Unidad 1 de Geometría Analítica con Álgebra Lineal

Geometría analítica con álgebra lineal

Objetivo

El estudiante dominará los conceptos, estructuras y operaciones de geometría y álgebra lineal necesarios para comprender el ambiente y proceso de desarrollo de un videojuego o animación en 2D y 3D.

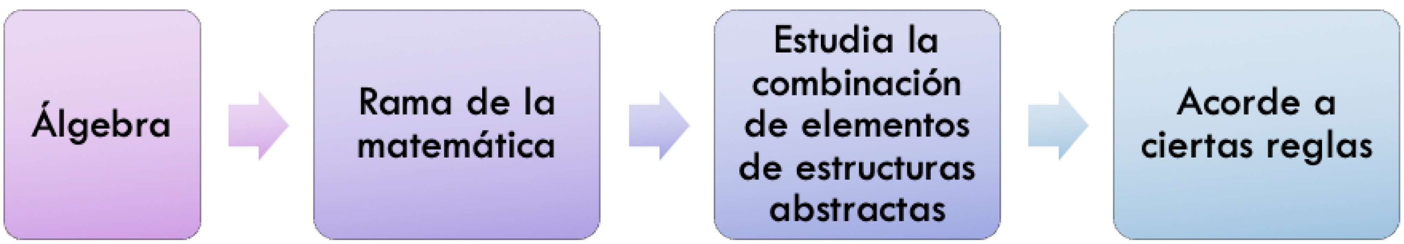
Contenido temático

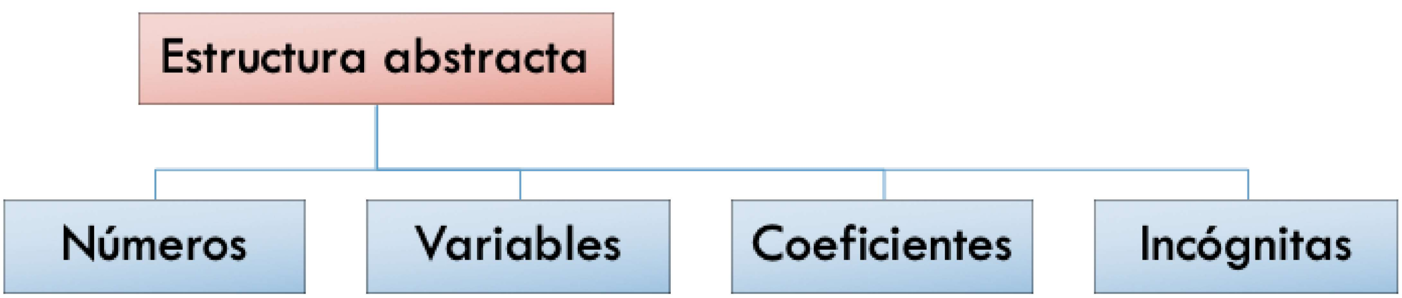
Temario de Unidad 1 de Geometría Analítica con Álgebra Lineal

Unidad	Objetivo	Contenido Temático	Bibliografía
1 - Fundamentos de Geometría y Álgebra	Revisar los conceptos básicos de aritmética, álgebra y trigonometría	1.1. Números reales 1.1.1. Propiedades 1.1.2. Operaciones 1.2. Exponentes y radicales 1.3. Expresiones algebraicas 1.3.1. Productos notables 1.3.2. Factorización 1.4. Funciones trigonométricas 1.4.1. Propiedades Gráficas	Aguilar Marquez, A. (2009). Matemáticas simplificadas. (2a ed.). Naucalpan de Juárez, Edo. De México: Pearson Educación. Swokowski, E., & Cole, J. A. (2009). Algebra and trigonometry with analytic geometry. (12a ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole Cengage Learning

