



BUAP

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ingeniería

Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado

**DESARROLLO DE SOFTWARE PARA LA
ENSEÑANZA DE LA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS**

TESIS

Que para obtener el grado de:

**MAESTRO EN INGENIERÍA
CON OPCIÓN TERMINAL EN ESTRUCTURAS**

Presenta:

HÉCTOR JAVIER ROJAS ZAVALA

Director de tesis:

M. I. MARTÍN CASTILLO FLORES

Co-Director:

M. I. SILVIA CONTRERAS BONILLA

Puebla, Pue.

Junio 2019



BUAP

Oficio No. 1817/2018

C. Héctor Javier Rojas Zavala

Pasante de la Maestría en Ingeniería
con opción terminal en Estructuras
Facultad de Ingeniería, BUAP.
Presente

Por medio del presente, el suscrito M.I. Fernando Daniel Lazcano Hernández, Director de la Facultad de Ingeniería, de acuerdo a su solicitud de aprobación de Tema de Tesis, le autoriza desarrollar el tema intitulado: **Desarrollo de software para la enseñanza de la dinámica de estructuras**. Para obtener el grado de Maestro en Ingeniería con opción terminal en Estructuras. Asignándose como Director al M.I. Martín Castillo Flores y Codirector a la M.I. Silvia Contreras Bonilla.

Sin otro particular de momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente

"Pensar bien, para vivir mejor"

H. Puebla de Zaragoza, junio 15 de 2018.


M.I. Fernando Daniel Lazcano Hernández
Director

C.c.p. M.I. Martín Castillo Flores y M.I. Silvia Contreras Bonilla, Director y Codirector de tesis.

C.c.p. Archivo

ABH/MCF/sco*

CW

Facultad
de Ingeniería

Bvd. Valsequillo y Av. San Claudio
s/n, edif. ING - 4, Col. San Manuel,
Ciudad Universitaria,
Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7610

H. Puebla de Zaragoza, a 12 de junio de 2019


M.I. FERNANDO DANIEL LAZCANO HERNÁNDEZ
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
P R E S E N T E

Por medio de la presente informo que la tesis autorizada en el Oficio No. 1817/2019 con el tema titulado: "**Desarrollo de software para la enseñanza de la dinámica de estructuras**", de la cual fui asignado como director, ha sido concluida, alcanzando y cumpliendo satisfactoriamente con los objetivos planteados inicialmente.

Por lo anterior no tengo inconveniente en que el **Arq. Héctor Javier Rojas Zavala**, con Matrícula 217470310, prosiga con los trámites de titulación pertinentes para la obtención del grado de Maestría en Ingeniería con opción terminal en Estructuras.

Sin más por el momento, me despido reiterándole la seguridad de mi consideración distinguida.

Atentamente



M.I. Martín Castillo Flores
Coordinador de la Maestría en Ingeniería
con opción terminal en Estructuras.

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mis padres: Emilio Rojas y Yolanda Zavala
por su permanente apoyo, paciencia y comprensión.

Gracias por todo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por todo su apoyo incondicional.

A mis asesores M.I. Martín Castillo Flores y M.I. Silvia Contreras Bonilla, por brindarme sus conocimientos y valiosos aportes, y sobre todo por su amistad como asesores, durante el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Al Ing. Hugo Enrique Rojas Zavala, quien me ofreció su ayuda incondicional y con su inteligencia contribuyó a la realización de este proyecto.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por darme la posibilidad de superarme.

A la empresa DIRAC S.A.P.I. de C.V. por las facilidades brindadas para continuar con mi preparación como profesionista.

A todos los que de una forma u otra han contribuido al desarrollo de este proyecto.
Gracias.

ÍNDICE

ÍNDICE	vi
INTRODUCCIÓN	xi
CAPÍTULO 1. SOFTWARE EDUCATIVO	13
1.1 Enseñanza asistida por computadora.	13
1.2 El software educativo.	14
1.3 Software educativo existente para la enseñanza de temas de dinámica estructural.	17
CAPÍTULO 2. TEMAS DE DINÁMICA QUE SE INCLUYEN EN EL SOFTWARE “DINÁMICA ESTRUCTURAL”	20
2.1 Dinámica estructural.....	20
2.2 Caso estático vs caso dinámico.	20
2.3 Estructuras simples.....	21
2.4 Tipos de modelos.....	22
2.5 Conceptos básicos de dinámica estructural.	23
2.6 Osciladores de 1 grado de libertad.....	25
2.7 Vibración forzada armónica sin amortiguamiento.	38
2.8 Vibración forzada armónica con amortiguamiento.	43
2.9 Excitación en la base.	47
2.10 Vibración forzada armónica con amortiguamiento aplicada en la base (VFACAAB).....	51

2.11	Respuesta a impulsos e integral de Duhamel.....	53
2.12	Evaluación numérica de la integral de Duhamel.....	65
2.13	Método del espectro de respuesta (RSM).....	70
2.14	Análisis modal.....	79
2.15	Vibración libre sin amortiguamiento (VLSA).....	88
CAPÍTULO 3. CONCEPTOS DE PROGRAMACIÓN.....		90
3.1	Programas de computadora.....	90
3.2	Programación orientada a objetos.	93
3.3	Algoritmos de programación.	94
3.4	Interfaz gráfica de usuario.....	96
CAPÍTULO 4. PROGRAMA “DINÁMICA ESTRUCTURAL”		103
4.1	Interfaz de usuario.....	103
4.2	Oscilador de un grado de libertad (1GDL).....	104
4.3	Ejemplos desarrollados con un sistema de 1GDL.....	110
4.4	Sistema de múltiples grados de libertad (MGDL).....	114
4.5	Ejemplos desarrollados con un sistema de MGDL.....	121
CONCLUSIONES.....		142
RECOMENDACIONES		143
Bibliografía		144
ANEXO.....		146
DEMOSTRACIONES		146

NOTACIÓN

GDL	Grado de libertad
1GDL	Un solo grado de libertad
VGDL	Varios grados de libertad
u	Desplazamiento
u_i	Desplazamiento en el instante i
$u(0)$	Desplazamiento inicial
u^t	Desplazamiento total
u_g	Desplazamiento del terreno
u_{g0}	Desplazamiento máximo del terreno
U	Vector de desplazamientos u_j
\dot{u}	Velocidad
\dot{u}_i	Velocidad en el instante i
$\dot{u}(0)$	Velocidad inicial
\dot{u}_{g0}	Velocidad máxima del terreno
\ddot{u}	Aceleración
\ddot{u}_i	Aceleración en el instante i
\ddot{u}_g	Aceleración del terreno
\ddot{u}_{g0}	Aceleración máxima del terreno
c	Coefficiente de amortiguamiento
C	Matriz de amortiguamiento
E	Módulo de elasticidad
EI	Rigidez a la flexión
f	Frecuencia de excitación
f_D	Fuerza de amortiguamiento
f_I	Fuerza de inercia
f_n	Frecuencia natural (no amortiguada)
g	Aceleración debida a la gravedad
i	Número de pasos de tiempo
I	Segundo momento de área (momento de inercia)

I_b	I para una viga
I_c	I para una columna
k	Rigidez o constante del resorte
K	Matriz de rigidez
m	Masa
M	Matriz de masa
p	Fuerza externa
p_i	Valor de $p(t)$ en el tiempo i
p_0	Amplitud de $p(t)$
$r(t)$	Cualquier cantidad de respuesta
R	Reacción
t	Tiempo
t_i	Tiempo en el i -ésimo pico en vibración libre; tiempo al final del i -ésimo paso del tiempo
t_0	Tiempo cuando $u(t)$ es máximo
Δt	Paso de tiempo
Δt_i	Paso de tiempo i
T_n	Periodo natural
ζ	Fracción de amortiguamiento
ϕ	Ángulo de fase
ω	Frecuencia de excitación (rad/s)
ω_D	Frecuencia natural (amortiguada) (rad/s)
ω_n	Frecuencia natural (no amortiguada) (rad/s)
a_n	Ordenada del espectro de pseudo-aceleración $a(T_n, \zeta_n)$
$a_n(t)$	Pseudo-aceleración del n -ésimo modo de un sistema de 1GDL

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta el desarrollo de un Software educativo enfocado en los temas de "Dinámica Estructural" para ser utilizado en el aula. El programa se desarrolla en el lenguaje de programación C#. Se incluyen todos los temas teóricos que se imparten en un curso de dinámica en nivel de maestría, como base se tomó el curso impartido por el M.I. Martin Castillo Flores en la Facultad de Ingeniería de la BUAP.

Se describen ejemplos retomados de la literatura técnica existente y se comparan con los resultados obtenidos con el software desarrollado con el fin de dar validez al programa.

