho eje.



$$Px = ab = P\cos\alpha \qquad Qx = cd = Q\cos\phi = -Q\cos\alpha$$

La proyección de una fuerza sobre un eje equivale al producto del módulo de la fuerza por el coseno del ángulo formado por la dirección de la fuerza y el sentido positivo del eje.

Si el ángulo entre la dirección de la fuerza y el sentido positivo del eje es agudo la proyección será positiva y si el ángulo es obtuso, negativa. Si el ángulo es recto la proyección vale cero.



Se llama proyección de una fuerza F sobre un plano oxy al vector Fxy = OB1 limitado por las proyecciones del origen y del extremo de la fuerza F sobre este plano.

De este modo la proyección de una fuerza sobre un plano es una magnitud vectorial porque se caracteriza no sólo por su magnitud sino también por su dirección y sentido en el plano.

$$F_{xy} = F\ \cos(\theta) = OB_1$$

$$F_x = F_{xy} cos(\varphi) = F\ \cos(\theta)\ \cos(\varphi)$$

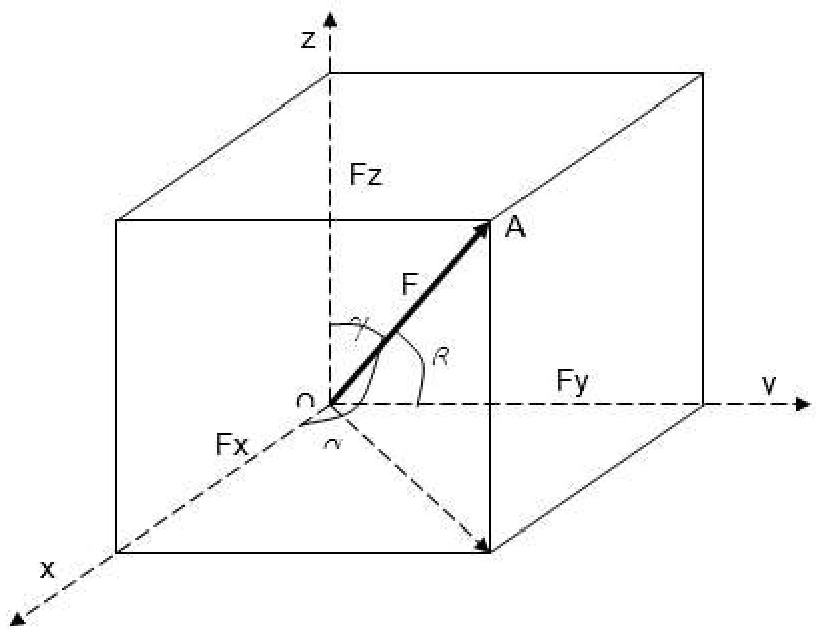
$$F_y = F_{xy}\ \sin(\varphi) = F\ \cos(\theta)\ \sin(\varphi)$$

2.6.- Método analítico de definición de fuerzas

Método analítico de definición de fuerzas

Para resolver problemas de estática resulta más cómodo definir una fuerza por sus proyecciones.

Una fuerza F puede ser definida si se conocen sus proyecciones Fx, Fy, Fz.



$$F_x = F\cos(\alpha) \qquad F_y = F\cos(\beta) \qquad F_z = F\cos(\gamma)$$

$$F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2 = F^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)$$

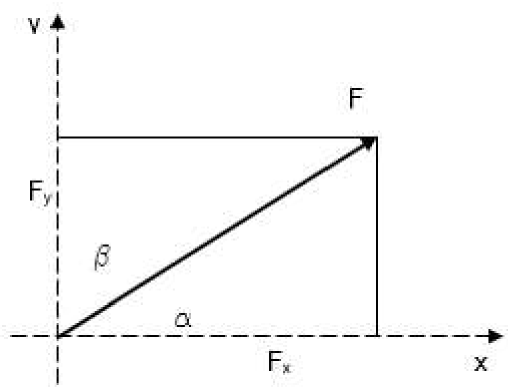
$$\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) = 1$$

$$F^2 = F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2$$

Magnitud en el espacio $F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}$

Dirección en el espacio $cos(\alpha) = \dfrac{F_x}{F}, cos(\beta) = \dfrac{F_y}{F}, cos(\gamma) = \dfrac{F_z}{F}$

En el plano:



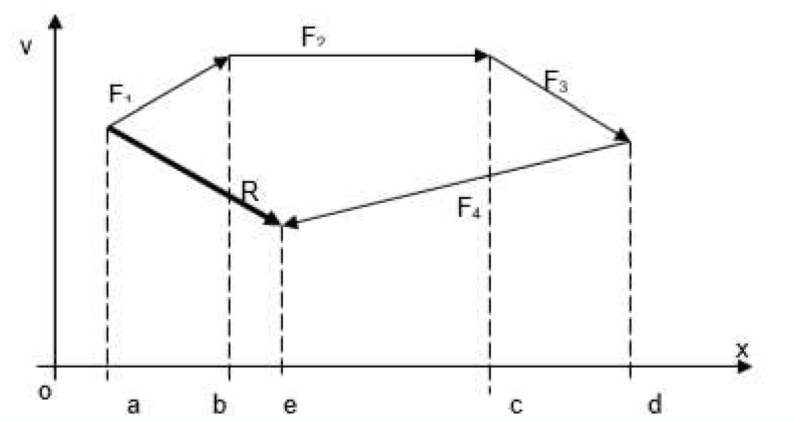
Magnitud en el plano $F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}$

Dirección en el plano $cos(\alpha) = \dfrac{F_x}{F}$, $cos(\beta) = \dfrac{F_y}{F}$

2.7.- Método analítico de composición de fuerzas.

Método analítico de composición de fuerzas.

La proyección de un vector resultante sobre un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de las proyecciones de los vectores componentes sobre el mismo eje.



$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$R_x = ae = ab + bc + cb - de$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = \sum F_{ix}$$

En forma similar se puede establecer:

$$R_y = \sum F_{iy} \qquad R_z = \sum F_{iz}$$

por lo tanto, en el espacio:

Magnitud: $$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}}$$

Dirección: $$\cos(\alpha) = \frac{R_x}{R} \;,\; \cos(\beta) = \frac{R_y}{R} \;,\; \cos(\gamma) = \frac{R_z}{R}$$

Ejemplo 1

Calcular la resultante de tres fuerzas O, P y Q cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son:

$O_x := 5\ \mathbf{N}$; $O_y := 2\ \mathbf{N}$; $O_z := -8\ \mathbf{N}$

$P_x := 6\ \mathbf{N}$; $P_y := 3\ \mathbf{N}$; $P_z := 12\ \mathbf{N}$

$Q_x := 3\ \mathbf{N}$; $Q_y := -7\ \mathbf{N}$; $Q_z := 1\ \mathbf{N}$

Incógnitas: R, α, β y γ

Solución:

$R_x = \sum F_x$ $\qquad$ $R_x := O_x + P_x + Q_x = 14\ \mathbf{N}$

$R_y = \sum F_y$ $\qquad$ $R_y := O_y + P_y + Q_y = -2\ \mathbf{N}$

$R_z = \sum F_z$ $\qquad$ $R_z := O_z + P_z + Q_z = 5\ \mathbf{N}$

$$R := \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2} = 15\ \mathbf{N}$$

$$\cos(\alpha) := \frac{R_x}{R} \rightarrow \frac{14}{15} = 0.933 \qquad \alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{R_x}{R}\right) \rightarrow \operatorname{acos}\left(\frac{14}{15}\right) = 21.039\ \mathbf{deg}$$

$$\cos(\beta) := \frac{R_y}{R} \rightarrow -\frac{2}{15} = -0.133 \qquad \beta := \operatorname{acos}\left(\frac{R_y}{R}\right) \rightarrow -\operatorname{acos}\left(\frac{2}{15}\right) + \pi = 97.662\ \mathbf{deg}$$

$$\cos(\gamma) := \frac{R_z}{R} \rightarrow \frac{1}{3} = 0.333 \qquad \gamma := \operatorname{acos}\left(\frac{R_z}{R}\right) \rightarrow \operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.529\ \mathbf{deg}$$

2.8.- Equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes.

Equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes

La condición general para que un sistema de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio será que la resultante del mismo sea igual a 0, es decir: R = 0.

- Geométricamente la condición es que el extremo de la última fuerza coincida con el origen de la primera (el polígono es cerrado), y el polígono se recorre en un solo sentido.
- Analiticamente:

En el espacio

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}} = 0 \quad \text{si} \qquad R_x = R_y = R_z = 0$$

o bien: $$\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0$$

y tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas

En el plano

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = 0 \quad \text{si} \qquad R_x = R_y = 0$$

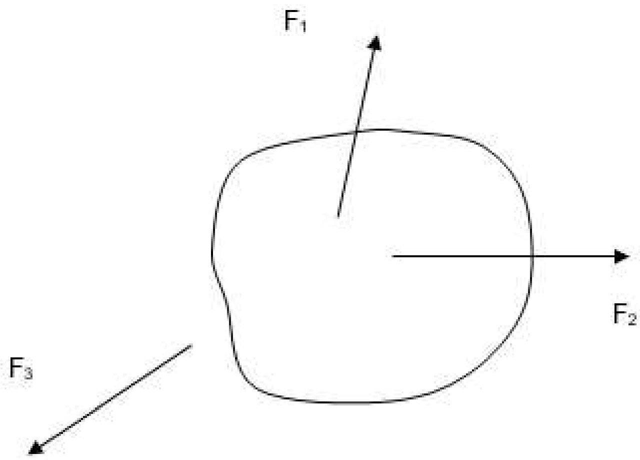
o bien: $$\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = 0$$

y tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas

2.9.- Teorema de las tres fuerzas.

Teorema de las tres fuerzas.

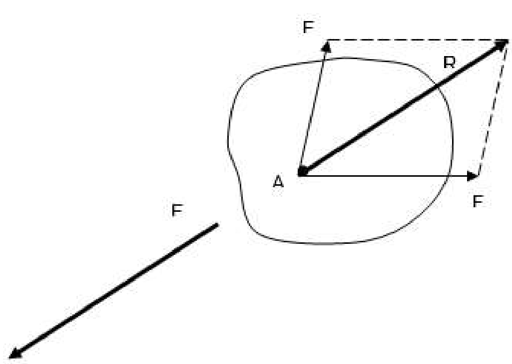
Si un cuerpo sólido libre se encuentra en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas coplanares no paralelas, éstas **deben ser concurrentes.**



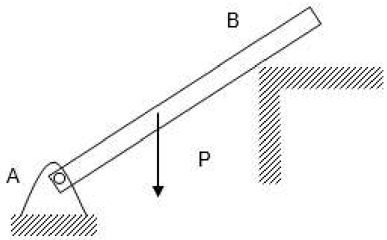
Se Trasladan dos de ellas, F1 y F2 al punto A de intersección de sus líneas de acción componiéndolas por la regla del paralelogramo para obtener un sistema de equivalente de dos fuerzas F3 y R1.