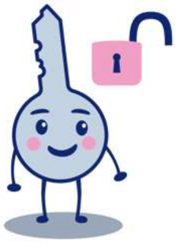
Unidad 1

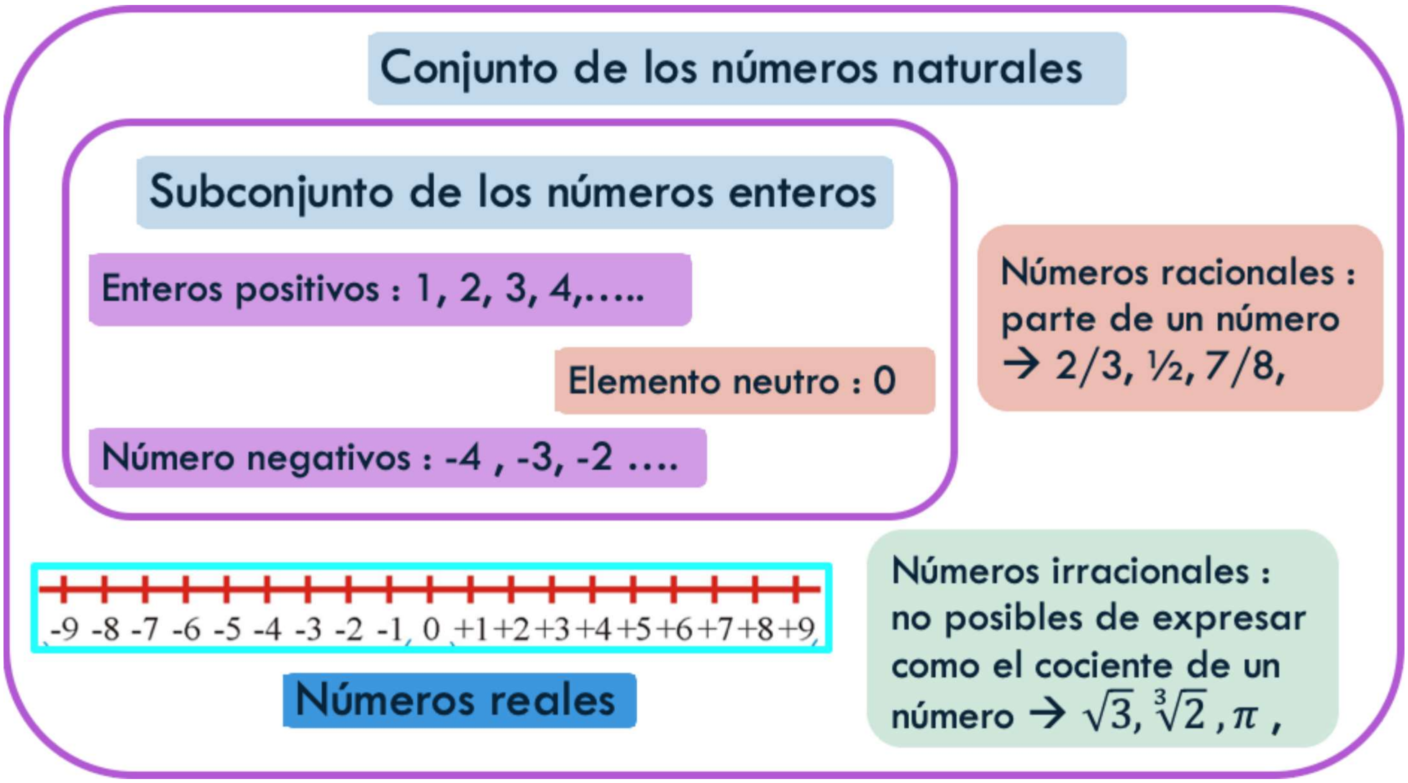
¿Qué es el álgebra?

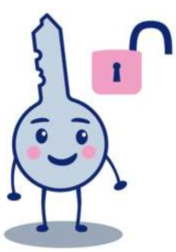




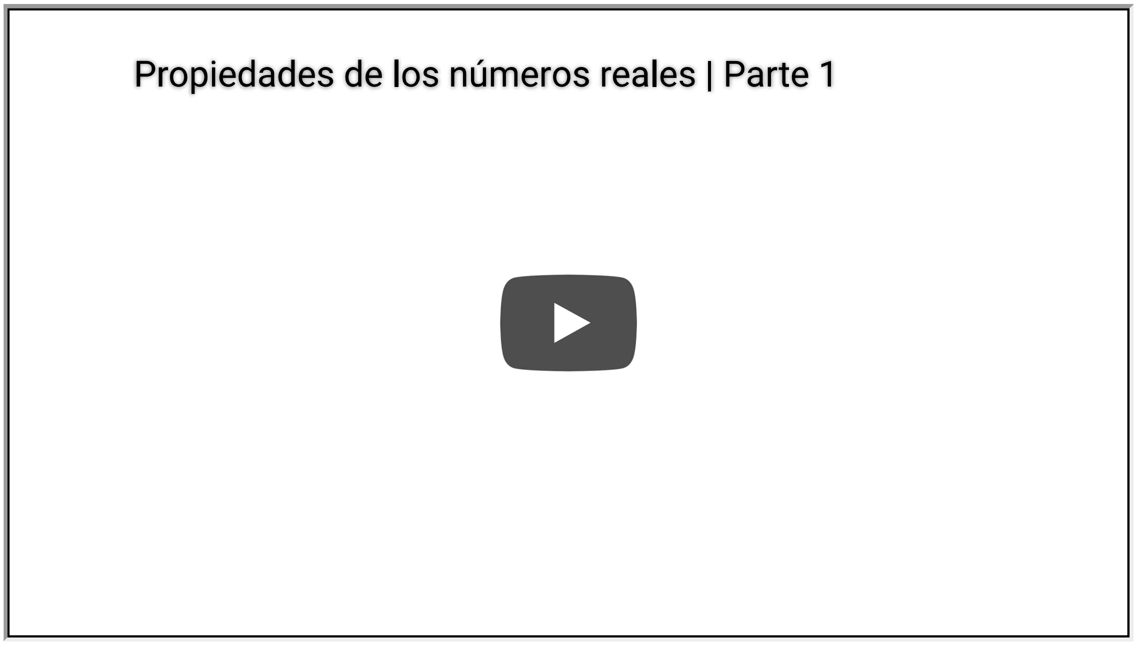
Números reales

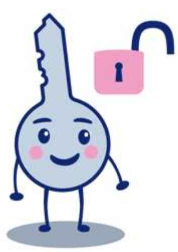






<https://www.youtube.com/embed/nHJ5FSIpz7w>


Propiedades de los números reales | Parte 1



Suma +	• Elementos: Sumandos. • Resultado: Suma o adición. • Se efectúa si los signos de lo números son iguales.
Resta -	• Elementos: Minuendo y sustraendo. • Resultado: Diferencia • Al restar dos números , la diferencia lleva el signo del entero de mayor valor absoluto.
Multiplicación X, ( ) , ·	• Suma de una misma cantidad varias veces. • Elementos: factores. • Resultado: Producto o multiplicación.
División ÷ , / , :	• Si a y b son números enteros, la división de a entre b (b≠0), se encuentran p y r, tal que: a=bp+r • Donde a=dividendo, b=divisor, p= cociente, r=residuo.
Agrupación	• Signos de agrupación: ( ) , { } , [ ] , • Leyes de los signos: (-)(-)=(+), (+)(+)=(+), (-)(+)=(-), (+)(-)=(-)