ABSTRACT

In the present work we present the development of an educational Software focused on the topics of "Structural Dynamics" to be used in the classroom. The program is developed in the programming language C #. All the theoretical topics that are taught in a course of dynamics at the master's level are included, as the basis of the course was taken by the M.I. Martin Castillo Flores at the School of Engineering of the BUAP.

Researched examples from the existing technical literature are developed and compared with the results obtained with the software developed in order to validate the software.

INTRODUCCIÓN

La dinámica estructural es indispensable en el análisis y diseño sísmico de estructuras, es un área de conocimiento fundamental en la formación de los profesionistas dedicados al diseño de estructuras.

La formación en dinámica estructural y su aplicación al análisis sísmico comienza en la etapa de estudiante y se va complementando durante la práctica profesional. Con el desarrollo de una herramienta computacional didáctica se propone estimular y complementar el aprendizaje del Análisis Dinámico de Estructuras.

En la actualidad se cuenta con un gran número de programas para el análisis dinámico de estructuras, sin embargo, estos programas tienen un enfoque orientado a la práctica profesional y no un enfoque educativo para servir de apoyo a los estudiantes. Por lo que surge la necesidad de una herramienta computacional que apoye al estudiante para reducir el tiempo empleado en la solución de los problemas numéricos y le permita dedicar más tiempo a la comprensión de los temas.

En el presente trabajo se incluyen conceptos de tres áreas: pedagogía, dinámica estructural y computación, obteniendo como resultado un programa con fines didácticos. En el Capítulo I, se presentan las principales características que debe presentar un “software educativo” y se exponen de manera breve ejemplos existentes. En el Capítulo II, se incluyen conceptos básicos de programación y se describen algunos elementos que integran un programa de computadora, los elementos descritos corresponden a los empleados en la aplicación desarrollada. El Capítulo III, contiene la parte teórica de la “Dinámica Estructural”, y se incluyen los principales temas tratados en el aula y que servirán como fuente de consulta por parte del alumno. Finalmente, en el Capítulo IV, se describen las partes que integran el programa computacional desarrollado y se exponen algunos ejemplos retomados de la literatura clásica con el fin de validar los resultados del programa.

Una de las características principales del programa es la parte visual, lo cual se refleja en la presentación de resultados en gráficas y animaciones, con el fin de que ayude a una mejor comprensión por parte del alumno.

Es importante mencionar que el software se desarrolló como herramienta de cálculo y para servir de apoyo a las clases teóricas impartidas en el aula. Para lo cual se consideró como base el curso de “Dinámica Estructural” impartido en el posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.



CAPÍTULO 1. SOFTWARE EDUCATIVO

En la actualidad la computadora se utiliza como una herramienta poderosa para cualquier trabajo y actividad en la vida humana. El uso de software en la educación se ha incrementado en los últimos años, invadiendo los espacios educativos y constituyéndose tanto en un producto como en un medio de aprendizaje de conocimientos, habilidades y procedimientos dirigido hacia un grupo específico de estudiantes (Sevari, 2018).

1.1 Enseñanza asistida por computadora.

La enseñanza asistida por computadora es un sistema en el cual se utiliza la tecnología para efectuar ejercicios, cálculo, simulaciones y tutorías. Las computadoras pueden enseñar ciertas habilidades que no son posibles con los métodos tradicionales (Cabero Almenara, 2007).

La enseñanza tradicional funciona como una forma de transmitir conocimientos, tratando de ampliar los archivos de la memoria y centrándose excesivamente en los contenidos y en el saber del maestro. Los estudiantes son solo receptores. El maestro es el poseedor de la verdad y junto con el contenido son el centro de la actividad. El estudiante será recompensado en las evaluaciones posteriores si sus conocimientos coinciden con lo que se ha transmitido.

La implementación del software educativo propuesto en este trabajo se basa en la teoría de la “construcción del conocimiento” la cual busca más participación, interactividad, significado de la información para el estudiante y se enfocan en él como artífice de su propio conocimiento dentro del concepto de proceso del aprendizaje. Las ideas constructivistas provienen de la investigación sobre el desarrollo cognoscitivo de (Piaget, 2003), quien consideró que el conocimiento no resulta del simple registro de la información, sin que medie una actividad constructiva por parte del sujeto en interacción con el objeto. Piaget no entendió el conocimiento como un hecho dado sino como un proceso, como un elemento en evolución que se construye a sí mismo a través de la acción.



El papel del docente también cambia en las prácticas constructivistas: es un guía que establece objetivos, estimula a los estudiantes, favorece el autoaprendizaje y evalúa y redirige el proceso constantemente, sin adoptar la posición de experto en el tema. Con el apoyo de “programas de simulación” se genera en el aula de clase un ambiente de aprendizaje constructivista en donde los estudiantes descubren el conocimiento y el docente interviene cuando es requerido

1.2 El software educativo.

El software educativo se puede considerar como el conjunto de recursos informáticos diseñados con la intención de ser utilizados en el contexto del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Se caracterizan por ser altamente interactivos, a partir del empleo de recursos multimedia, como videos, sonidos, fotografías, diccionarios especializados, explicaciones de experimentados profesores, ejercicios y juegos instructivos que apoyan las funciones de evaluación y diagnóstico.

El software educativo puede tratar las diferentes materias, de formas muy diversas a partir de cuestionarios, facilitando una información estructurada a los estudiantes, mediante la simulación de fenómenos y ofrecer un entorno de trabajo más o menos sensible a las circunstancias de los estudiantes y más o menos rico en posibilidades de interacción; pero todos comparten las siguientes características:

- Permite la interactividad con los estudiantes, retroalimentándolos y evaluando lo aprendido.
- Facilita las representaciones animadas.
- Incide en el desarrollo de las habilidades a través de la ejercitación.
- Permite realizar simulaciones de procesos complejos.
- Reduce el tiempo de que se dispone para impartir gran cantidad de conocimientos facilitando un trabajo diferenciado, introduciendo al estudiante en el trabajo con los medios computarizados.



- Facilita el trabajo independiente y a la vez un tratamiento individual de las diferencias.
- Permite al usuario (estudiante) introducirse en las técnicas más avanzadas.

De acuerdo con (García Vidal, 2000), los programas de software educativo constituyen un medio importante dentro del aprendizaje de nuevos conocimientos, debido a que son materiales elaborados con una funcionalidad didáctica utilizando el ordenador como soporte para que los estudiantes realicen actividades que los docentes proponen.

Benzanilla, 2008 considera como software educativo a:

“Aquellos programas capaces de servir de ayuda al aprendizaje del estudiante y de apoyo, nunca de sustituto a la labor pedagógica del profesor, y además, dadas las cualidades de los mismos (interacción, dinamismo, colorido, multimedia, etc.), posibilitadores de mejoras del aprendizaje del estudiante”.

Según el enfoque educativo, Thomas Dwyer propone una gran clasificación: de tipo algorítmico y de tipo heurístico. En el primero, la persona encargada de transmitir el conocimiento agrupa la información y diseña un conjunto de actividades, la tarea del aprendiz es asimilar al máximo lo que se le enseña. El software educativo de tipo heurístico se basa en el aprendizaje a partir de las experiencias, el educador crea ambientes de exploración y descubrimiento, de donde el alumno podrá generar su propio conocimiento (Galvis, 1994).

Según (Galvis, 1994),” El diseño de Software Educativos Computarizados (SEC), requiere de una metodología que consiste en:

1. El diagnóstico y análisis de necesidades seguido del diseño sustentado en las teorías de aprendizaje y diseño instruccional junto con la documentación adecuada de cada fase.
2. El diseño del SEC fundamentado en aspectos como: el diseño comunicacional, el diseño computacional y el diseño instruccional. El

diseño comunicacional corresponde al sistema de comunicación entre los usuarios y el programa llamado: interfaz gráfica. Para ello se debe tomar en cuenta el diseño de la interfaz, carga cognitiva, facilidad de uso, navegación, presentación de la información, compatibilidad del conocimiento, integración de los medios, estética y funcionalidad.

3. La elaboración del software educativo y evaluación. Es importante que la producción de software educativo fundamenta su diseño en el conocimiento de cómo aprenden los seres humanos, es decir, en sus estilos de aprendizaje acorde a las teorías de aprendizaje. (Figura 1.1)



Figura 1.1 Metodología de Ingeniería Software Educativo, (Galvis, 1994)

En todo proceso de desarrollo de software educativo se necesita planificar como quedará constituido u organizado el desarrollo de las actividades, esto ayuda a que durante el proceso se tenga un control que permita cumplir a cabalidad lo establecido en la planificación de la producción. El conjunto de procesos integra las metas u objetivos que se pretenden alcanzar, la distribución de las funciones que cada persona tendrá que asumir para lograr los objetivos que han sido planteados y por último un cronograma de actividades.