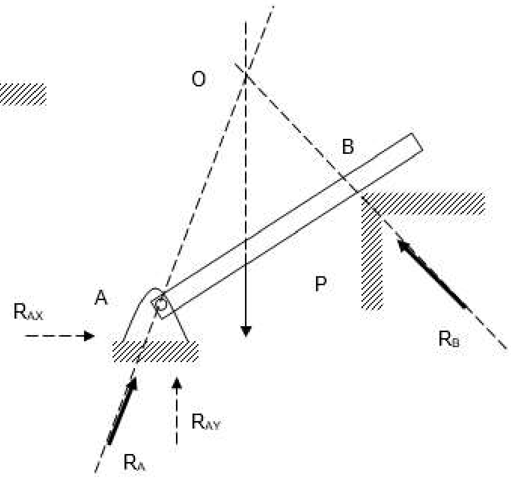
Puede observarse que la línea de acción de F3 coincide con la línea de acción de R1 y pasa por el punto A. Además, sus magnitudes son iguales y de sentido opuesto (A 1).

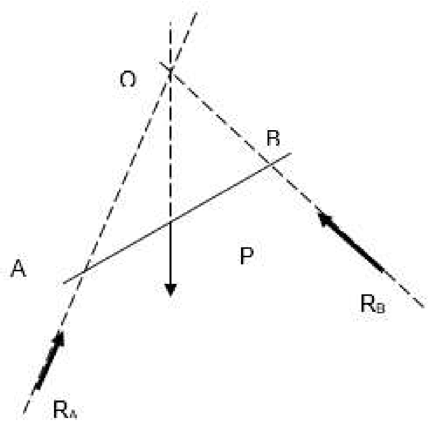
$$F_1 + F_2 = R_1$$



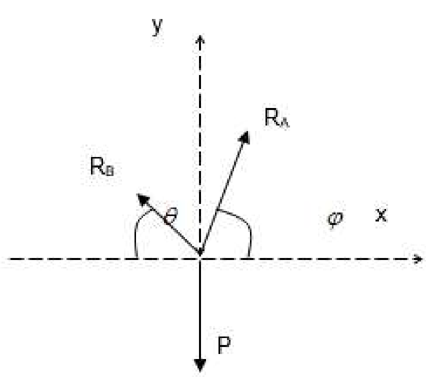
Ejemplo:



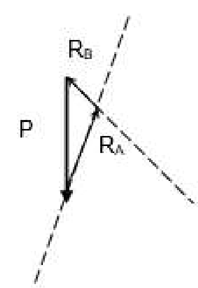




Resolviendo analíticamente:



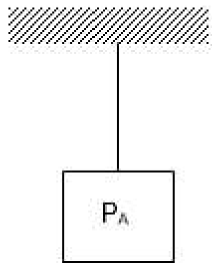
Y gráficamente:

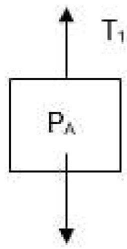


2.10.- Problemas estáticamente determinados e indeterminados

Problemas estáticamente determinados e indeterminados.

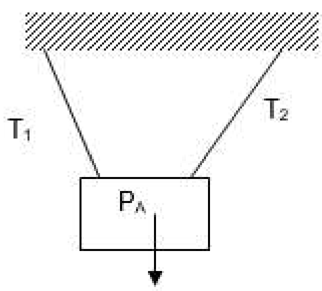
En general, se dice que un problema es estáticamente determinado cuando el número de reacciones desconocidas es igual o menor que el número de ecuaciones de la estática.

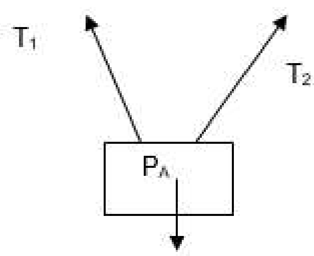




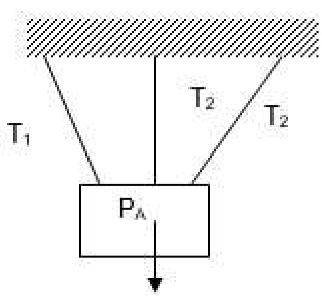
Por ejemplo; para un sistema de fuerzas concurrentes hay sólo dos ecuaciones de equilibrio (en el plano). Por lo tanto sólo se podrán analizar problemas de una o dos incógnitas

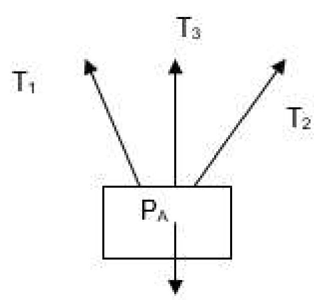
En la figura se tienen fuerzas concurrentes, dos ecuaciones de equilibrio y solamente una incógnita. Es estáticamente determinado.





En este ejemplo se tienen fuerzas concurrentes, dos ecuaciones de equilibrio y dos incógnitas. Es estáticamente determinado.





En este caso hay fuerzas concurrentes, dos ecuaciones de equilibrio, pero existen tres incógnitas. Es estáticamente indeterminado.

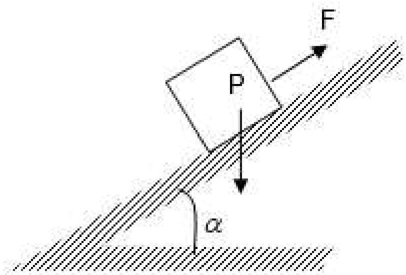
Para resolver los problemas estáticamente indeterminados son necesarias otras ecuaciones como las de deformación que se estudian en Resistencia de Materiales y Teoría de Estructuras.

2.11.- Solución de problemas de la estática.

Solución de problemas de la estática

Los problemas que se resuelven mediante los métodos de la estática son de dos tipos:

1.- Problemas en los que las fuerzas aplicadas a un cuerpo son conocidas (completa o parcialmente) y es necesario hallar en qué posición o en que relación de fuerzas el cuerpo estará en equilibrio.



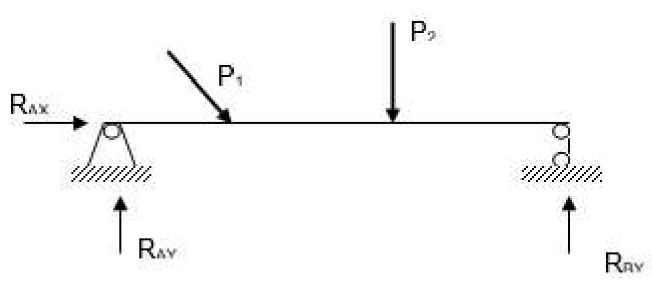
Por ejemplo. Calcular F para el cuerpo no resbale, conociendo P y α.

Tenemos como datos, P, y fricción.

Incógnitas: F para que el cuerpo no resbale

2.- Problemas en los que el cuerpo está en equilibrio y es necesario determinar las magnitudes de todas las fuerzas (o de algunas de éstas) que actúan sobre el cuerpo.

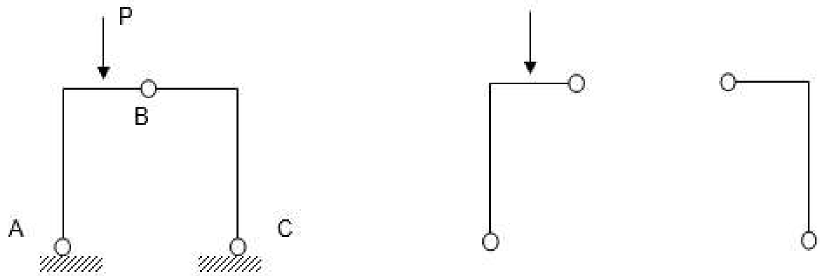
En todos los problemas de la estática las reacciones de las ligaduras son previamente desconocidas.



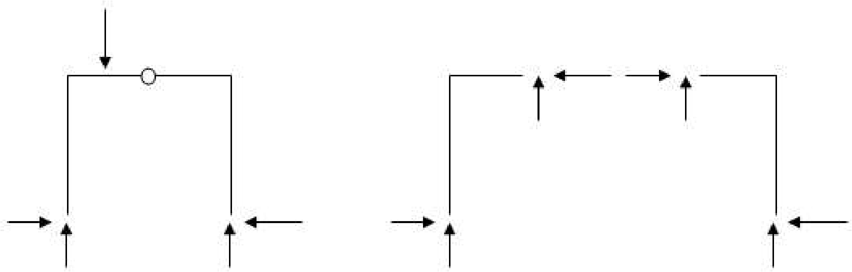
Datos: P1, P2 Incógnitas: RAX, RAY, RBY

Elección del cuerpo cuyo equilibrio debe ser examinado.

1.- Muchas veces la construcción a examinar se compone de varios cuerpos y habrá que examinar cada uno por separado.



2.- Diagrama de cuerpo libre del cuerpo seleccionado.

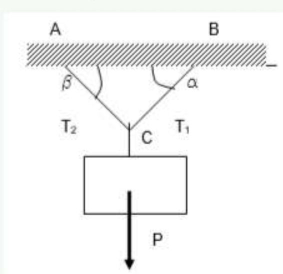


3.- Planteamiento de las condiciones de equilibrio.

4.- Determinación de las incógnitas, revisión de los cálculos y estudio de los resultados obtenidos.

Ejemplo 1

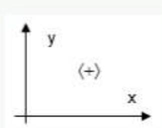
Resolver el siguiente sistema con los siguientes datos



Datos: $P := 40\ \boldsymbol{kgf}$; $\alpha := 30\ \boldsymbol{deg}$; $\beta := 45\ \boldsymbol{deg}$

Incógnitas: T_{CA} ; T_{CB}

Ejes de referencia.



Condiciones de equilibrio

$$\sum F_{ix}=0 \qquad \sum F_{iy}=0$$

$$\sum F_{ix}=0 \qquad T_1\ \cos(\alpha)-T_2\ \cos(\beta)=0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0 \qquad T_1\ sin(\alpha)+T_2\ sin(\beta)=0 \qquad (2)$$

De (1) $\quad T_1\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-T_2\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \qquad T_2=\dfrac{T_1\ \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

De (2) $\quad T_1\ \dfrac{1}{2}+T_2\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-P=0 \qquad T_1=P-T_2\ \sqrt{2}$

Sustituyendo:

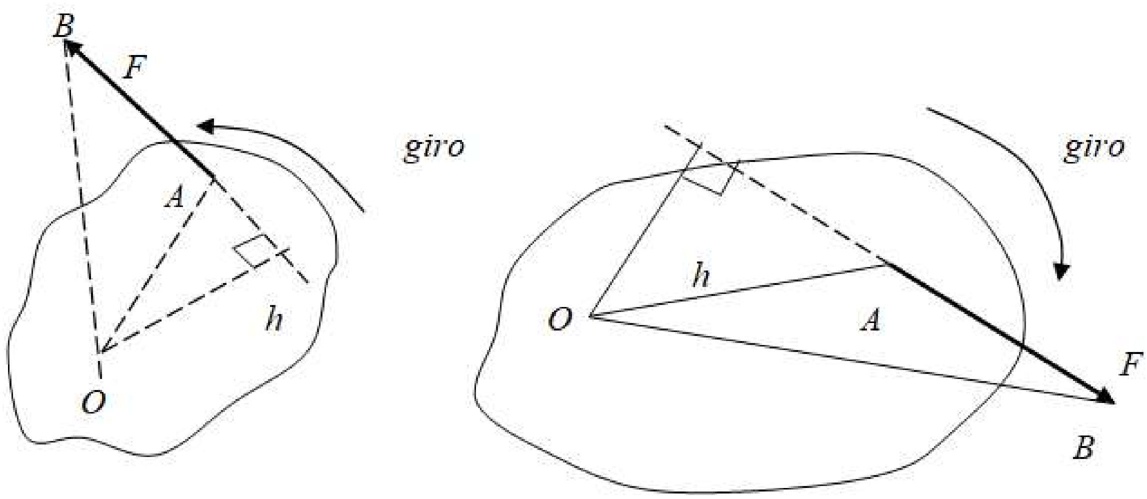
$$T_1=P-\frac{T_1\ \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \sqrt{2} \qquad T_1:=\frac{80\ \boldsymbol{kgf}}{1+\sqrt{3}}=29.282\ \boldsymbol{kgf}$$

$$T_2=\frac{T_1\ \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \qquad T_2:=\frac{T_1\ \sqrt{3}}{\sqrt{2}}=35.863\ \boldsymbol{kgf}$$

2.12.- Momento de una fuerza respecto de un punto.