Divisibilidad	• Sean a y b, números enteros, se dice que a es divisible entre b, si el residuo de a/b es cero. • 48 es divisible entre 16: 48/16=3
Múltiplo	• El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces. • 36 es múltiplo de 9,
Número compuesto	• Además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, lo es entre otro factor • 12 es número compuesto, sus divisores: 1, 2, 3, 4, 6 y 12
Número primo	• Sólo se divide entre sí mismo y la unidad. • 1 no es número primo. • 2, 3, 7, 11, 13, …..
Descomposición	• Expresión de un número como producto de sus factores primos. • 144 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3
Máximo común divisor (MCD)	• Mayor de los divisores de un 2 o más números. • MDC de 18 y 24 = 6
Mínimo común múltiplo (mcm)	• Menor de todos los múltiplos comunes de dos o más números. • mcm de 4 y 6 = 12

Actividad 1

Ordena el nombre de la propiedad empleada en cada caso:

1. $3+(-3)=0$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)(4)=(4)\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $(8)(-3)=-24 \in R$
4. $7\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4\right)=\left(7\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 4$
5. $-\frac{3}{4}+0=-\frac{3}{4}$
6. $4(-3+5)=4(-3)+4(5)$
7. $\frac{1}{\sqrt{7}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=0$
8. $(-3)+(-8)=-11 \in R$

Identidad

Asociativa

Inverso

Inverso

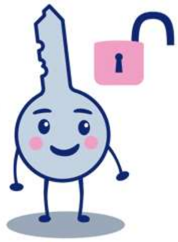
Cerradura

Cerradura

Conmutativa

Distributiva

Exponentes y radicales



Potenciación

La cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{n\text{-veces}}, \text{ donde: } a \text{ es la base y } n \text{ el exponente}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Teoremas

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

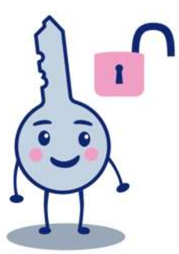
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(a \cdot b \cdot c\right)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$$



Radicación

Hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, donde: a es la base, m el exponente y n el índice.

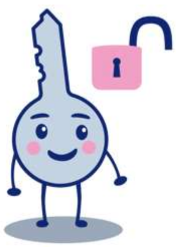
Raíces de números negativos no pertenecen al conjunto de números reales → números imaginarios

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Simplificación: Expresar un radical en su forma más simple



Jerarquía de operaciones

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones

Dada una expresión que involucre diferentes operaciones:

- Potencias y raíces. Si se tiene la potencia o la raíz de una suma o resta, estas operaciones se resuelven primero.
- Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Sumas y restas de izquierda a derecha.

Actividad 2

Ordena las soluciones de las siguientes operaciones:

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $7\times2+8\div4-3\times2=$
2. $12\div4\times3+18\div9\times3-4\times3=$
3. $(10-2)\div2\times3+(8+6)(7-2)-12\times2\div8=$
4. $(6+2)\times(7-4)\div(14-2)+(12-8)\times(7+3)\div(10-2)=$
5. $12^2\div\sqrt{16}\div\sqrt{81}+5^2\times6\div3=$
6. $\sqrt{13^2-12^2}+(6-4)^2\times8-\sqrt{(10-8)^2}=$
7. $2+\{8\times(8-6)+[(3+4)\div7-5\times6\div10]-5\}=$
8. $\sqrt{2\times36+576\div8}+\left\{\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)^2-[7+(8-2)-(5-4)]+6\right\}=$

7

7

10

35

3

11

79

54

Expresiones algebraicas

Expresión algebraica

Combinación de números reales (*constantes*) y literales o letras (*variables*) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etcétera.

Términos algebraicos o monomio

Sumando de una expresión algebraica y representa una cantidad, consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

Polinomio

Expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos o monomios

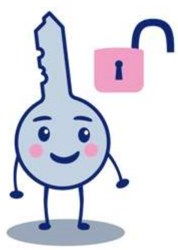
$(5z^4 - 7) \rightarrow$

Coeficiente: 5, constantes: -7, variable: "z" y exponentes: 1 y 4

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-8y^3$	-8	y	3
$\frac{1}{3}mn^x$	$\frac{1}{3}$	m, n	$1, x$
$-\frac{3}{4}(2x+1)^{-2}$	$-\frac{3}{4}$	$2x+1$	-2

Reducción de términos semejantes

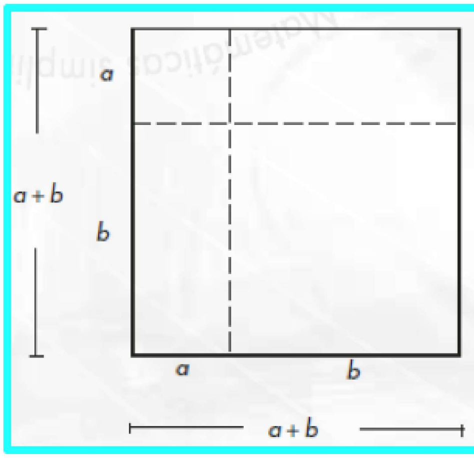
Simplificar expresiones que involucren términos semejantes, se suman o restan los coeficientes