1.3 Software educativo existente para la enseñanza de temas de dinámica estructural.

Los principales proyectos para la educación en dinámica estructural que usan las tecnologías de la información y la comunicación se han desarrollado en los E. U. e incluyen laboratorios virtuales basados en Java, financiados por el Centro Multidisciplinario para Investigación en Ingeniería Sísmica (MCEER), los cuales proporcionan un ambiente de simulación y la animación del modelo de la estructura representada por la masa, el resorte y el amortiguador. También está el Consorcio Universitario de Mesas Sísmicas Instruccionales (UCIST) utilizadas para realizar experimentos con estructuras a escala y la ciber - infraestructura de la Red de Simulación de Ingeniería de Terremotos de Estados Unidos (NEES) que permite realizar experimentación remota con las mesas sísmicas (Ramírez , et al., 2010).

En Colombia se utilizan simuladores sísmicos para las prácticas de laboratorio presenciales en algunas universidades. La Universidad del Valle cuenta con un simulador sísmico uniaxial desde el año 2000. Adicionalmente se construyó una nueva mesa vibratoria portátil tele-operable para la realización de ensayos dinámicos desde cualquier parte del mundo.

El diseño y desarrollo del Programa ESIDE (Educación con Simulación Interactiva para Dinámica Estructural), integra dos proyectos desarrollados en la Universidad del Valle: Desarrollo Tecnológico de Laboratorios Remotos para Ingeniería Sísmica y Dinámica Estructural y la Plataforma Remota de Apoyo a la Educación en Dinámica Estructural (Ramírez , et al., 2010). La aplicación ESIDE permite simular la respuesta dinámica de una estructura modelada como un sistema de un grado de libertad ante diferentes excitaciones (Figura 1.2).

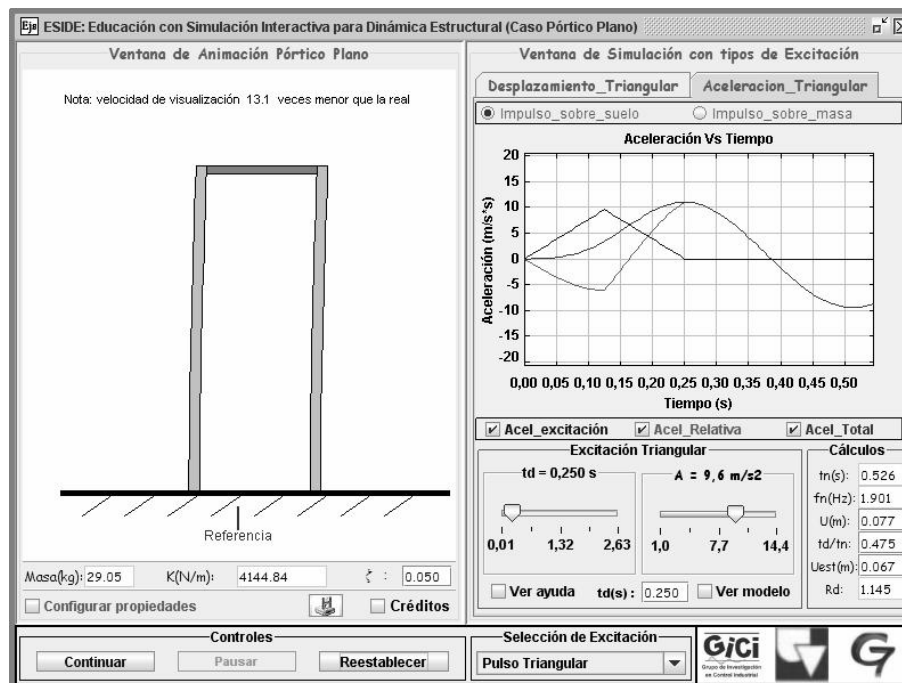


Figura 1.2 Interfaz gráfica del programa ESIDE, (Ramírez , et al., 2010)

La mayoría de los sitios web con propósitos educativos relacionados con la dinámica estructural exploran conceptos sobre sismos, como su generación, sus efectos y prevención de desastres. No profundizan en el análisis matemático de la ingeniería sísmica y la dinámica estructural. Se han desarrollado algunos programas de simulación para la dinámica estructural como Dinafácil y DINEST basados en Delphi y SAT-LAB basado en Matlab. Además, existen programas de ingeniería estructural como RISA, ETABS, y SAP2000 que incluyen dentro de sus módulos el análisis dinámico.

En México cabe resaltar el programa "Degtra" desarrollado por M. Ordaz (II-UNAM) y C. Montoya Dulché (CENAPRED), que fue creado especialmente para obtener resultados correspondientes al tema de dinámica estructural, pero que no está diseñado con fines de ser software educativo, más bien son un medio para obtener cálculos específicos requeridos en una investigación.



El software que fue desarrollado con fines educativos es el “Dinámica” desarrollado por (Hinojoza Gabriel, 2009) en su tesis de maestría. El cual muestra las animaciones de la respuesta de los osciladores de un grado de libertad y de varios grados de libertad ante diferentes tipos de excitación (Figura 1.3). Para lograrlo utiliza una aproximación numérica de la integral de Duhamel, conocido también como el método de las ocho constantes, para obtener la respuesta dinámica de los osciladores.

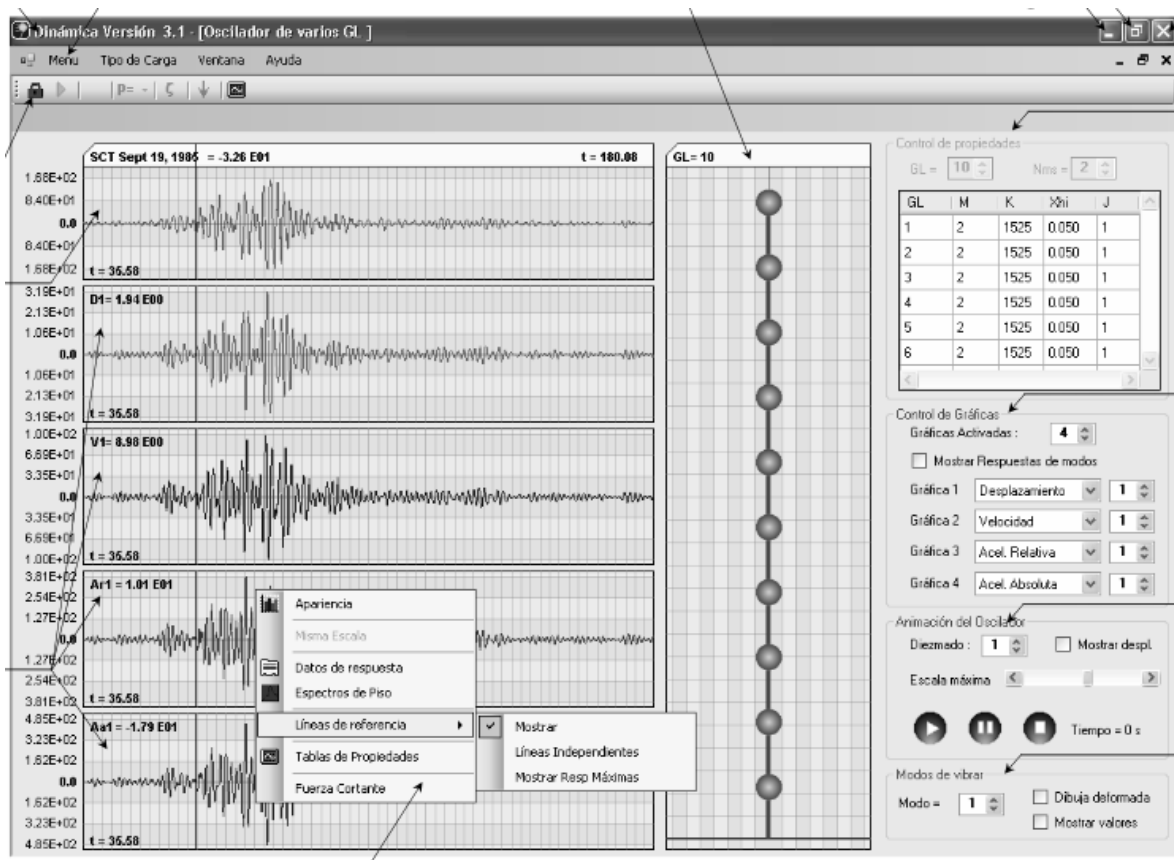


Figura 1.3 Interfaz gráfica del programa “Dinámica”, (Hinojoza Gabriel, 2009)



CAPÍTULO 2. TEMAS DE DINÁMICA QUE SE INCLUYEN EN EL SOFTWARE “DINÁMICA ESTRUCTURAL”

La Dinámica de Estructuras es un área del análisis mecánico de las construcciones que estudia el efecto de las acciones externas que producen vibraciones (Hurtado Gómez, 2000). En los problemas de ingeniería no es siempre posible obtener soluciones matemáticas rigurosas. Ante la complejidad de las condiciones reales se hace necesario introducir simplificaciones o idealizaciones para reducir el problema a una solución matemática que sea capaz de dar resultados aceptables desde el punto de vista de la seguridad y la economía, el nexo entre sistema físico y la posible solución matemática se obtiene con el modelo matemático (Paz, 1992).