Momento de una fuerza respecto de un punto.

La experiencia muestra que un cuerpo sometido a una fuerza, además de trasladarse puede girar alrededor de un punto. El efecto rotatorio de una fuerza se caracteriza por su momento.



$$m_o(F) = \pm Fh$$

Momento de una fuerza   respecto de un punto   es la magnitud igual al producto del módulo de la fuerza por la distancia perpendicular del punto a la fuerza. La convención de signos para el momento es: positivo si el sentido de rotación coincide con el movimiento de las manecillas del reloj.

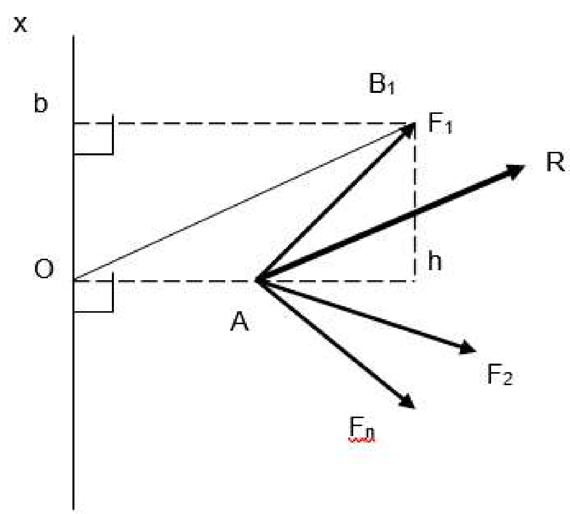
Puesto que el momento de una fuerza es el producto de una longitud por una fuerza las unidades de éste serán kgf-m, kgf-cm o N-m.

Propiedades del momento de una fuerza.

1. El momento no varía cuando el punto de aplicación de la fuerza se traslada a lo largo de su línea de acción.
2. El momento de una fuerza respecto a un punto O es igual a cero si la fuerza es cero o si la fuerza pasa por O.
3. El valor del momento de una fuerza se expresa numéricamente por el doble del área del triángulo OAB.

Teorema de Varignon del momento de una fuerza resultante

El momento de la resultante de un sistema plano de fuerzas concurrentes respecto a un punto cualquiera es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto del mismo centro



$m_o(F_1) = 2areas \triangleleft OAB_1$

Pero $2areasOAB_1 = OA * OB = OA * F_{1x}$

Siendo F_{1x} la proyección de F_1 sobre el eje Ox.

$m_o(F_1) = OA * F_{1x}$

Los momentos de las demás fuerzas se calculan de modo análogo.

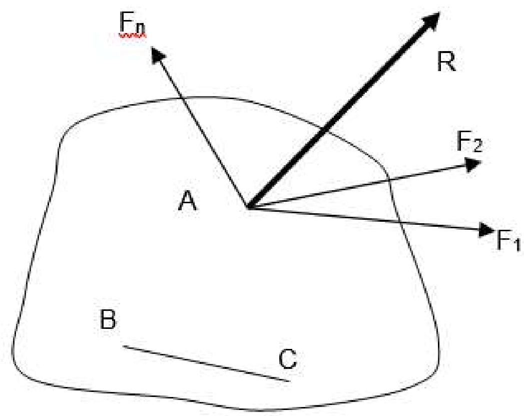
La resultante la representamos por $R = \Sigma\vec{F}_k$

$R_x = \Sigma F_{kx}$

$OA * R_x = \Sigma(OA * F_{kx})$

$m_o(R) = \Sigma m_o(F_k)$

Ecuación de momentos para fuerzas concurrentes



$\Sigma m_B(F_k) = 0$ y $\Sigma m_C(F_k) = 0$

siempre que B Y C no estén alineados con A.

El cuerpo está en equilibrio si $R = 0$

Si $\Sigma m_B(R) = 0$ R es cero o pasa por B

Si $\Sigma m_c(R) = 0$ R es cero pues no puede pasar por C

Capítulo 3.- Fuerzas paralelas y pares en el espacio

Fuerzas paralelas y pares en el espacio

En este capítulo se estudiará la accion de fuerzas paralelas que se ejercen en un cuerpo solido para poder determinar la resultante del sistema.

De la misma manera se analizará el efecto que estas tienen cuando las fuerzas actuan en el mismo sentido y cuando actuan en sentido contrario.

3.1.- Composición y descomposición de fuerzas paralelas.

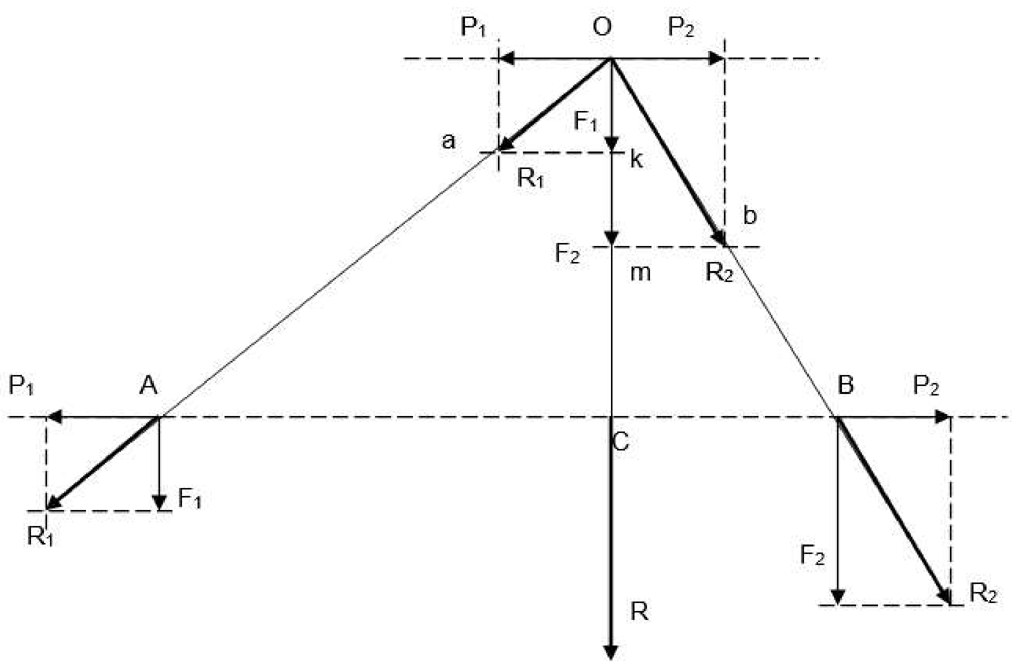
Composición y descomposición de fuerzas paralelas.

Resultante de dos fuerzas paralelas

Se tienen dos casos:

Fuerzas paralelas en el mismo sentido

observando el siguiente diagrama:



No se puede utilizar directamente la regla del paralelogramo de fuerzas para componer dos fuerzas paralelas F1 y F2 aplicadas en los puntos A y B de un sólido. Entonces se aplica el procedimiento siguiente:

1. Aplicamos en los puntos A y B dos fuerzas P1 y P2 de igual magnitud y de sentido contrario. P1 = - P2
2. Componiendo las fuerzas F1 y P1, F2 y P2 obtenemos dos fuerzas R1 y R2 cuyas líneas de acción se intersectan en el punto O.
3. Trasladamos las fuerzas R1 y R2 al punto O y las descomponemos para obtener las fuerzas F'1 y P'1, F'2 y P'2.

4. Como P’1 y P’2 pueden anularse, obtenemos las fuerzas F’1 y F’2 dirigidas a lo largo de una recta cuya línea de acción se intersecta con el segmento AB en el punto C.
5. Trasladamos F’1 y F’2 al punto C.
6. Podemos hacer F’1 + F’2 = R.

Posición del punto C

$$\frac{CA}{OC}=\frac{ak}{Ok} \quad ; \quad \frac{CA}{OC}=\frac{P_1}{F_1} \qquad P_1=\frac{CA}{OC}F_1$$

$$\frac{BC}{OC}=\frac{bm}{Om} \quad ; \quad \frac{BC}{OC}=\frac{P_2}{F_2} \qquad P_2=\frac{BC}{OC}F_2$$

$$\text{Como} \quad P_1=P_2$$

$$F_1\frac{CA}{OC}=F_2\frac{BC}{OC} \quad ; \quad F_1CA=F_2BC$$

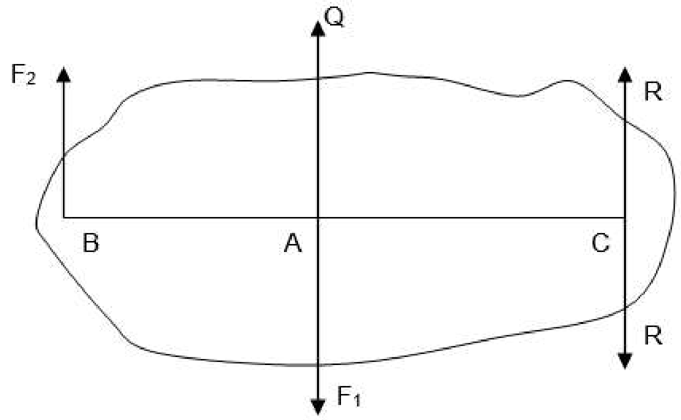
$$\frac{CA}{BC}=\frac{F_2}{F_1} \quad ; \quad \frac{CA+BC}{OC}=\frac{F_2+F_1}{F_1} \quad ; \quad \frac{AB}{OC}=\frac{R}{F_1}$$

Por lo tanto podemos concluir:

La resultante de dos fuerzas paralelas, de sentidos iguales aplicadas a un cuerpo sólido es de la misma dirección y sentido que las fuerzas componentes, paralela a éstas y su módulo es igual a la suma de los módulos de las fuerzas componentes. La línea de acción de la resultante R pasa entre los puntos de aplicación de las componentes a una distancia de éstas, inversamente proporcional a las fuerzas.