Cuadrado de un binomio = Trinomio cuadrado perfecto

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

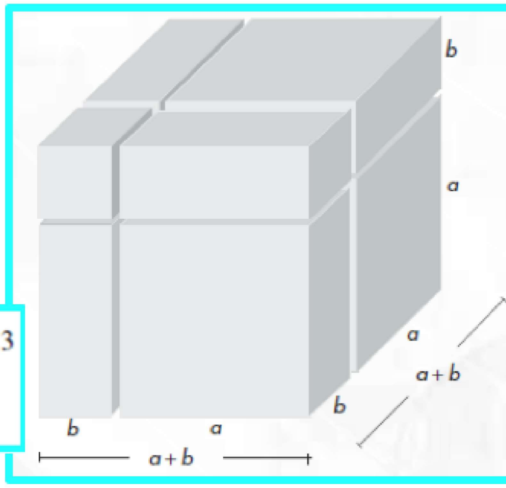


$9x^2 + 42x + 49 \rightarrow (3x + 7)^2$

$25x^2 - 40x + 16. \rightarrow (5x - 4)^2$

Cubo perfecto

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

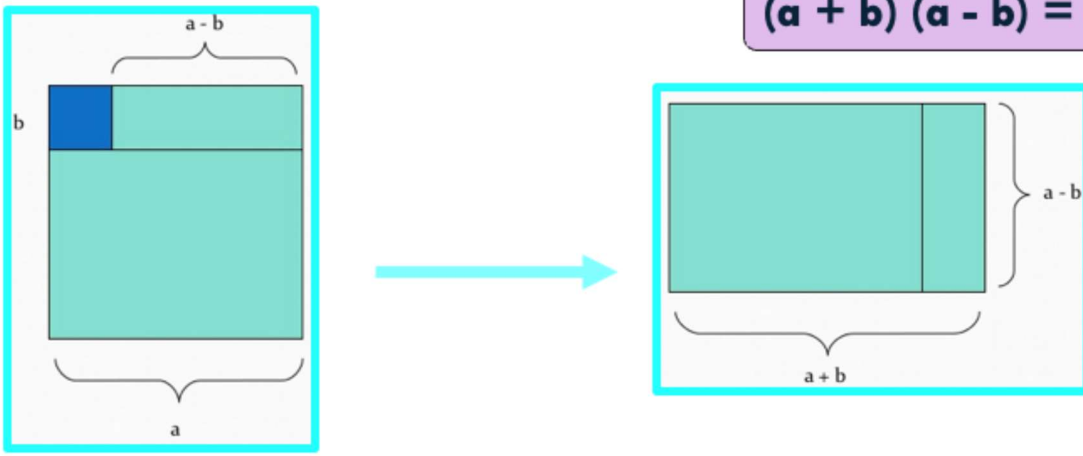


$$\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right)^3 = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2(2) + 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)(2)^2 + (2)^3$$
$$= \tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 6x + 8.$$

$$\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3 = (4x)^3 + 3(4x)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 3(4x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^3$$
$$= 64x^3 - 48 + \frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^6}.$$

Binomios conjugados → Diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$$36y^2 - 2 = (6y)^2 - (\sqrt{2})^2 = (6y + \sqrt{2})(6y - \sqrt{2})$$

Cuadrado de un trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Binomios con término común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Suma de cubos

$$(x + a)(x^2 - ax + a^3) = x^3 + a^3.$$

Diferencia de cubos

$$(x - a)(x^2 + ax + a^3) = x^3 - a^3,$$

Factorización

Expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Factor común

Expresión que tienen o comparten todos los términos de una expresión algebraica

Binomio por binomio con término común

$$(x+B)(x+D) = x^2 + \overbrace{(B+D)}^{B+D=b}x + \underbrace{BD}_{BD=c} = x^2 + bx + c,$$

Método de factorización:

$$x^2 - 9x + 18$$

Con $b = -9$ y $c = 18$, buscamos los enteros B y D tales que

$$B + D = -9 \quad \text{y} \quad BD = 18$$

Podemos escribir 18 como un producto BD en las formas siguientes:

$$1(18), \quad 2(9), \quad 3(6), \quad (-1)(-18), \quad (-2)(-9) \quad \text{o} \quad (-3)(-6).$$

Como -9 es la suma $B + D$ cuando $B = -3$ y $D = -6$, la factorización es

$$x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$$

Binomio por binomio

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Método de factorización:

$$2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$$

$$20x^4 - 18x^2 - 18 = (5x^2 + 3)(4x^2 - 6)$$

Ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Siempre se deben ordenar los términos primero de mayor orden a menor orden

$$11x - 21 + 2x^2 = 0$$

$$2x^2 + 11x - 21 = (2x - 3)\,(x + 7)$$

Actividad 3

La factorización de $(2x^3 - 3)(2x^3 - 3)$ es:

- ○ $(2x^3 - 3)(2x^3 - 3)$
- ○ $(x^3 - 3)(x^3 - 3)$
- ○ $(2x^3 + 3)(2x^3 - 3)$

Opción correcta

Hacer comprobación el resultado que da realizar ese producto de binomios

Hacer comprobación el resultado que da realizar ese producto de binomios

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Funciones trigonométricas

Trigonometría

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo

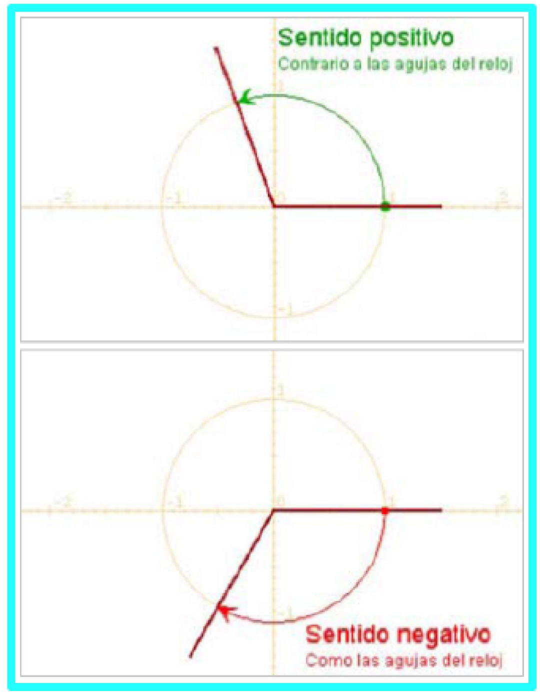
Palabra derivada del griego:
Tri = tres Gono = ángulo Metría = medida

Funciones o razones trigonométricas

Expresiones que dan estas relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo

Ángulo

Un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad.
El punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.



¿Cómo se miden los ángulos?

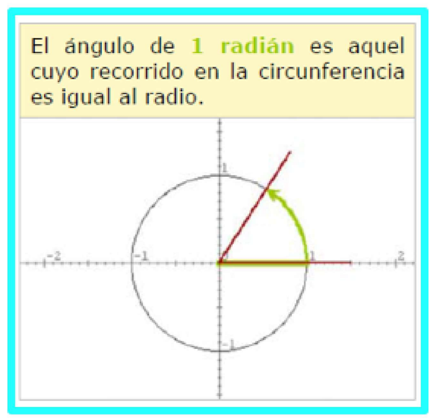
Radianes

Unidad de medida de un ángulo, mide su recorrido en la circunferencia

Grados sexagesimales

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos.

Un ángulo se mide en: **grados° minutos' segundos"**

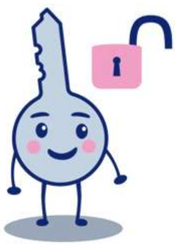


Conversión de radianes a grados

π radianes = 180 grados

1 grado = $\frac{\pi}{180}$ radianes

1 radián = $\frac{180}{\pi}$ grados



Seno de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Cotangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

Secante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

Cosecante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Nota: los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.

Cofunciones

Cualquier función de un ángulo es igual a la cofunción de su complemento

$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha) = cos\ \beta$$
$$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha) = sen\ \beta$$
$$tan\ \alpha = ctg\ (90° - \alpha) = ctg\ \beta$$
$$ctg\ \alpha = tan\ (90° - \alpha) = tan\ \beta$$
$$sec\ \alpha = csc\ (90° - \alpha) = csc\ \beta$$
$$csc\ \alpha = sec\ (90° - \alpha) = sec\ \beta$$

$$sen\ 32° = cos\ (90° - 32°) = cos\ 58°$$
$$tan\ 25° = ctg\ (90° - 25°) = ctg\ 65°$$
$$cos\ \frac{\pi}{3} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\ \frac{\pi}{6}$$
$$sec\ \frac{\pi}{4} = csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = csc\ \frac{\pi}{4}$$

Rango numérico

La hipotenusa siempre es mayor que los catetos

Los valores del seno y coseno no pueden ser mayores que +1, ni menores que -1.

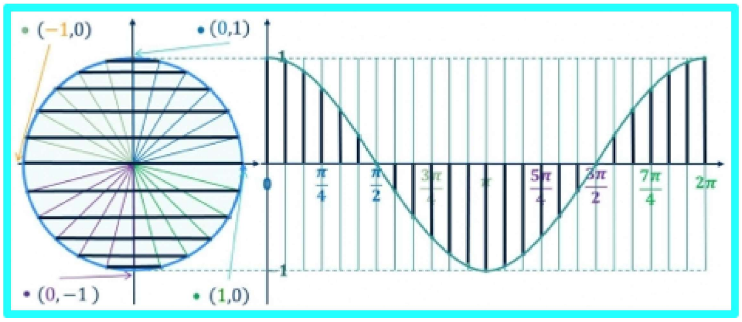
Los valores de las funciones cosecante y secante, al ser recíprocas del seno y coseno, no pueden tener valores entre -1 y +1

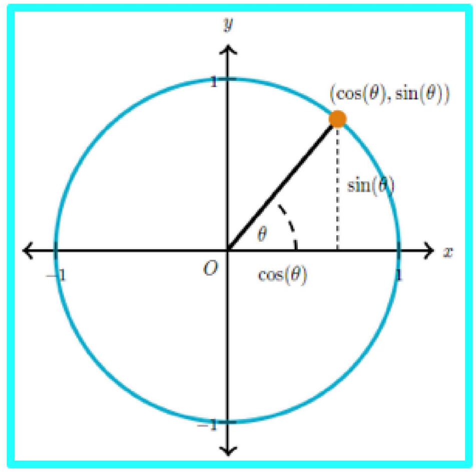
Los catetos pueden tener cualquier proporción entre sí → los valores de la tangente y cotangente varían en todo el conjunto de números reales