2.1 Dinámica estructural.

El objetivo de la Dinámica estructural es analizar la respuesta de un sistema estructural ante cualquier acción dinámica arbitraria. Entiéndase a dinámica como cualquier fenómeno, cantidad o propiedad que varía con el tiempo.

La dinámica estructural se ha desarrollado ampliamente a partir de la aparición de la computadora. Sus fundamentos se remontan más de dos siglos y medio atrás, pero puede decirse que el enfoque moderno proviene de las últimas cuatro décadas.

2.2 Caso estático vs caso dinámico.

Algunas de las cargas que actúan sobre las estructuras tienen un valor que no cambia con el tiempo. Otras cargas, como las cargas vivas, aunque cambian con el tiempo, lo hacen en periodos largos, y pueden considerarse como constantes. Cuando el análisis estructural se efectúa con cargas permanentes como las anteriores, se denomina análisis estático. Los desplazamientos, y fuerzas internas (axiales, cortantes y momentos) se calculan una sola vez.

Las estructuras pueden estar sujetas a acciones externas cuya magnitud varía rápidamente con el tiempo, como los sismos o el viento. Los efectos de estas acciones se analizan con los métodos de la dinámica estructural. En este caso los



desplazamientos y las fuerzas internas varían con respecto al tiempo y su calculo se puede realizar varias veces en cada instante de tiempo (Figura 2.1).

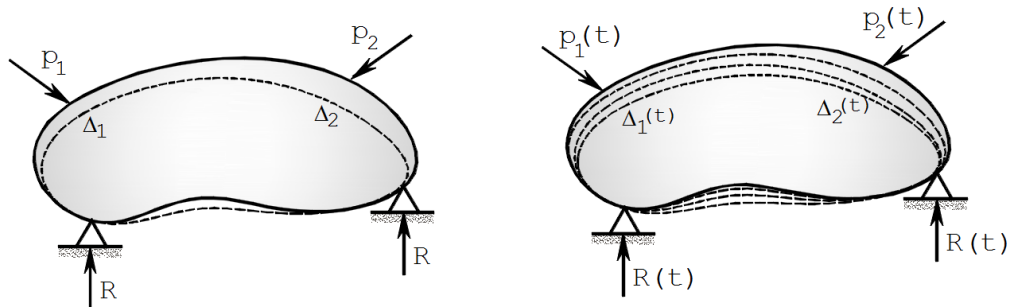


Figura 2.1 Análisis estático y análisis dinámico de estructuras.

2.3 Estructuras simples.

El estudio de la dinámica de las estructuras se inicia con estructuras simples (por ejemplo, las mostradas en la Figura 2.2). Estas estructuras se llaman simples porque pueden idealizarse como una masa m concentrada o agrupada soportada por una estructura sin masa con rigidez k en la dirección lateral. Se tiene interés en comprender la vibración de estas estructuras cuando se les aplica una fuerza lateral (u horizontal) en la parte superior o un movimiento horizontal del terreno debido a un sismo (Chopra, 2014).

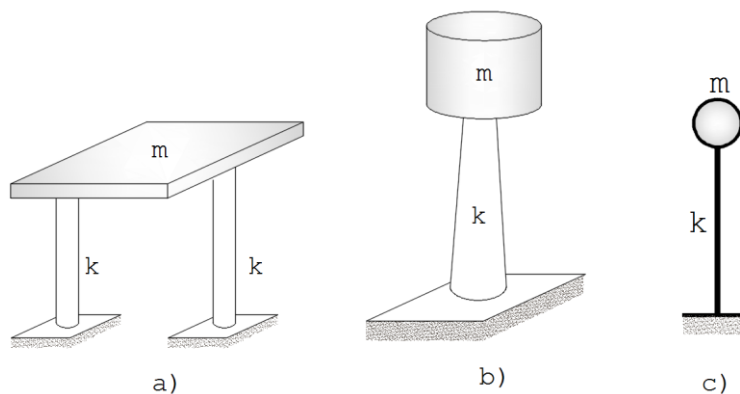


Figura 2.2 Estructuras simples, a) pérgola, b) tanque elevado, c) estructura idealizada

2.4 Tipos de modelos.

En la dinámica estructural existe la modelación discreta y la modelación continua,

- a) Modelo continuo: En una estructura donde se pretenda conocer el movimiento completo de todos y cada uno de sus puntos, se establece un modelo o sistema continuo, de infinitos grados de libertad, este modelo se conoce también con la denominación de parámetro distribuido (Figura 2.3). El cálculo de la respuesta, en todos los puntos del continuo y en el tiempo, complica en gran medida la solución del problema (Miguel Tejada, 2011).

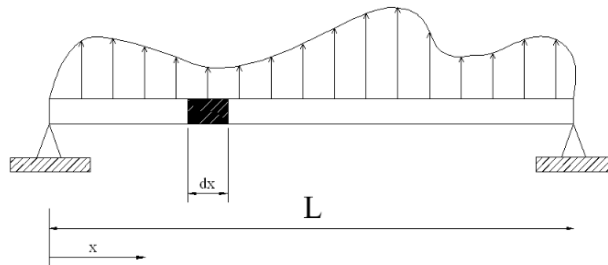


Figura 2.3 Sistema continuo (viga), (Miguel Tejada, 2011)

- b) Modelo discreto: Las propiedades de la estructura se concentran en los grados de libertad (Figura 2.4). En la modelización del sistema se contemplan habitualmente, los siguientes procedimientos de discretización: método de las masas concentradas, método de los elementos finitos y método de los desplazamientos generalizados (Miguel Tejada, 2011).

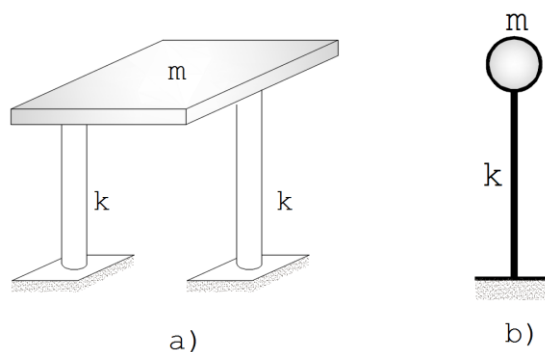


Figura 2.4 a) Modelo continuo, b) Modelo discreto



2.5 CONCEPTOS BÁSICOS DE DINÁMICA ESTRUCTURAL.

Ante acciones de tipo dinámico una estructura responde modificando su configuración alrededor de una posición de equilibrio estable. Estos cambios de configuración pueden alcanzar grandes amplitudes incluso para valores pequeños de la acción excitadora, pudiendo conducir al colapso de la estructura. A continuación, se revisan algunos de los conceptos básicos del análisis dinámico de estructuras.

2.5.1 Principio de D’Alembert.

En 1743 Jean le Rond d’Alembert publicó su “Tratado de dinámica”, que contenía el teorema conocido como “Principio de D’Alembert”. Este principio de equilibrio dinámico se basa en la noción de una fuerza inercial ficticia, una fuerza que es igual al producto de la masa por su aceleración y que actúa en dirección opuesta a la aceleración (Chopra, 2014). Lo anterior establece que, con las fuerzas de inercia incluidas, un sistema está en equilibrio en cada instante de tiempo.

2.5.2 Vibración.

Una vibración mecánica se produce por lo general cuando un sistema se desplaza de una posición de equilibrio estable. El sistema tiende a retornar a su posición bajo la acción de fuerzas restauradoras (ya sea fuerzas elásticas, como en el caso de una masa unida a un resorte, o fuerzas gravitacionales, como en el caso de un péndulo). Pero el sistema por lo general alcanza su posición original con cierta velocidad adquirida que lo lleva más allá de esa posición. Puesto que el proceso puede repetirse de manera indefinida, el sistema se mantiene moviéndose de un lado a otro de su posición de equilibrio (Figura 2.5).