Fuerzas paralelas en sentido contrario

A partir del diagrama presentado a continuación podemos observar lo siguiente:



Suponiendo que en los puntos A y B de un cuerpo sólido están aplicadas dos fuerzas paralelas F1 y F2 dirigidas en sentidos opuestos; y que además, los módulos de las fuerzas F1 y F2 son tal que F1 > F2.

1- Se busca un punto C tal que

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}$$

2- Aplicamos R tal que

$$R = F_1 - F_2$$

3- La resultante de F_2 y R será

$$Q = F_2 + R = F_1$$

4- Q se aplica en A, puesto que

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BA}{R}$$

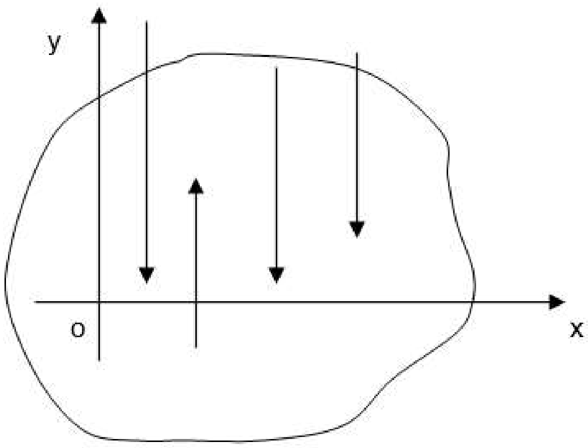
5- Q y F_1 se anulan; entonces que R.

Por lo anterior podemos decir que, la resultante de dos fuerzas paralelas, de sentidos contrarios aplicadas a un cuerpo sólido es de la misma dirección que la mayor de las componentes, es paralela a éstas y su módulo es la diferencia de los módulos de las componentes. La línea de acción de la resultante pasa fuera del segmento que une los puntos de aplicación de las fuerzas componentes, la distancia hasta estos puntos es inversamente proporcional a las fuerzas.

Si las fuerzas paralelas son varias, la resultante puede hallarse mediante la aplicación consecutiva de la regla anterior.

3.2.- Equilibrio de un sistema plano de fuerzas paralelas

Equilibrio de un sistema plano de fuerzas paralelas



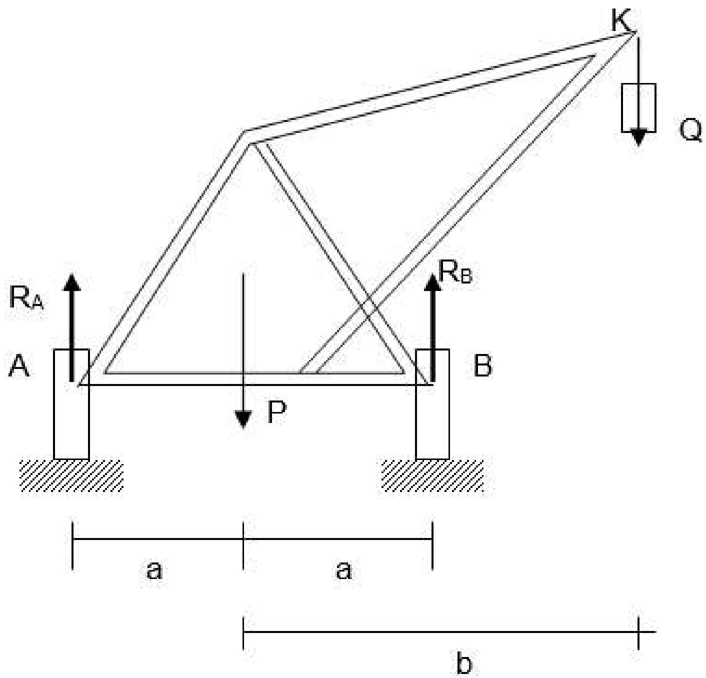
$$\Sigma F_{ky} = 0 \qquad \Sigma M_o(F_k) = 0$$

Siendo el eje OY paralelo a las fuerzas.

O bien: $\Sigma m_A(F_k) = 0 \quad \Sigma m_B(F_k) = 0$

Los puntos A y B no deben estar en una línea paralela a la de las fuerzas.

Ejemplo:



Datos: a, b, P y Q

Hallar R_A y R_B

$\Sigma F_y = 0 \qquad R_A + R_B - P - Q = 0 \qquad (1)$

$\Sigma M_A = 0 \qquad Pa + Q(b+a) - R_B 2a = 0 \qquad (2)$

De (2) $\qquad R_B = \dfrac{Pa + Q(b+a)}{2a}$

De (1) $\qquad R_A = P + Q - \dfrac{Pa + Q(b+a)}{2a}$

Si $a = 1.25m \quad b = 3.5m \qquad P = 4tonf \qquad Q = 1tonf$

Sustituyendo datos se obtiene:

$R_A = 1.1tonf \qquad R_B = 3.9tonf$

Además, podemos investigar cuál es la Q máxima que puede cargarse.
Para esto debe tenerse:

$$R_A = 0$$

entonces:

$$\Sigma m_B(F_k) = 0$$

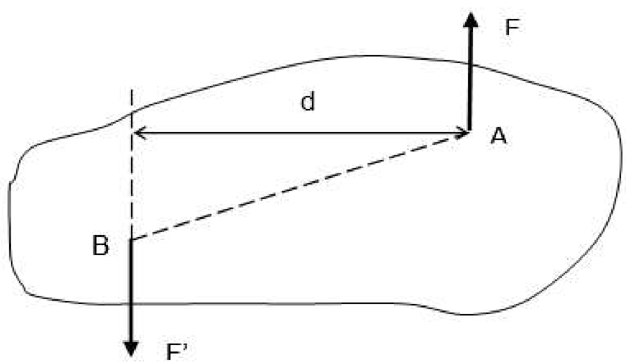
$$-Pa + Q(b-a) = 0$$

$$Q = \frac{Pa}{b-a} = \frac{4 * 1.25}{3.5 - 1.25} = 2.22tonf$$

Con esta carga la grúa está a punto de volcarse. Si Q aumenta habrá vuelco.

3.3.- Par de fuerzas. Momento de un par.

Par de fuerzas. Momento de un par



Un par de fuerzas es un sistema de dos fuerzas paralelas de módulo igual, de sentidos opuestos aplicadas a un cuerpo rígido.

Sus características son:

- El par no se encuentra en equilibrio
- El par no tiene resultante

El efecto del par es producir un giro que depende de:

1. El módulo de la fuerza F y del brazo d
2. De la posición del plano de acción del par
3. Del sentido del giro del par

Se llama momento de un par al producto de la magnitud de una de las fuerzas por la distancia d

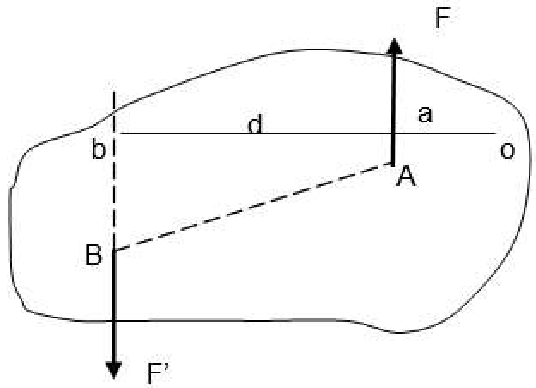
$m=\pm Fd$

El momento se considera positivo si gira en el sentido de las manecillas del reloj y negativo si gira en el otro sentido.

Las unidades del momento de un par serán F * L.

Teorema

El momento de un par respecto a cualquier punto es igual al momento del par.



$$m_o(F) = +F(oa)$$
$$m_o(F) = -F(ob)$$
$$m_o(F, F') = F(oa - ob) = -F(d) = m$$

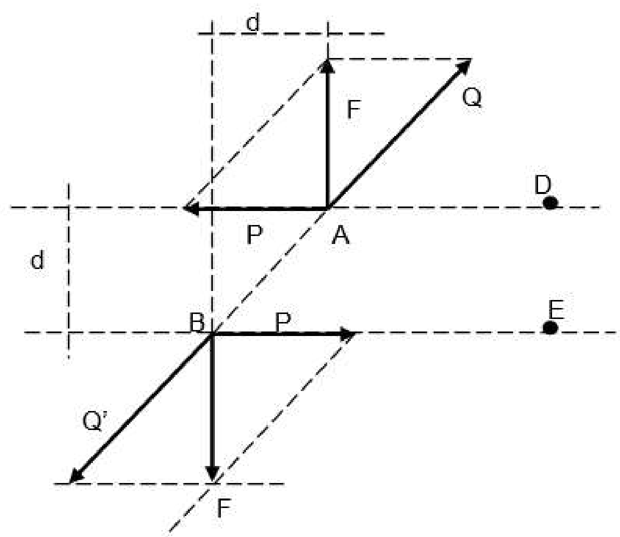
3.4.- Equivalencia de pares.

Equivalencia de pares.

Para determinar las condiciones de equivalencia de dos pares es necesario primero demostrar dos teoremas:

Teorema 1

Un par de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido puede ser sustituido, sin variar su acción sobre este cuerpo, por otro par coplanar cualquiera del mismo momento.



Sea el par F, F' con un brazo d1.

- Se trazan dos paralelas AD y BE separadas d2 hasta cortar a F y F'.
- Se descomponen F y F' en P, Q y P' y Q'.
- P=-P' y como Q= -Q' y además son colineales Q y Q' se anulan.
- Solamente quedan P y P' separadas d2.

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q)$$
$$m_B(Q) = 0$$
$$m_B(F) = m_B(P)$$
$$Fd_1 = Pd_2$$

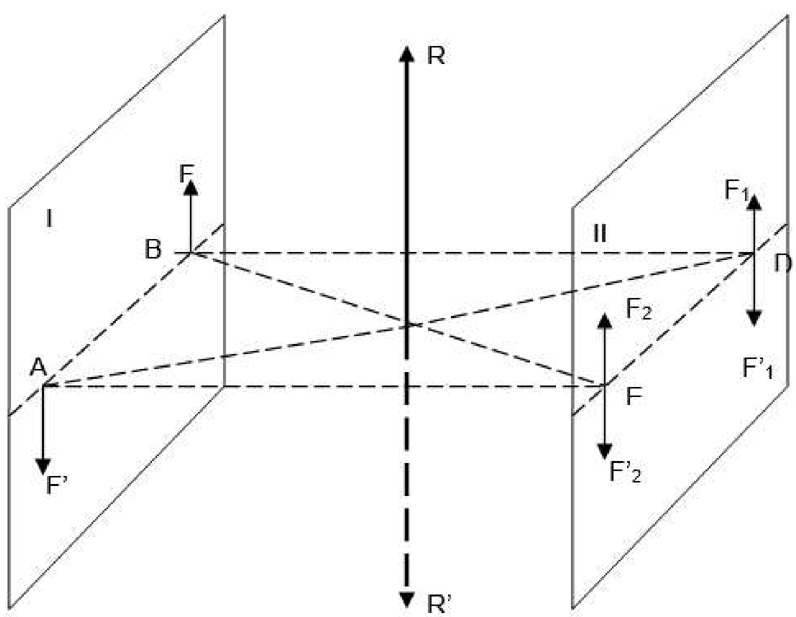
De lo anterior se deducen las propiedades siguientes:

1. Un par dado puede trasladarse a cualquier lugar del plano de acción de éste sin variar su acción sobre el cuerpo.
2. En un par dado se puede cambiar arbitrariamente los módulos de las fuerzas o la longitud del brazo sin variar la acción que este par ejerce sobre el cuerpo y manteniendo constante su momento. Por lo tanto. Dos pares coplanares de momentos iguales son equivalentes pues se puede transformar uno en el otro.