Valor de las funciones trigonométricas

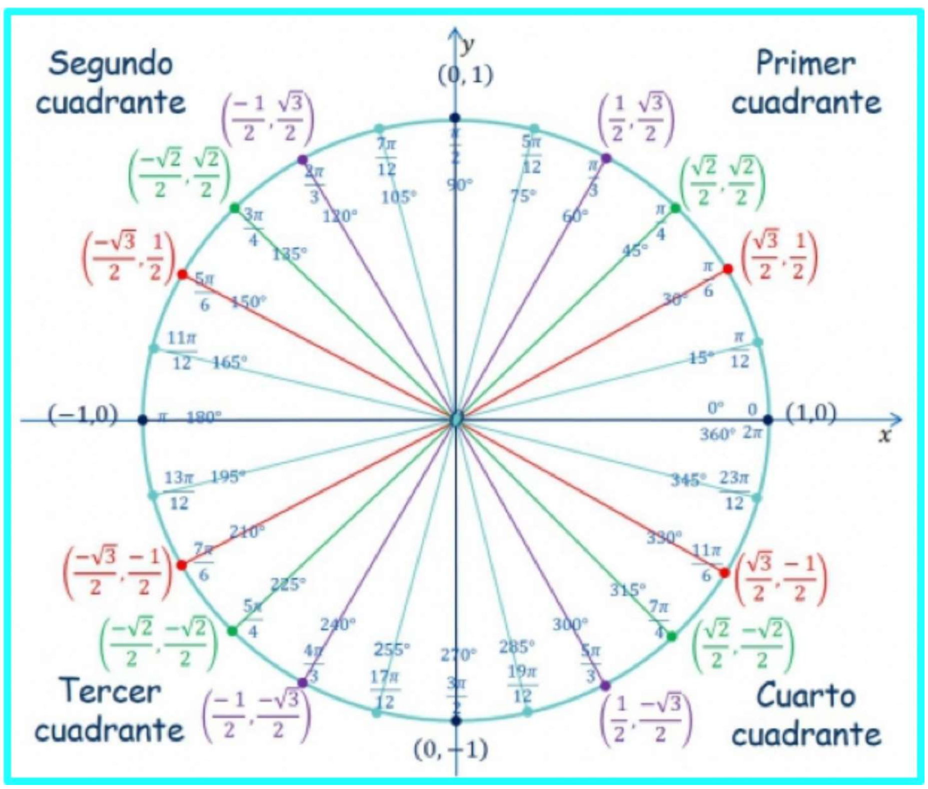
¿Qué es la definición de las funciones trigonométricas en el círculo unitario?

La definición en el círculo unitario nos permite extender el dominio de seno y coseno a **todos los números reales.**



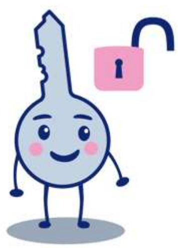


Valor de las funciones trigonométricas



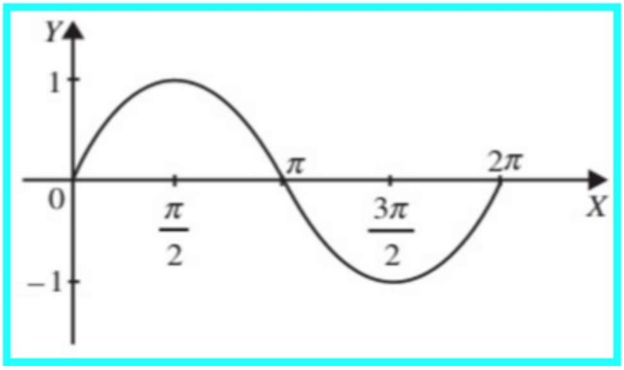
Cuadro de valores de las funciones trigonométricas

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Funciones	0°	90°	180°	270°	360°
seno	0	1	0	–1	0
coseno	1	0	–1	0	1
tangente	0	No existe	0	No existe	0
cotangente	No existe	0	No existe	0	No existe
secante	1	No existe	–1	No existe	1
cosecante	No existe	1	No existe	–1	No existe

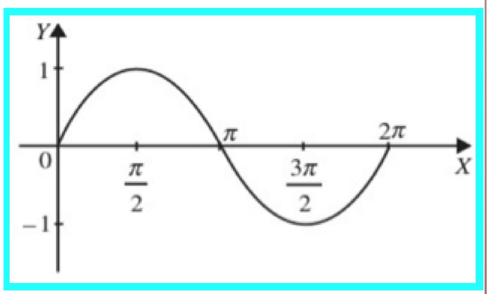


Gráfica de y = sen x

		1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante	
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0



Gráfica de y = sen x

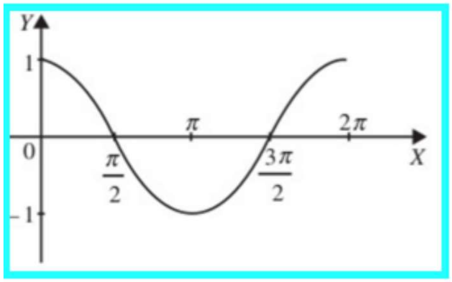


Características

- Periodo = 2π rad
- Función creciente en el primer cuadrante
- Función decreciente en el tercer cuadrante
- Función intersecta al eje horizontal en múltiplos enteros de π
- Dominio → $-\infty < x < \infty$
- Rango → $-1 \leq y \leq 1$

Gráfica de y = cos x

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	1	0.7	0	–0.7	–1	–0.7	0	0.7	1