Los términos movimiento, oscilación y vibración no son sinónimos. Toda vibración es una oscilación y toda oscilación es un movimiento, pero esta afirmación no puede hacerse en sentido inverso. Así, una rueda se mueve, pero no oscila, y un péndulo simple oscila, pero no vibra.

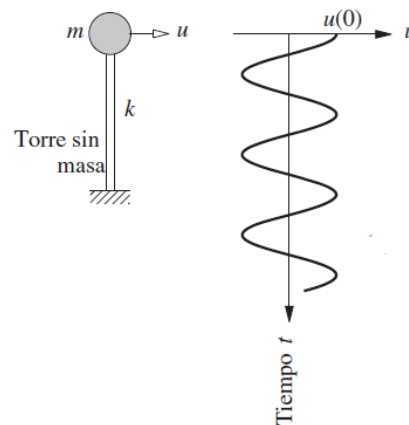


Figura 2.5 Vibración libre debida a un desplazamiento inicial, (Chopra, 2014)

2.5.3 *Periodo natural de vibración.*

Se define como el tiempo necesario para completar un ciclo de vibración u oscilación. Entendiéndose como ciclo de vibración al lapso en el que se repite el fenómeno, cuyas unidades son segundos.

2.5.4 *Frecuencia cíclica natural de vibración.*

Se define como el número de ciclos por segundo que ocurren en el fenómeno de vibración. Un sistema ejecuta $1/T_n$ ciclos en 1 segundo. Se define mediante:

$$f_n = \frac{1}{T_n} \quad (2.1)$$

Las unidades de f_n son Hertz (Hz) (ciclos por segundo (cps)).

2.5.5 *Frecuencia circular natural de vibración.*

Se define como una velocidad angular con la cual vibra el sistema. Se define mediante:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \quad (2.2)$$

Las unidades de ω_n son radianes por segundo (rad/s).



Las propiedades de vibración natural ω_n , T_n y f_n dependen sólo de la masa y rigidez de la estructura. Si dos sistemas de 1GDL tienen la misma masa, el que sea más rígido de los dos tendrá la frecuencia natural más alta y el periodo natural más pequeño. De manera similar, si dos estructuras tienen la misma rigidez, aquella que sea la más pesada (con mayor masa) tendrá la menor frecuencia natural y el periodo natural más largo. El calificativo natural se utiliza en la definición de T_n , ω_n y f_n para destacar el hecho de que éstas son propiedades naturales del sistema cuando se le permite vibrar con libertad sin ningún tipo de excitación externa.

2.5.6 Ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento es aquella que gobierna la respuesta dinámica y representa la formulación matemática con la que se evalúa la respuesta.

El procedimiento para determinar la ecuación de movimiento es el siguiente:

- 1) Genere el modelo analítico (señale el o los GDL e indique su sentido positivo).
- 2) Genere un desplazamiento positivo en todos los GDL (al mismo tiempo) procure que el desplazamiento sea mayor en cada nivel superior.
- 3) Genere un diagrama de cuerpo libre en cada masa asociada aun GDL.
- 4) Aplique el principio de D’Alambert a cada masa.
- 5) Realice una sumatoria de fuerzas en cada GDL.

2.6 OSCILADORES DE 1 GRADO DE LIBERTAD.

El número de desplazamientos independientes requerido para definir las posiciones desplazadas de todas las masas en relación con su posición original se denomina número de grados de libertad (GDL) para el análisis dinámico (Chopra, 2014).

Un modelo dinámico exacto (con infinitos GDL) acarrearía más inconvenientes en la resolución matemática que beneficios en su precisión. Además, en estructuras de edificios y en la mayoría de las estructuras civiles, las masas se encuentran más o menos concentradas en lugares conocidos.



El sistema masa-resorte-amortiguador considerado se muestra esquemáticamente en la Figura 2.6. Cada elemento estructural (viga, columna, muro, etcétera) de la estructura real contribuye a las propiedades inerciales (masa), elásticas (rigidez o flexibilidad) y de disipación de la energía (amortiguamiento) de la estructura. Sin embargo, en el sistema idealizado, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puros distintos: el componente de masa, el componente de rigidez y el componente de amortiguamiento (Chopra, 2014).

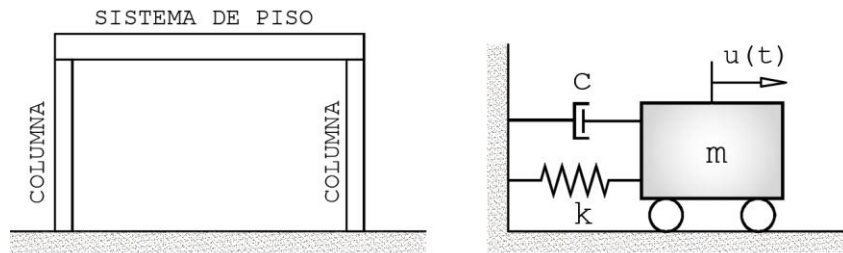


Figura 2.6 Sistema idealizado de 1GDL

Iniciaremos el análisis considerando una estructura de 1GDL sin amortiguamiento para posteriormente incluir en las ecuaciones deducidas la influencia del amortiguamiento del modelo.

2.6.1 Modelo de 1GDL no amortiguado

Las características dinámicas de un oscilador de 1GDL pueden estudiarse mediante un modelo no amortiguado con vibraciones libres (Figura 2.7), se dice que una estructura experimenta vibración libre cuando es perturbada de su posición de equilibrio estático y después se deja vibrar sin ninguna excitación dinámica externa, cuya ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.3)$$

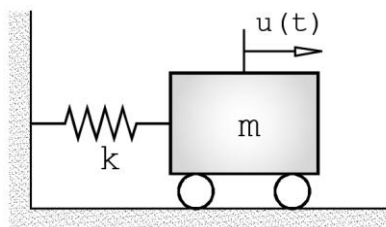


Figura 2.7 Modelo de 1GDL no amortiguado



La vibración es inducida por algunas condiciones iniciales, sean desplazamiento, velocidad o aceleración en el instante $t = 0$.

2.6.1.1 Solución de la ecuación de movimiento.

La vibración libre se inicia al sacar al sistema de su posición de equilibrio estático, impartiendo a la masa cierto desplazamiento $u(0)$ y velocidad $\dot{u}(0)$ en el tiempo $t = 0$, definido como el instante en que se inicia el movimiento.

La ecuación (2.3) es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea. La solución de la ecuación es (ver demostración A.1):

$$u(t) = A \cos \omega(t) + B \sin \omega(t) \quad (2.4)$$

Respuesta dinámica en términos de desplazamiento. Donde A y B son constantes que se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema.

2.6.1.2 Cálculo de las constantes.

Dado que A y B son constantes, es decir, su valor no varía en el tiempo por lo que su solución se simplifica evaluando en el instante de tiempo $t = 0$.

Para el caso de vibración libre la entrada de energía es mediante condiciones iniciales y las cuales se aplican en el instante $t=0$, donde aún no comienza el fenómeno de vibración.

Por lo tanto, en:

$$u(t = 0) = u_0 \quad (\text{Desplazamiento inicial}) \quad (2.5)$$

$$\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0 \quad (\text{Velocidad inicial}) \quad (2.6)$$

Se necesitará derivar una vez la ecuación (2.4) para encontrar $\dot{u}(t)$ y poder aplicar la ecuación (2.6).

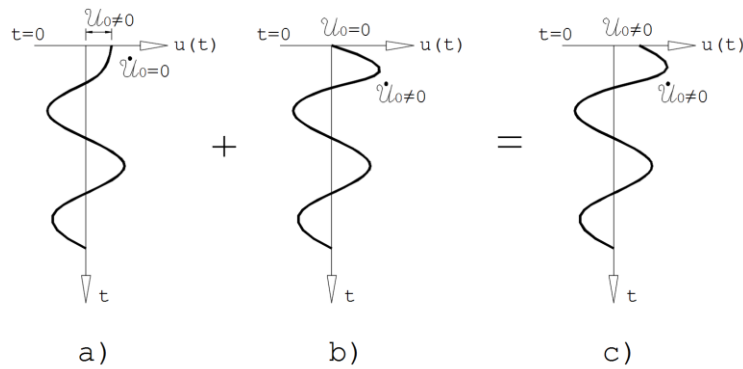


Figura 2.8 a) Desplazamiento inicial, b) Velocidad inicial c) Condiciones iniciales.