Por lo anterior, frecuentemente un par se representa por el símbolo  aplicado en el punto de aplicación del par.

Teorema 2

La acción de un par de fuerzas sobre un cuerpo sólido no varía si el par se traslada del plano en cuestión a otro plano cualquiera paralelo al original.



Las líneas AB y ED son iguales. Ahora en ED hay cuatro fuerzas.

Entonces se tiene:

$$F_1 = F_2 = F$$
$$F'_1 = F'_2 = F'$$
$$F_2 + F = R$$
$$F'_1 + F' = R'$$
$$R + R' = 0$$

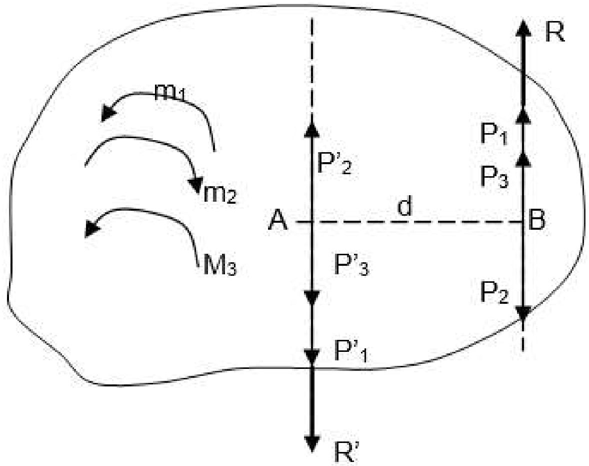
Hasta aquí quedan F1 y F'2 que forman un par igual al anterior, pero en el plano II.

Podemos decir que, dos planos de momentos iguales que se encuentran en planos paralelos son también equivalentes.

3.5.- Composición de pares coplanares. Condiciones de equilibrio de pares

Teorema

Un sistema de pares coplanares es equivalente a un solo par situado en el mismo plano, cuyo momento es la suma algebraica de los momentos de los pares componentes.



Sean m_1, m_2 y m_3

Los Pdemos sustituir por tres pares

$$P_1 d = m_1 \qquad P_2 d = m_2 \qquad P_3 d = m_3$$

$$R = R' = P_1 - P_2 + P_3$$

$$M = Rd = P_1 d + (-P_2 d) + P_3 d = m_1 + m_2 + m_3$$

Igual se demuestra para n pares.

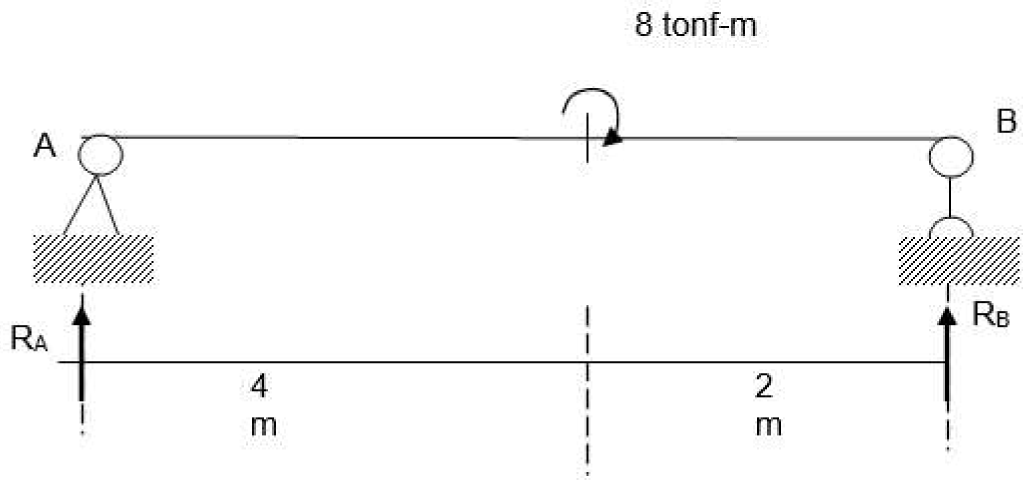
$$M = \Sigma m_k$$

La condición de equilibrio será

$$\Sigma m_k = 0$$

Ejemplo

Para ejemplificar la aplicación del teorema para calcular un sistema de pares en equilibrio resolveremos la siguiente viga:



R_A y R_B deben formar un par igual y contrario a 8 tonf-m:

$$R_A = -R_B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} tonf - m$$

Debe cumplir:

$$\Sigma m_A = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma m_B = 0$$

3.6.- Fuerzas distribuidas.

Fuerzas distribuidas

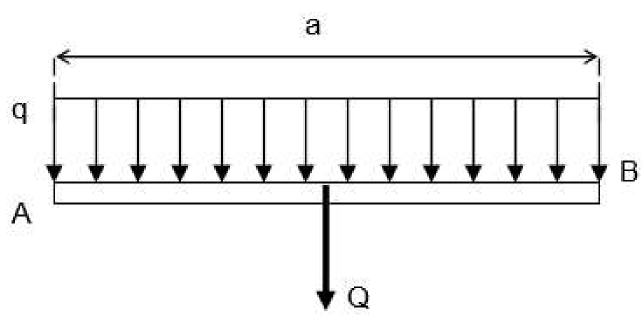
Algunos casos más simples de fuerzas coplanares distribuidas.

Un sistema plano de fuerzas distribuidas se caracteriza por su intensidad, es decir, la magnitud de la fuerza en la unidad de longitud del segmento cargado.

La intensidad se mide en N/m ó kgf/m.

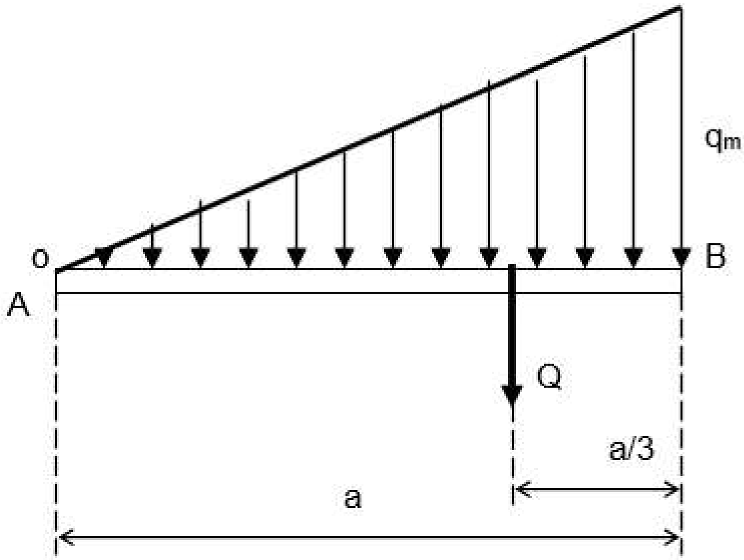
Puede haber fuerzas distribuidas en una longitud, en una superficie o en un volumen.

Fuerza distribuida uniformemente



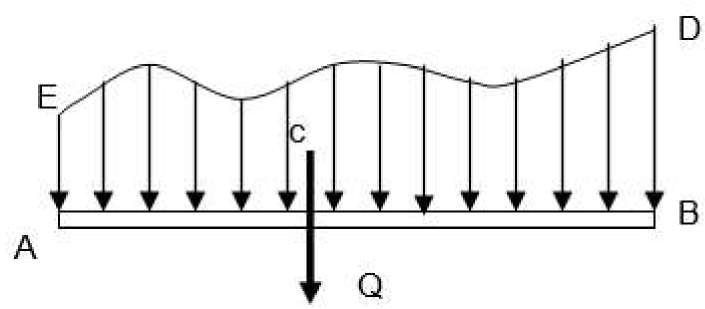
$Q = aq$ y está aplicada en el centro de gravedad del segmento AB.

Fuerza distribuida según una ley triangular



$Q = \frac{1}{2} a q_m$ aplicada en el centroide del área, esto es en a/3.

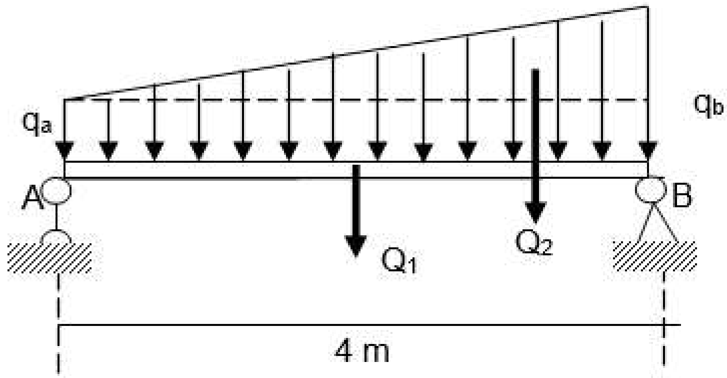
Fuerza distribuida de acuerdo a una ley arbitraria



$Q =$ área de AEDB aplicada en el centroide de la figura.

Ejemplo

1.- Calcular las reacciones en A y B.



$$q_a = 150 kgf / m$$
$$q_b = 300 kgf / m$$

$Q_1 = 4 * 150 = 600 kgf$ aplicada en el centro del claro.

$Q_2 = \frac{1}{2} 4 * 150 = 300 kgf$ aplicada a 1/3 del claro a partir de B.

Ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

$$R_A + R_B - 600 - 300 = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma m_B(F_k) = 0$$

$$R_A(4) - 600(2) - 300(1/3)(4) = 0$$

$$R_A = \frac{1}{4}(1600) = 400 kgf$$

$$R_B = 600 + 300 - 400 = 500 kgf$$

Capítulo 4.- Sistema general de fuerzas coplanares

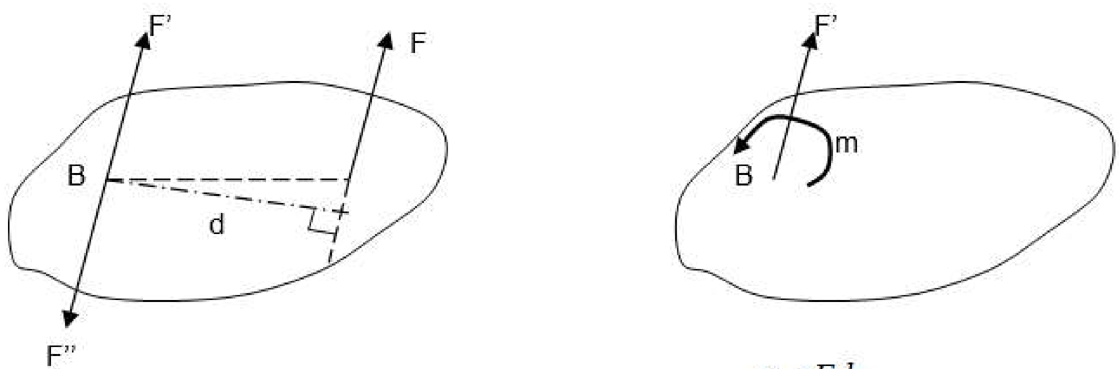
sistema general de fuerzas coplanares

En este capitulo se aplicarán los concimientos adquiridos en los capítulos anteriores para analizar un sistema de fuerzas coplanares aplicado a cuerpos rígidos individuales o un conjunto de cuerpos rígidos que puedan ser analizados mediante los principios de la estática.

4.1.- Teorema sobre el traslado paralelo de una fuerza.

Teorema

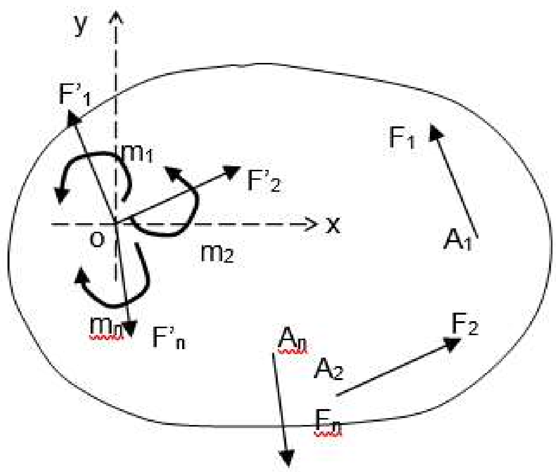
Una fuerza aplicada a un cuerpo rígido puede ser reemplazada paralelamente a sí misma, sin que cambie su acción sobre éste, a cualquier punto del cuerpo, añadiendo al mismo tiempo un par de momento igual al momento de la fuerza que se reemplaza respecto a su nuevo punto de aplicación.



$$m = Fd$$
$$F = F' = -F''$$

4.2.- Reducción de un sistema de fuerzas plano a un centro dado.

Reducción de un sistema de fuerzas plano a un centro dado.



1- Se trasladan todas las fuerzas al centro O.

2- La resultante de $F'_1, F'_2, \ldots\ldots, F'_n$ será

$$R = \Sigma F_k$$

3- la resultante de los m_k será

$$M_o = \Sigma m_o(F_k)$$

Teorema.

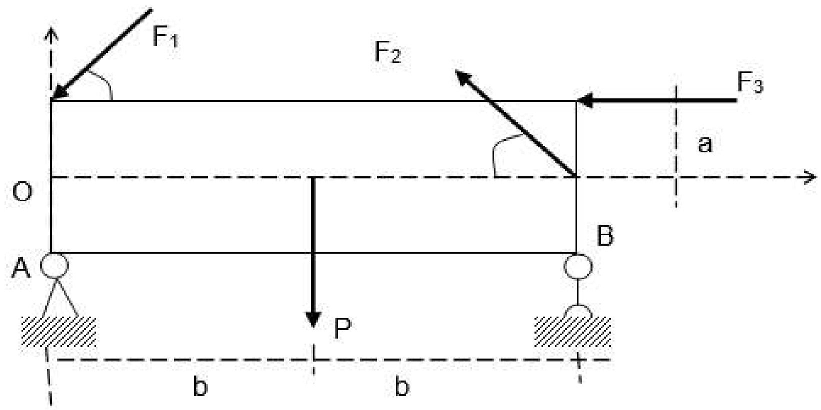
Todo sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido puede sustituirse por una fuerza *R* igual a la suma de las fuerzas y un par M_o igual a la suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto de aplicación de *R*.

R Se denomina vector principal.

M_o Se denomina momento principal.

Ejemplo

Reducir al centro O el sistema de fuerzas de la figura. Considerar
$P = 30kgf \quad F_1 = F_2 = F_3 = 20kgf \quad a = 0.30m \quad b = 0.50m \quad \alpha = 60°$



Se trata de encontrar el vector principal R a través de sus proyecciones R_x y R_y y el momento principal M_o.

F_k	P	F_1	F_2	F_3
F_{kx}	0	$-F\cos\alpha$	$-F\cos\alpha$	$-F$
F_{ky}	$-P$	$-F\text{ sen }\alpha$	$F\text{ sen }\alpha$	0
M_o	$+bP$	$-aF\cos\alpha$	$-2bF\text{ sen }\alpha$	$-aF$

$R_x = \Sigma F_{kx} = -40kgf$

$R_y = \Sigma F_{ky} = -30kgf$
$R = 50kgf$
$M_o = -11.3kgf - m$

4.3.- Casos de la reducción de un sistema plano de fuerzas a la forma más simple.

Casos de la reducción de un sistema plano de fuerzas a la forma más simple.

Los casos que se pueden presentar al hacer la reducción son:

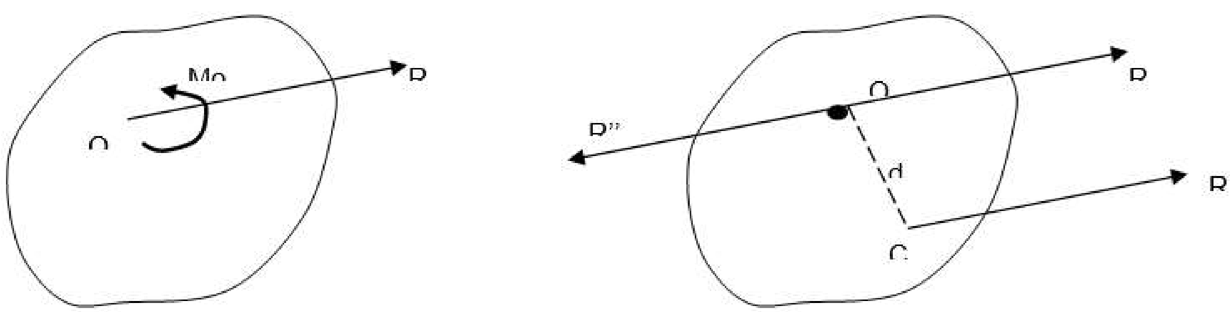
1- $R=0$ y $M_o=0$, el sistema original está en equilibrio.

2- $R=0$ y $M_o \neq 0$, el sistema puede reducirse a un par de momento.

$$M_o = \Sigma m_o(F_k)$$

3- $R \neq 0$ y $M_o=0$, el sistema se reduce a una resultante que pasa por O.

4- $R \neq 0$ y $M_o \neq 0$



Se sustituye M_O por las fuerzas $R' = R = -R''$ separadas una distancia d tal que

$$Rd = |M_O|$$

R y R'' se eliminan y queda $R' = R$ aplicada en C.

Por lo tanto, el sistema se reduce a una fuerza R aplicada en un punto C tal que

$$Rd = M_O$$

en magnitud y sentido.

En resumen: Un sistema general de fuerzas coplanares cuando no está en equilibrio se puede reducir a:

- Una resultante (cuando $\boldsymbol{R \neq 0}$) (Ejemplo de resultante)
- A un par (cuando $\boldsymbol{R = 0}$)

4.4.- Condiciones de equilibrio del sistema general de fuerzas coplanares

Condiciones de equilibrio del sistema general de fuerzas coplanares

Condiciones de equilibrio

$R = 0$; $M_O = 0$

donde *O* es cualquier punto del plano.

Las expresiones anteriores pueden expresarse analíticamente en tres formas diferentes:

1.- Forma principal de las condiciones de equilibrio

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad M_O = \Sigma m_O(F_k)$$

pero $R_x = \sum F_x$; $R_y = \sum F_y$

para que $R = 0$ se necesita que $R_x = R_y = 0$

por lo tanto, $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum m_o(F_k) = 0$

2da Forma

$\sum m_A(F_k) = 0$; $\sum m_B(F_k) = 0$; $\sum F_k = 0$

Siempre que el eje X no sea perpendicular a la recta AB.

3ra Forma

$\sum m_A(F_k) = 0$; $\sum m_B(F_k) = 0$; $\sum m_C(F_k) = 0$

Siempre que A, B y C no estén en línea recta.

4.5.- Solución de Problemas

Solución de Problemas

Para solucionar los sistemas de fuerzas que pueden resolverse por medio de la estática es necesario seguir el siguiente procedimiento

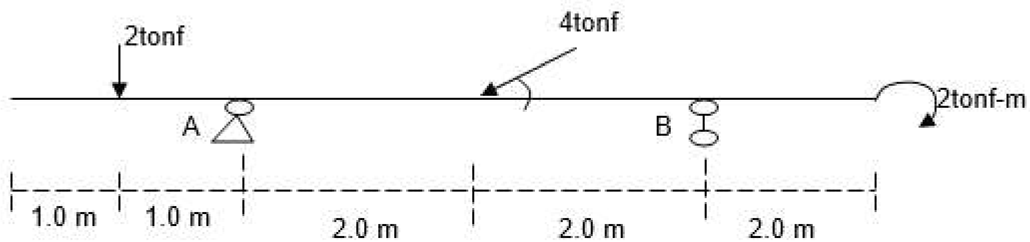
- Identificar el cuerpo cuyo equilibrio se analiza.
- Hacer el diagrama de cuerpo libre correspondiente.
- Establecer las condiciones de equilibrio tratando de que las ecuaciones sean lo más sencillas posibles, para lo cual:

1. Al plantear las ecuaciones de las proyecciones, trazar un eje coordenado perpendicular a una de las fuerzas incógnitas.
2. En las ecuaciones de los momentos, tomar por centro de momentos el punto donde se corten la mayoría de las fuerzas incógnitas.

Ejemplos de sistemas formados por un solo cuerpo.

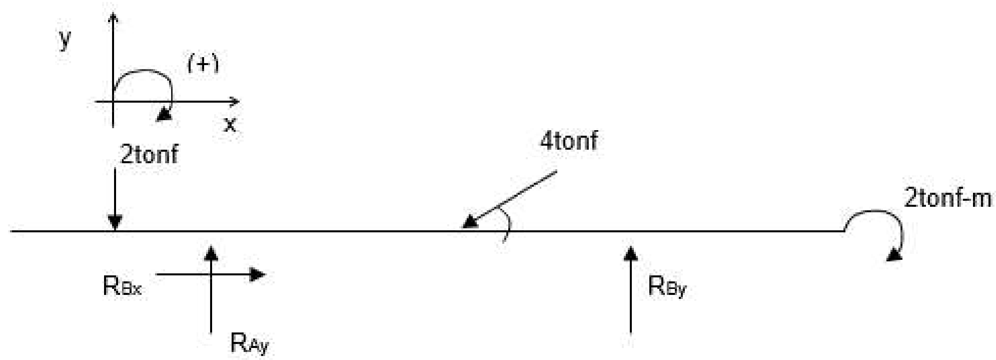
Ejemplo 1

Basta con hacer el cuerpo libre de la estructura:



Datos: Los indicados en la figura.