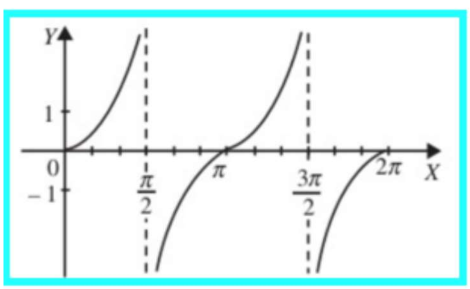


Características

- Periodo = 2π rad
- Función decrece en el primer cuadrante
- Función crece en el tercer cuadrante
- Función intersecta al eje horizontal en múltiplos impares de $\pi/2$
- Dominio → -∝ < x < ∝
- Rango → -1 ≤ y ≤ 1

Gráfica de y = tan x

	1o. cuadrante			2o. cuadrante			3o. cuadrante			4o. cuadrante			
X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	0	0.57	1.7	No existe	–1.7	–0.57	0	0.57	1.7	No existe	– 1. 7	–0.57	0

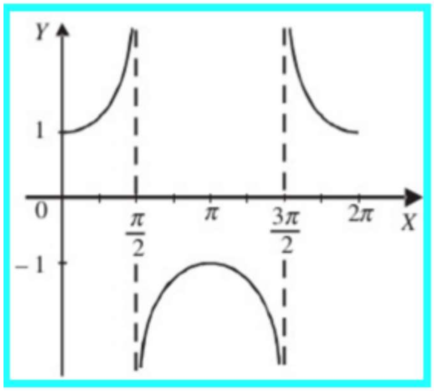


Características

- Función intersecta al eje horizontal en múltiplos enteros de π
- Periodo = π rad
- Dominio → x ≠ (2n+1) $\pi/2$, asíntotas verticales
- Rango → -∝ < y < ∝

Gráfica de y = sec x

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Y	1	14	No existe	– 1.4	–1	–1.4	No existe	1.4	1

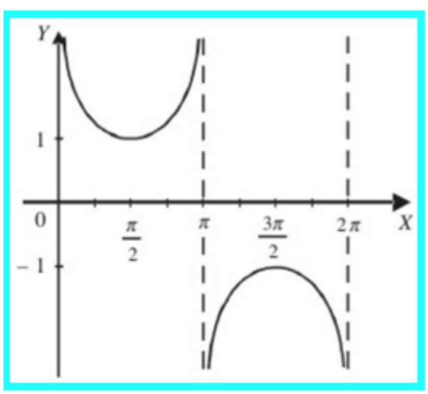


Características

- Función no intersecta al eje x
- Periodo = 2π rad
- Dominio → $x \neq (2n+1)\,\pi/2$, asíntotas verticales
- Rango → (-y, -1] U [1, y)

Gráfica de y = csc x

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Y	1	1.4	No existe	– 1.4	– 1	–1.4	No existe	1.4	1



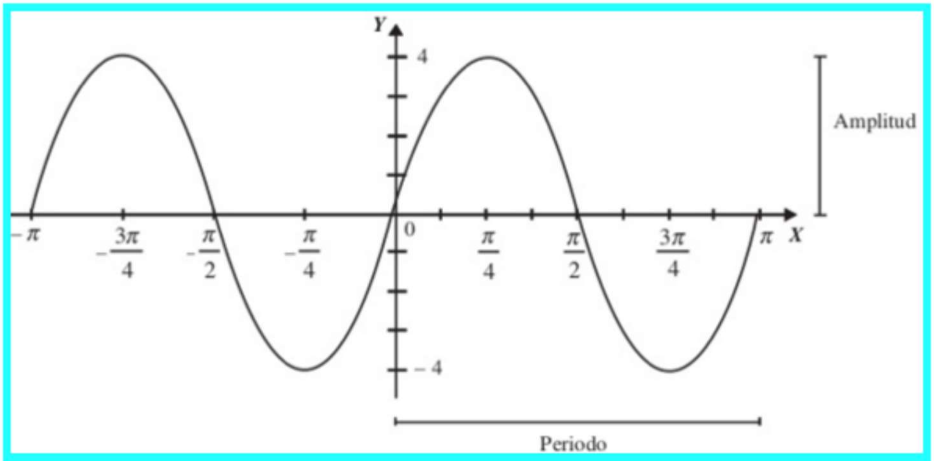
Características

- Función no intersecta al eje x
- Periodo = 2π rad
- Dominio → $x \neq n\pi$, asíntotas verticales
- Rango → (-y, -1] U [1, y)

Amplitud y periodo

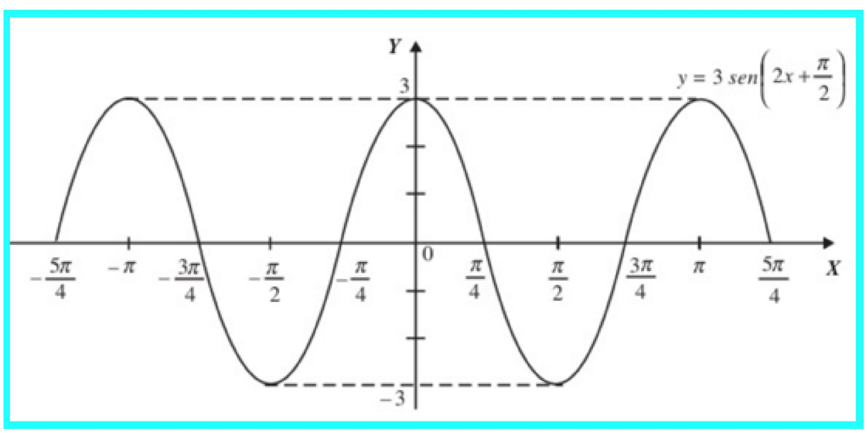
Si $y = a\,sen(bx)$ o $y = a\,cos(bx)$, para a, b ϵ R, distintos de cero, la gráfica tiene amplitud $|a|$ y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$.