Derivando (2.4) se obtiene la respuesta dinámica en términos de velocidad:

$$\dot{u}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (2.7)$$

Aplicando (2.5) en (2.4) en $t=0$.

$$u_0 = A \cos \omega(0) + B \sin \omega(0)$$

$$u_0 = A \quad (2.8)$$

Aplicando (2.6) en (2.7)

$$\dot{u}_0 = -A\omega \sin \omega(0) + B\omega \cos \omega(0)$$

$$\dot{u}_0 = B\omega$$

$$\frac{\dot{u}_0}{\omega} = B \quad (2.9)$$

Derivando (2.7) se obtiene la respuesta dinámica en términos de aceleración:

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t \quad (2.10)$$

Aplicando la ley de Hooke se obtiene la ecuación que describe la reacción en el apoyo del resorte $R(t)$:

$$R(t) = -u(t) k \quad (2.11)$$

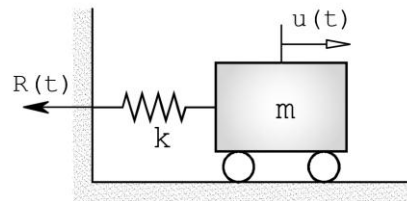


Figura 2.9 Modelo de 1GDL no amortiguado con la inclusión de la función de la reacción R(t)

2.6.1.3 Expresión alternativa.

La respuesta dinámica en términos de desplazamiento en el movimiento de vibración libre puede expresarse de forma alternativa por la ecuación (2.12) (ver demostración en anexo A.3):

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.12)$$

Donde:

$$U_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{Amplitud máxima} \quad (2.13)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) \quad \text{Ángulo de fase} \quad (2.14)$$

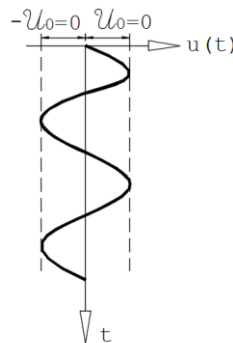


Figura 2.10 Amplitud máxima

2.6.2 Modelo de 1GDL amortiguado

En la realidad, las estructuras que vibran libremente atenúan su respuesta conforme avanza el tiempo, a este fenómeno se le conoce como amortiguamiento de la vibración.

El amortiguamiento se puede definir como la propiedad de la estructura de disipar la energía potencial y cinética.

Las principales fuentes de amortiguamiento estructural son:

- Rozamiento o fricción interna
- Calor
- Deformaciones permanentes
- Daño (agrietamiento)

Estas y otras razones harán que la estructura que vibra libremente tienda al reposo.

2.6.2.1 Amortiguamiento viscoso.

Cuando se considera el amortiguamiento, éste se asume del tipo viscoso.

En el amortiguamiento viscoso las fuerzas generadas se asumen proporcionales a la velocidad (Figura 2.11). La razón, es que esta asunción nos conduce a modelos matemáticos relativamente simples.

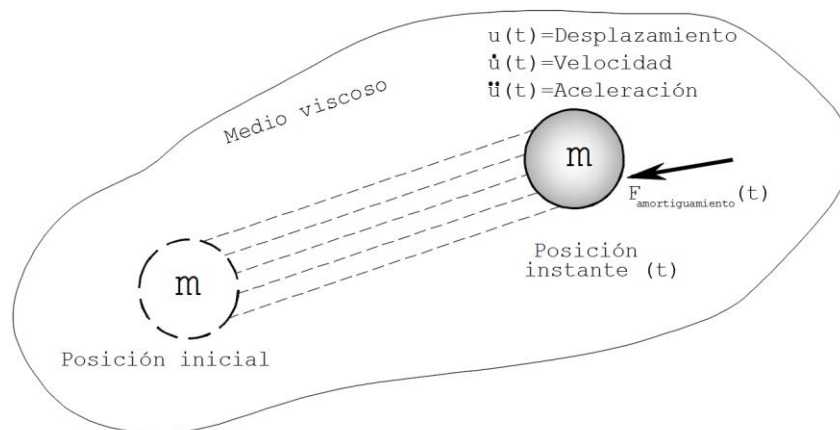


Figura 2.11 Amortiguamiento viscoso

$$F_{\text{amortiguamiento}}(t) \propto \dot{u}(t) \quad (2.15)$$

$$F_{\text{amortiguamiento}}(t) = c \dot{u}(t) \quad (2.16)$$

Donde: c = constante de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento

Despejando c:

$$c = \frac{F_{\text{amortiguamiento}}(t)}{\dot{u}(t)} \quad (2.17)$$

2.6.2.2 Modelo analítico.

Utilizando el modelo de un oscilador de 1GDL amortiguado, mostrado en la Figura 2.12, pueden determinarse las propiedades dinámicas.

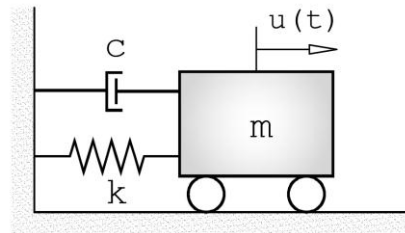


Figura 2.12 Modelo de 1 GDL con amortiguamiento.

2.6.2.3 Tipos de sistemas según su amortiguamiento.

De acuerdo con el nivel de amortiguamiento se tienen distintas respuestas dinámicas en las estructuras, estas van desde estructuras con amortiguamiento nulo donde “vibran eternamente” (caso teórico) hasta estructuras con tanto amortiguamiento que no vibran (Figura 2.13).

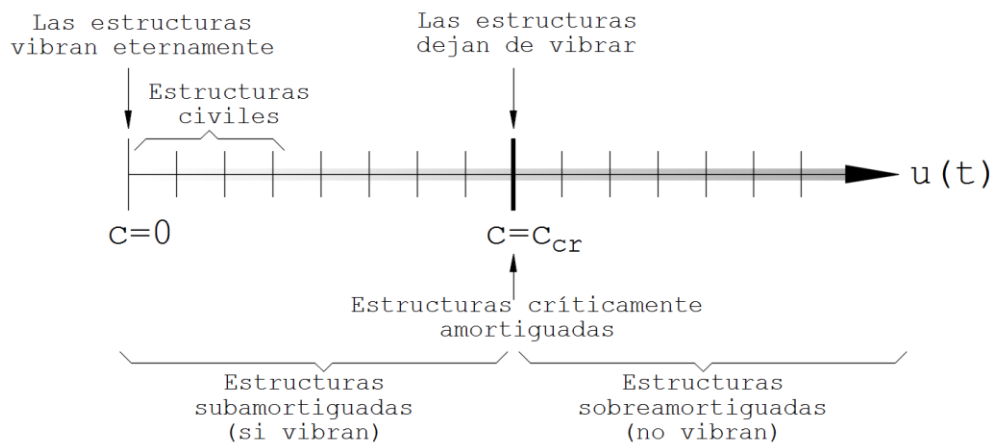


Figura 2.13 Esquema de variación de “c” en las estructuras



Por lo tanto, se tienen las siguientes situaciones:

$c < c_{cr} \rightarrow$ Estructura subamortiguado (si vibra).

$c = c_{cr} \rightarrow$ Estructura críticamente amortiguada (no vibra).

$c > c_{cr} \rightarrow$ Estructura sobreamortiguada (no vibra).

2.6.2.4 Porcentaje o fracción de amortiguamiento (ζ).

Se define como la razón entre el coeficiente de amortiguamiento “c” y el coeficiente crítico “cr”.

$$\zeta = \frac{c}{c_r} \tag{2.18}$$

Si:

$\zeta < 1 \rightarrow$ Estructura subamortiguada.

$\zeta = 1 \rightarrow$ Estructura críticamente amortiguada.

$\zeta > 1 \rightarrow$ Estructura sobreamortiguada.

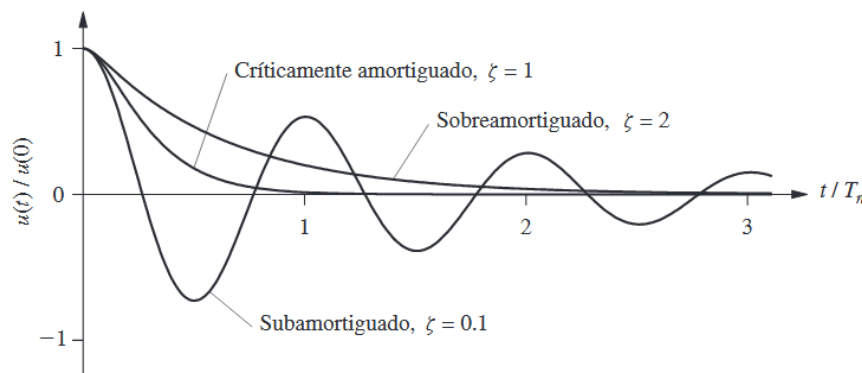


Figura 2.14 Vibración libre de estructuras subamortiguadas, críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas, (Chopra, 2014)

2.6.2.5 Porcentajes de amortiguamiento en estructuras civiles.

Se presentan porcentajes de amortiguamiento basados en la experimentación para distintos tipos de estructuras.