Incógnitas: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}



$\Sigma F_x = 0$

$R_{Ax} - 4\cos 45° = 0 \qquad R_{Ax} = 2.82 tonf$ (1)

$\Sigma F_y = 0$

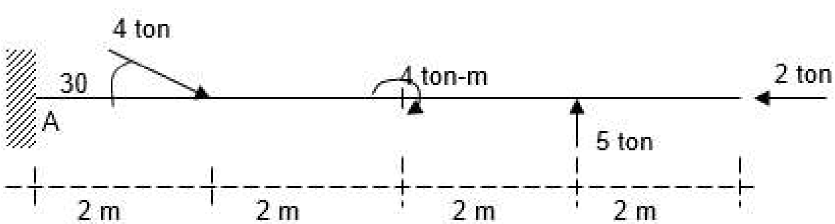
$R_{Ay} + R_{By} - 2 - 4\cos 45° = 0$ (2)

$\Sigma M_A = 0$

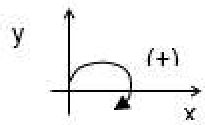
$-2 * 1 + 4\,\text{sen}\,45° * 2 - 2R_{By} + 2 = 0 \qquad R_{By} = 1.41 tonf$

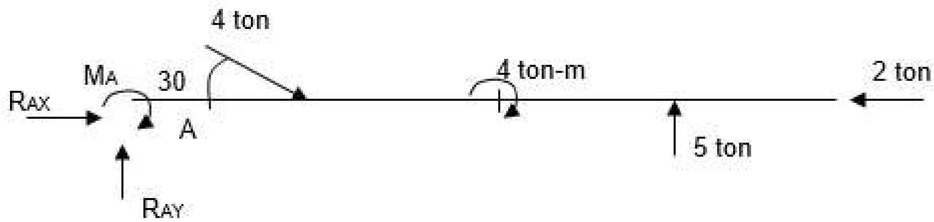
de (2) $\quad R_{Ay} = 2 + 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1.41 = 3.41 tonf$

Ejemplo 2



Incógnitas: Reacciones en A.





$\Sigma F_X = 0$

$R_{AX} + 4\cos 30° - 2 = 0 \qquad R_{AX} = -1.46 ton$

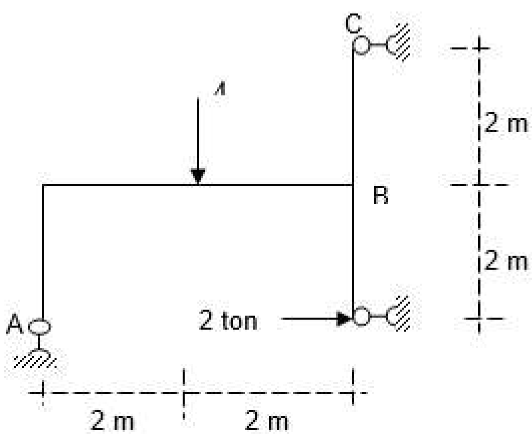
$\Sigma F_Y = 0$

$R_{AY} - 4\,\text{sen}\,30° + 5 = 0 \qquad R_{AY} = -3$

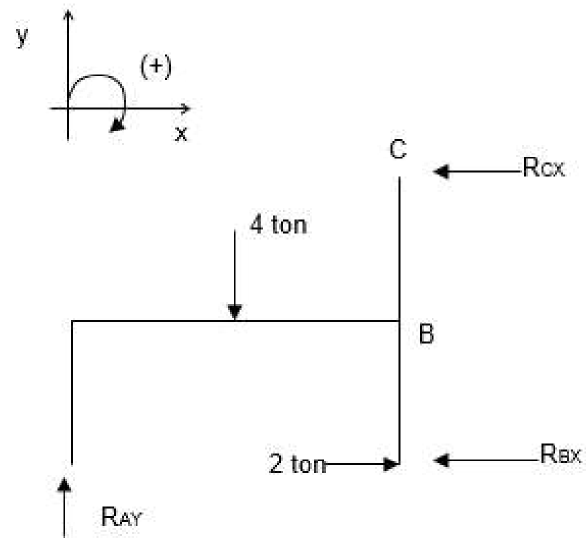
$\Sigma M_A = 0$

$M_A - 4\,\text{sen}\,30°(2) - 4 + 5(6) = 0 \qquad M_A = -22 ton - m$

Ejemplo 3



Incógnitas: Reacciones en los apoyos.



$\Sigma F_Y = 0$	$R_{AY} - 4 = 0$	$R_{AY} = 4ton$	(1)
$\Sigma F_X = 0$	$2 - R_{AX} - R_{BX-0} = 0$		(2)
$\Sigma M_A = 0$	$4 * 2 - R_{CX}(4) = 0$	$R_{CX} = 2$	
De (2)	$R_{BX} = 0$		

Sistemas formados por varios cuerpos

Será necesario hacer cuerpos libres del sistema en su conjunto y de alguno o algunos de los cuerpos componentes.

El número de cuerpos libres necesarios para calcular las reacciones es de

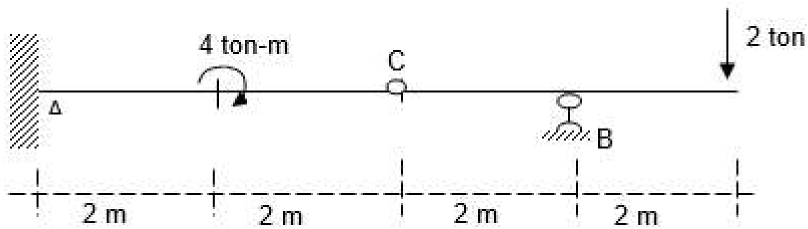
$$n = r - 2$$

donde r es el número de reacciones a calcular.

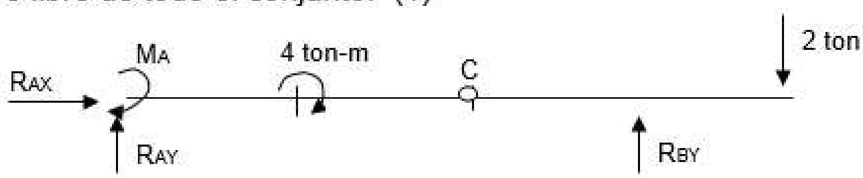
Es conveniente empezar el análisis por los cuerpos libres más sencillos.

Ejemplos de sistemas formados por varios cuerpos

Ejemplo 1



Incógnitas: Reacciones en A y B.
Cuerpo libre de todo el conjunto. (1)



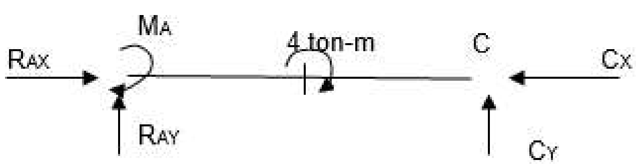
Número total de reacciones a calcular

$$r = 4$$

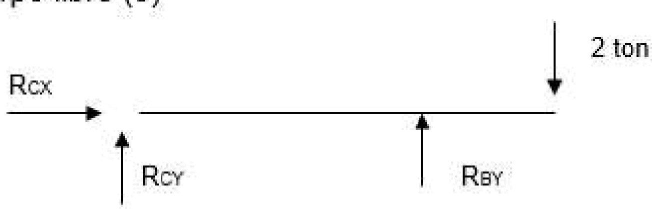
Cuerpos libres necesarios a analizar

$$n = 4 - 2 = 2$$

Cuerpo libre (2)



Cuerpo libre (3)



- En el cuerpo libre (1) hay 4 incógnitas.
- En el cuerpo libre (2) hay 5 incógnitas.
- En el cuerpo libre (3) hay 3 incógnitas.

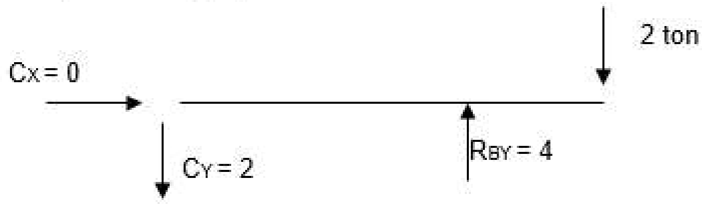
Por lo tanto, es conveniente empezar por el cuerpo libre (3).

$\Sigma M_C = 0$ $\quad 2*4 - 2*R_{BY} = 0$ $\quad R_{BY} = 4ton$

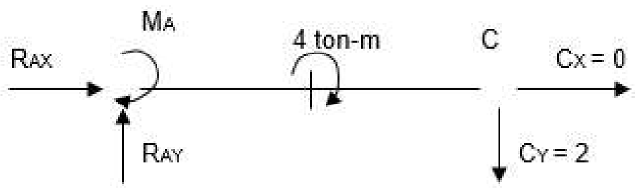
$\Sigma F_Y = 0$ $\qquad$ $C_Y = -2ton$ su sentido es contrario al que se supuso.

$\Sigma F_X = 0$ $\qquad$ $C_X = 0$

El cuerpo libre (3) queda



Pasando al cuerpo libre (2)

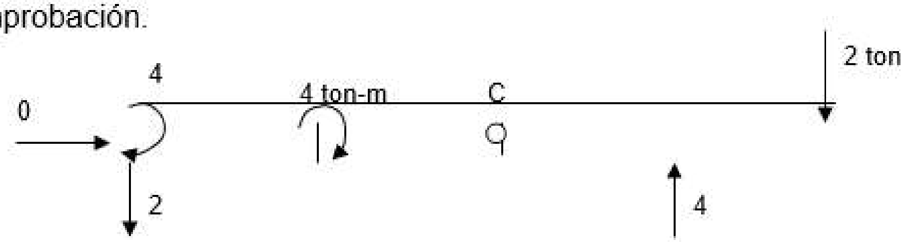


$\Sigma F_X = 0$ $\qquad$ $R_{AX} = 0$

$\Sigma F_Y = 0$ $\qquad$ $R_{AY} = -2ton$ contrario al sentido supuesto

$\Sigma M_A = 0 \qquad M_A + 4 - 2 * 4 = 0 \qquad M_A = 4ton - m$

Comprobación.