y= 4 sen 2x



Desplazamiento de la fase → Desfasamiento

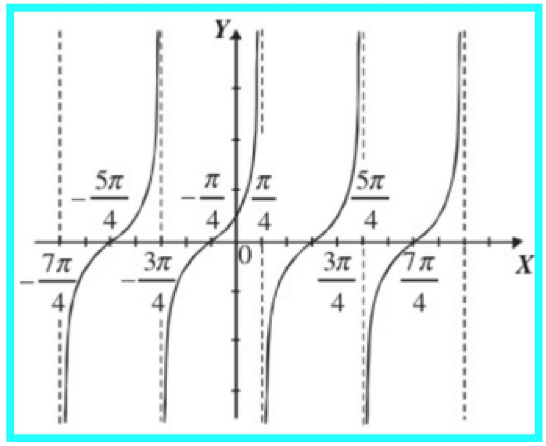
Si $y = a\,sen(bx + c)$ o $y = a\,cos(bx + c)$, para a, b, c ϵ R, distintos de cero, el desplazamiento de fase se calcula resolviendo las ecuaciones: $bx + c = 0$ y $bx + c = 2\pi$



Desplazamiento de la fase → Desfasamiento

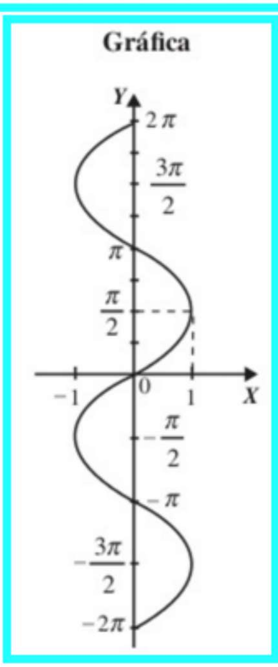
Si $y = a\,tan(bx + c)$, para a, b, c ϵ R, distintos de cero, el desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$.
Y el periodo es $\frac{\pi}{|b|}$.
Las asíntotas verticales sucesivas se determinan resolviendo:
$bx + c = -\pi/2$ y $bx + c = \pi/2$

$$y = \frac{1}{2}\,tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

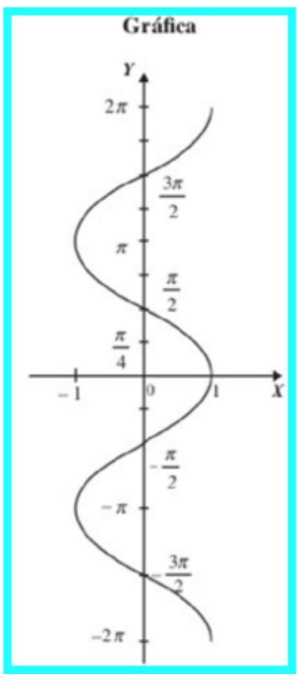


Inversos

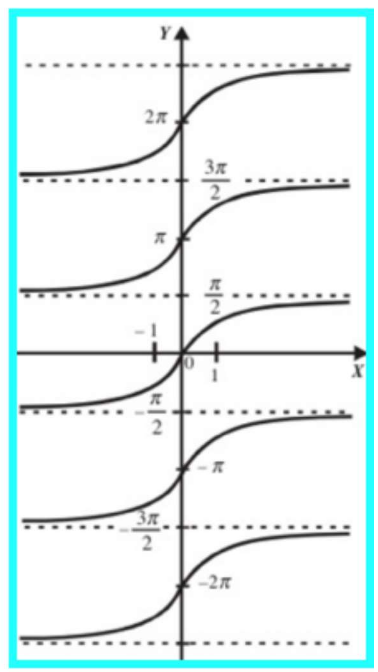
$y = sen^{-1} x = arc\ sen\ x$



$y = cos^{-1} x = arc\ cos\ x$

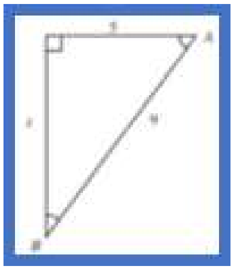


$y = tan^{-1} x = arc\ tan\ x$



Actividad 4

Lea y complete las oraciones con la respuesta correcta, apóyese en el siguiente diagrama:



El seno del ángulo B es

La tangente del ángulo B es

La cosecante del ángulo B es

Comprobar

Actividad 5

Examine la ecuación: $y = -7Sen(4x + 6)$, e indique si las afirmaciones son falsas o verdaderas:

La amplitud es igual a 7.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

El periodo es igual a 6

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Uno de los desfases es: $x_1 = -3/2$

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Uno de los desfases es: $x_2 = \frac{\pi}{2} + 3/2$

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Bibliografía

Aguilar Marquez, A. (2009). Matemáticas simplificadas. (2a ed.). Naucalpan de Juárez, Edo. De México: Pearson Educación.

Swokowski, E., & Cole, J. A. (2009). Algebra and trigonometry with analytic geometry. (12a ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole Cengage Learning.