Esto es con la finalidad de contar con valores prácticos ya que el amortiguamiento solo se puede evaluar de forma experimental.

Tipo de estructura	ζ
Acero	$0.02 \leq \zeta \leq 0.05$
Concreto	$0.05 \leq \zeta \leq 0.08$
Mampostería	$0.10 \leq \zeta \leq 0.12$
Plataforma marina	$0.20 \leq \zeta \leq 0.30$

Tabla 2.1 Valores de amortiguamiento para diferentes estructuras, (Castillo Flores, 2017)

Como se observa las estructuras civiles tienen un valor de $\zeta < 1$. Por lo tanto, todas son subamortiguadas, es decir, todas vibran.

2.6.2.6 Ecuación de movimiento.

Procedimiento para determinar la ecuación de movimiento:

Paso 1: Se genera el modelo analítico (Figura 2.15), señalando los GDL indicando el sentido positivo.

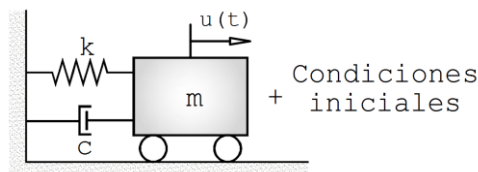


Figura 2.15 Modelo analítico.

Paso 2: Genere un desplazamiento positivo en todos los GDL (al mismo tiempo), procurando que el desplazamiento sea mayor en cada nivel superior.

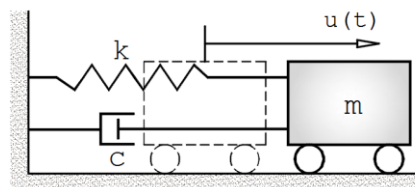


Figura 2.16 Desplazamiento en el sentido del grado de libertad.



Paso 3: Genere un diagrama de cuerpo libre en cada masa asociada a un GDL.

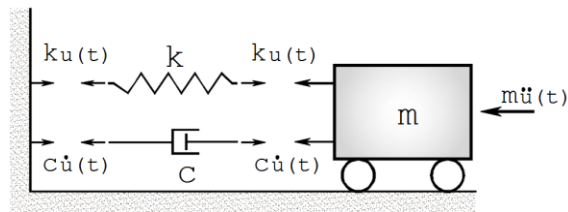


Figura 2.17 Diagrama de cuerpo libre.

Paso 4: Aplique el principio de D’Alambert a cada masa.

Paso 5: Realice una sumatoria de fuerzas en cada GDL.

$$\sum F_{GDL} = 0$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{2.19}$$

La anterior ecuación es la “Ecuación de movimiento para vibración libre con amortiguamiento” $F(t)=0$.

2.6.2.7 Solución de la ecuación de movimiento.

Su solución general está dada por:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D(t) + B \sin \omega_D(t)) \tag{2.20}$$

La ecuación anterior expresa la respuesta dinámica en términos de desplazamiento. Donde ω_D es la frecuencia natural de vibración amortiguada y está determinada por:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2.21}$$

A y B son constantes que se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema. Éstas pueden expresarse en términos de las condiciones iniciales de la siguiente forma:

$$A = u(0) \tag{2.22}$$

$$B = \frac{\dot{u}(0) + u(0)\zeta\omega}{\omega_D} \tag{2.23}$$



Derivando (2.20) se obtiene la respuesta dinámica en términos de velocidad:

$$\dot{u}(t) = -e^{-\zeta\omega t} [A\omega_D \sin(\omega_D t) + A\zeta\omega \cos(\omega_D t) - B\omega_D \cos(\omega_D t) + B\zeta\omega \sin(\omega_D t)] \quad (2.24)$$

Derivando (2.24) se obtiene la respuesta dinámica en términos de aceleración:

$$\ddot{u}(t) = -e^{-\zeta\omega t} [A\omega_D^2 \cos(\omega_D t) + B\omega_D^2 \sin(\omega_D t) - A\zeta^2\omega^2 \cos(\omega_D t) - B\zeta^2\omega^2 \sin(\omega_D t) - 2A\zeta\omega \omega_D \sin(\omega_D t) + 2B\zeta\omega \omega_D \cos(\omega_D t)] \quad (2.25)$$

De forma alternativa se puede obtener la respuesta dinámica en términos de aceleración, despejando $\ddot{u}(t)$ de la ecuación (2.19):

$$\ddot{u}(t) = \frac{-c\dot{u}(t) - ku(t)}{m} \quad (2.26)$$

Y sustituyendo:

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

Finalmente queda:

$$\ddot{u}(t) = -2\zeta\omega\dot{u}(t) - \omega^2u(t) \quad (2.27)$$

Adicionalmente, aplicando la ley de Hooke se obtiene la ecuación que describe la reacción en el apoyo del resorte $R(t)$:

$$R(t) = -u(t)k \quad (2.28)$$

2.6.2.8 Expresión alternativa.

La respuesta dinámica en términos de desplazamiento en el movimiento de vibración libre con amortiguamiento puede expresarse de forma alternativa por la ecuación (ver demostración en anexo A.3):

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} u_0 \sin(\omega_D t + \phi) \quad (2.29)$$



Donde:

$$u_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{Amplitud máxima} \quad (2.30)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \quad \text{Ángulo de fase} \quad (2.31)$$

2.6.2.9 Decremento logarítmico.

Si la estructura se somete a vibración libre, puede calcularse experimentalmente el porcentaje de amortiguamiento ζ como se describe a continuación:

La respuesta de un sistema sometido a condiciones iniciales $u(0) \neq 0$ y $\dot{u}(0) = 0$ es:

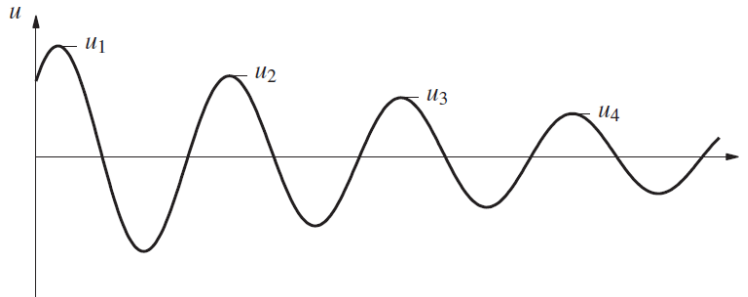


Figura 2.18 Decremento logarítmico, (Chopra, 2014)

En la gráfica anterior existe la siguiente razón de decaimiento:

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} = \ln \frac{u_2}{u_3} = \ln \frac{u_3}{u_4} \dots \ln \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Entonces de forma general:

$$\delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} \quad (2.32)$$

Donde:

$$u_n = \text{Amplitud máxima}$$

$$u_{n+1} = \text{Amplitud máxima consecutiva}$$



En este caso se considera que la estructura vibra con la frecuencia amortiguada, y las propiedades amortiguadas que se tienen son las siguientes:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.21)$$

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad (2.33)$$

$$f_D = \frac{1}{T_D} \quad (2.34)$$

El decremento logaritmico esta expresado por la ecuación:

$$\delta = 2\pi\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_D} \right) \quad (2.35)$$

Para valores de ζ pequeños (obras civiles comunes) $\frac{\omega}{\omega_D} \cong 1$ Por lo tanto la ecuación (2.35) se transforma en:

$$\delta = 2\pi\zeta \quad (2.36)$$

Despejando ζ y sustituyendo la ecuación (2.32):

$$\zeta \cong \frac{\ln \frac{u_n}{u_{n+1}}}{2\pi} \quad (2.37)$$

2.6.2.10 Razón entre amplitudes no consecutivas.

En estructuras de bajo porcentaje ζ se puede complicar la lectura de dos amplitudes consecutivas, para ello existe la siguiente expresión que considera máximos no consecutivos.

$$k_c \delta = \ln \frac{u_n}{u_k} \quad (2.38)$$

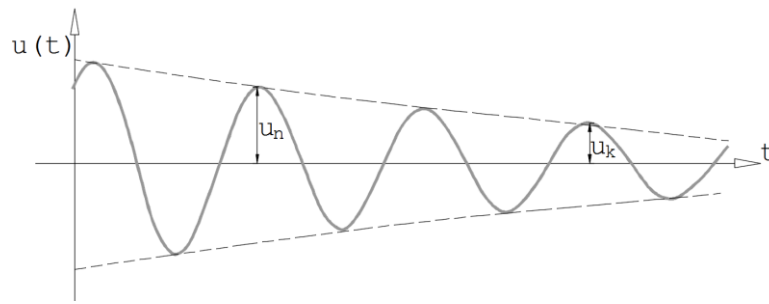


Figura 2.19 Amplitudes no consecutivas.