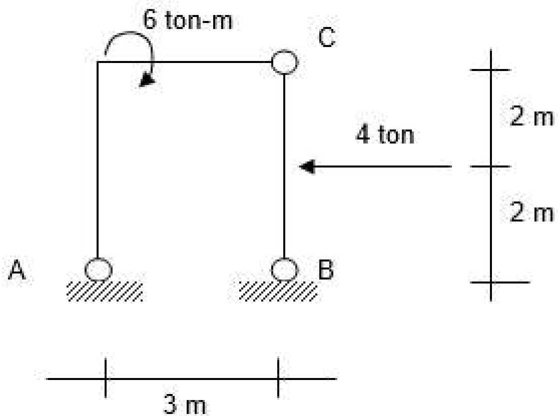


$\Sigma F_X = 0$

$\Sigma F_Y = 4 - 2 - 2 = 0$

$\Sigma M_A = 4 + 4 - 4 * 6 + 2 * 8 = 0$

Ejemplo 2



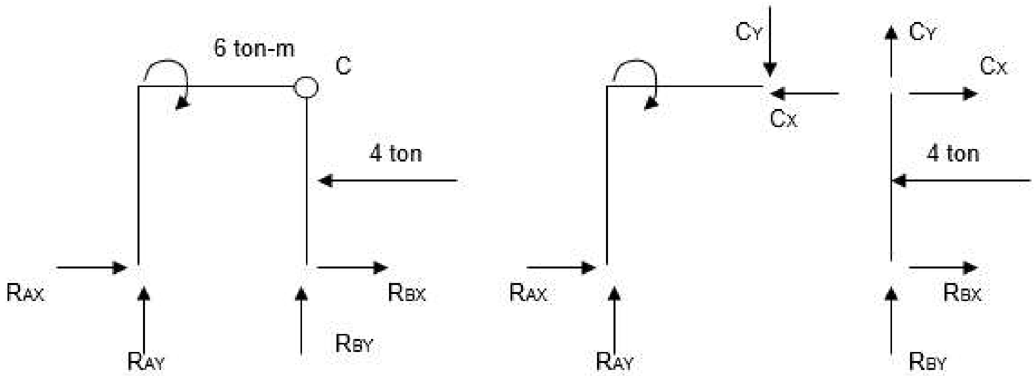
Incógnitas: Reacciones en A y B y en la articulación C.

Cuerpos libres necesarios:

$r = 4$

$n = 4 - 2 = 2$

Diagrama de cuerpo libre.



(1) (2) (3)

En todos los cuerpos hay 4 incógnitas:

Del cuerpo (3)

$\Sigma M_C = 0 \qquad 4(2) - R_{BX}(4) = 0 \qquad R_{BX} = 2ton$ (1)

$\Sigma F_Y = 0 \qquad C_X = 2ton$ (2)

$\Sigma F_Y = 0 \qquad C_Y = R_{BY}$ (3)

Del cuerpo (2)

$\Sigma F_X = 0 \qquad R_{AX} = 2ton$ (4)

$\Sigma M_A = 0 \qquad 6 + C_Y(3) - 2(4) = 0 \qquad C_Y = \frac{2}{3} ton$ (5)

$\Sigma F_y = 0 \qquad R_{AY} = \frac{2}{3} ton$ (6)

De la ecuación (3)

$$R_{BY} = -\frac{2}{3} ton$$

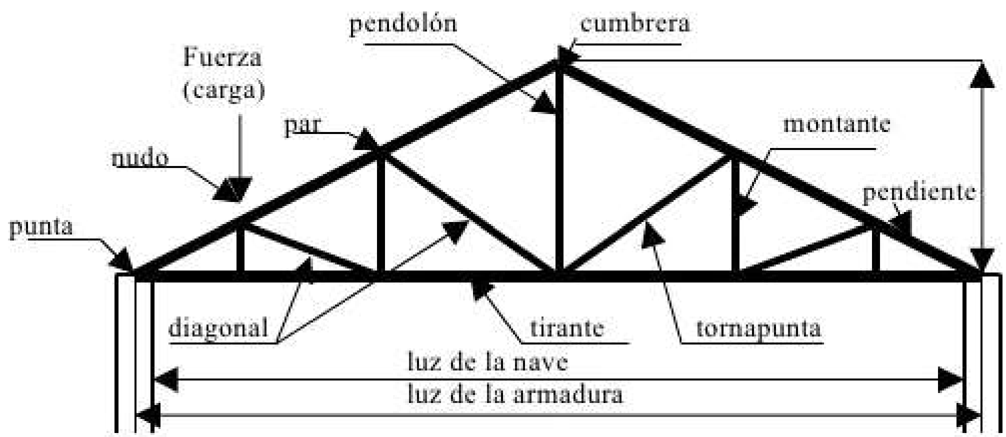
Capítulo 5.- Armaduras planas

Introducción

En este capítulo se abordarán los principios básicos de las armaduras planas, los elementos que las componen y las idealizaciones que se toman en consideración para el analisis de estos elementos.

5.1 Definición de armadura.

Una Armadura es una construcción rígida compuesta de barras rectilíneas unidas en sus extremos mediante articulaciones.



Como puede verse en la imagen anterior las partes que componen una armadura son:

- Cuerda superior e inferior; también son conocidas como tirantes
- Montantes y diagonales; a las diagonales también se les conoce como tornapunta o contraventeos.
- Nudos.
- apoyos.

Al lugar de unión de dos o más barras se le llama nudo.

Las cargas exteriores se aplican en los nudos.

Si se supone que las cargas se aplican en los nudos y que estos funcionan como articulaciones, las barras sólo pueden trabajar a tracción o a compresión pues las reacciones deben ser colineales.

5.2. Clasificación de las armaduras.

Las armaduras pueden clasificarse por su configuración en el espacio como sigue:

- Planas. Cuando los ejes de todas las barras y las cargas están en el mismo plano.
- Espaciales . Cuando los ejes mencionados se encuentran en diferentes planos.

Nos limitaremos a las armaduras planas. En ellas la relación entre barras, nudos y reacciones de apoyo puede ser:

si $b = 2n - r$ Es una armadura isostática.

si $b > 2n - r$ Es una armadura hiperestática.

si $b < 2n - r$ Es un mecanismo.

Las armaduras planas se clasifican en:

- Simples: Pueden analizarse por los métodos habituales de la estática (nudos y secciones).
- Compuestas: Constituidas por varias simples.
- Complejas: Que su análisis requiere de métodos especiales.

5.1.- Metodo de los nudos

Método de los nudos

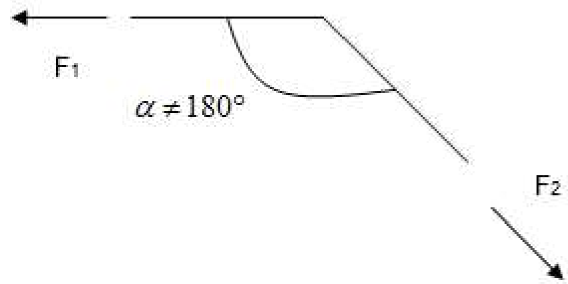
Es útil cuando es necesario hallar las fuerzas actuando en todas las barras de la armadura.

El procedimiento se reduce a:

1. Calcular las reacciones de apoyo.
2. Analizar el equilibrio de cada nudo, procurando siempre comenzar por los nudos en que aparezcan menos incógnitas (en realidad no más de dos).

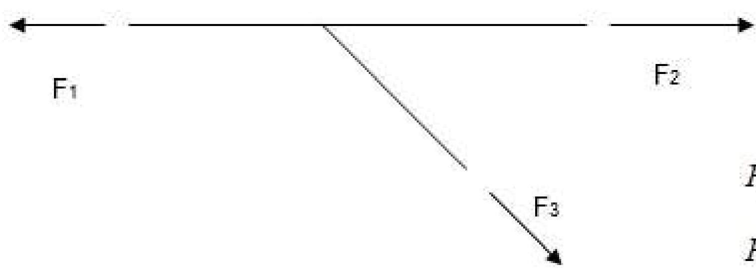
Al analizar el equilibrio de cada nudo es útil tener presente los siguientes casos de “nudos notables”.

a- Si en un nudo concurren dos elementos no colineales sin carga en el nudo, la fuerza en ambos será cero.



$$F_1 = F_2 = 0$$

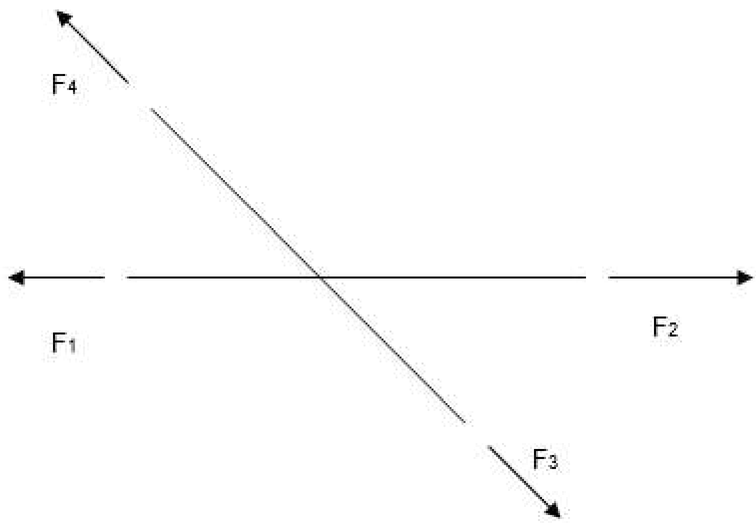
b- Si en un nudo concurren tres barras, dos de ellas colineales y sin fuerzas actuando en el nudo, las fuerzas en las colineales serán iguales y de sentido contrario y en la tercera será nula.



$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = 0$$

c- Cuando a un nudo concurren cuatro barras, colineales dos a dos y sin cargas aplicadas, las fuerzas en las barras serán iguales dos a dos.

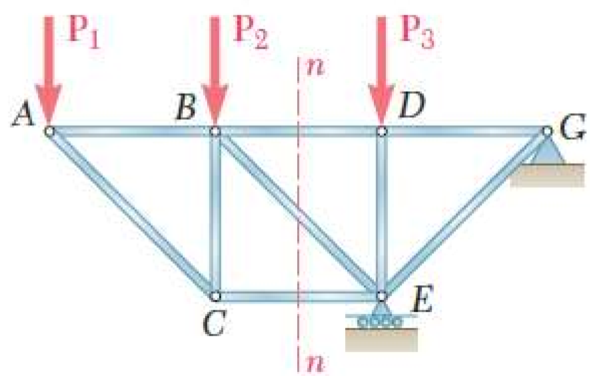


$F_1 = F_2 \qquad F_3 = F_4$

5.2.- Método de las secciones.

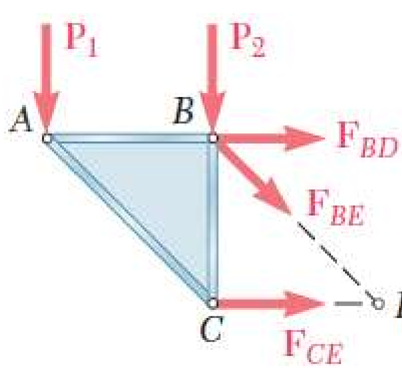
Método de las secciones.

Es útil cuando se quiere comprobar o calcular la fuerza axial en alguna o algunas de las barras. El método consiste en dividir la armadura en dos partes mediante una sección que corte, generalmente, sólo a tres barras cuya fuerza sea desconocida. Después se plantean las ecuaciones de equilibrio para una de las partes. Estas ecuaciones no pueden ser más de tres.



Método de las secciones (CC BY <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

.



Fuerzas en los elementos cortados por n (CC BY <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

.