Donde:

k_c = Número de ciclos desde u_n hasta u_k

u_k = Amplitud máxima después de k_c ciclos

Sustituyendo (2.36) en (2.38):

$$k_c 2\pi\zeta \cong \ln \frac{u_n}{u_k}$$

$$\zeta = \frac{\ln \frac{u_n}{u_k}}{k_c 2\pi} \quad (2.39)$$

2.7 VIBRACIÓN FORZADA ARMÓNICA SIN AMORTIGUAMIENTO.

La excitación armónica se puede describir mediante una función seno o coseno. A continuación, se tratará las expresiones con la función seno.

2.7.1 Modelo analítico.

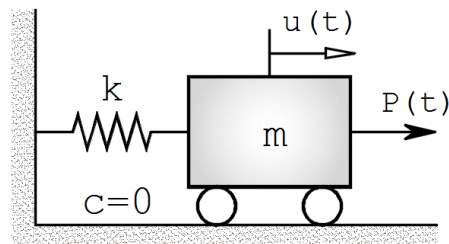


Figura 2.20 Modelo analítico para estudiar la vibración armónica sin amortiguamiento.



Donde P(t) puede ser:

$$\text{Función seno } P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.40)$$

$$\text{Función coseno } P(t) = P_0 \cos \bar{\omega} t \quad (2.41)$$

2.7.2 Ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.42):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.43)$$

Donde la frecuencia $\bar{\omega}$ pertenece a la fuerza de excitación P_0 .

2.7.3 Solución de la ecuación de movimiento.

Se tiene una ecuación diferencial lineal de 2° orden de coeficientes constantes no homogénea. En las ecuaciones no homogéneas se tiene la solución complementaria $u_c(t)$ y la solución particular $u_p(t)$.

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \quad (2.44)$$

La solución complementaria de la ecuación es la respuesta a la vibración libre determinada en la ecuación (2.4):

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.4)$$

La solución particular de esta ecuación diferencial es:

$$u_p(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \sin \omega t \quad (2.45)$$

Y la solución completa es la suma de las soluciones complementaria y particular:

$$u(t) = A \cos \omega(t) + B \sin \omega(t) + C \sin \omega(t) \quad (2.46)$$

Donde A, B y C son constantes que se determinan partir de las condiciones iniciales.

Y cuyo valor es:



$$A = u(0) \tag{2.47}$$

$$B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} - \beta \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \tag{2.48}$$

$$C = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \tag{2.49}$$

Derivando (2.46) se obtiene la respuesta dinámica en términos de velocidad:

$$\dot{u}(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t + \bar{\omega} C \cos \bar{\omega} t \tag{2.50}$$

Derivando (2.50) se obtiene la respuesta dinámica en términos de aceleración:

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 A \cos \omega t + \omega^2 B \sin \omega t + \bar{\omega}^2 C \sin \bar{\omega} t \tag{2.51}$$

Adicionalmente, aplicando la ley de Hooke se obtiene la ecuación que describe la reacción en el apoyo del resorte R(t):

$$R(t) = -u(t) k \tag{2.52}$$

2.7.4 Respuesta estática.

Del modelo analítico (Figura 2.21) en el cual se aplica una fuerza dinámica P(t).

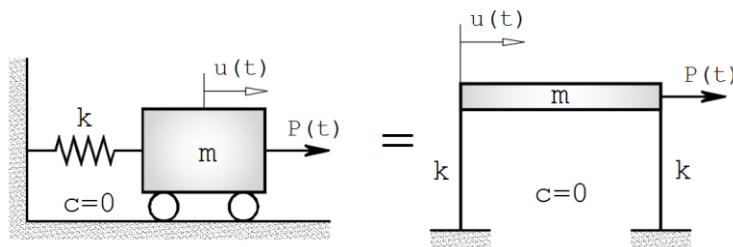


Figura 2.21 Modelo analítico considerando la fuerza dinámica P(t).

Ahora considerando una fuerza estática P. Y aplicando la ley de Hooke:

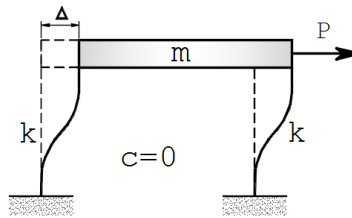


Figura 2.22 Modelo analítico considerando la fuerza estática P.

$$F = k \Delta \quad (2.53)$$

$$\Delta = \frac{F}{k} \quad (2.54)$$

Entonces la respuesta estática de la estructura (donde no intervienen las propiedades dinámicas de la estructura) en el tiempo (t) es igual a:

$$u_{st}(t) = \frac{P(t)}{k} \quad (2.55)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.55).

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \sin \bar{\omega} t \quad (2.56)$$

Donde el desplazamiento máximo estático es:

$$u_{st0} = \frac{P_0}{k} \quad (2.57)$$

Finalmente:

$$u_{st}(t) = u_{st0} \sin \bar{\omega} t \quad (2.58)$$

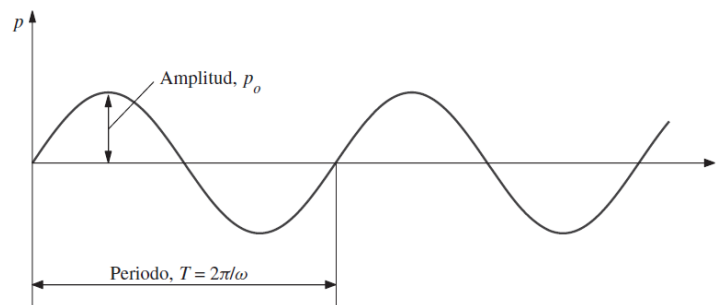


Figura 2.23 Desplazamiento máximo estático, (Chopra, 2014)



2.7.5 Respuesta transitoria y estática.

Analizando la ecuación (2.46) se pueden considerar la respuesta total como la suma de una respuesta transitoria y una respuesta estacionaria:

$$u(t) = \underbrace{A \cos \omega(t) + B \sin \omega(t)}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{C \sin \omega(t)}_{\text{Respuesta estacionaria}} \quad (2.46)$$

La respuesta transitoria se desvanece con el tiempo en los sistemas amortiguados. En un sistema sin amortiguamiento nunca desaparece. Mientras que la respuesta estacionaria existe siempre que exista la excitación P(t).

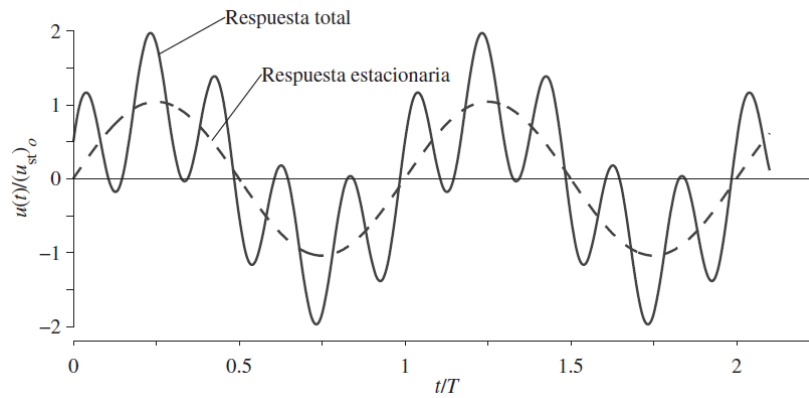


Figura 2.24 Respuesta estacionaria y transitoria, (Chopra, 2014)

2.7.6 Factor de amplificación dinámica.

Representa las veces que se amplifica la respuesta estática comparada con la respuesta dinámica, esto solo considerando la respuesta estacionaria del sistema.

Comparando la respuesta estática y la respuesta dinámica:

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \sin \bar{\omega} t \quad (2.59)$$

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right)}_{\text{MF}} \sin \bar{\omega} t \quad (2.60)$$

MF= Factor de amplificación dinámica

El factor de amplificación dinámica de deformación (o de desplazamiento) es la razón de la amplitud (u_0) de la deformación dinámica (o vibratoria) sobre la deformación estática (u_{st}).

$$MF = \frac{u_0}{u_{st}} \quad (2.61)$$

2.7.7 Amplitud máxima total.

Se debe reconocer que la respuesta máxima de la estructura ocurre cuando aún existe la respuesta transitoria (se recuerda que con $\zeta = 0$ nunca desaparece), sin embargo, si se desea calcular se recomienda simplemente evaluar el valor numérico mayor o máximo.

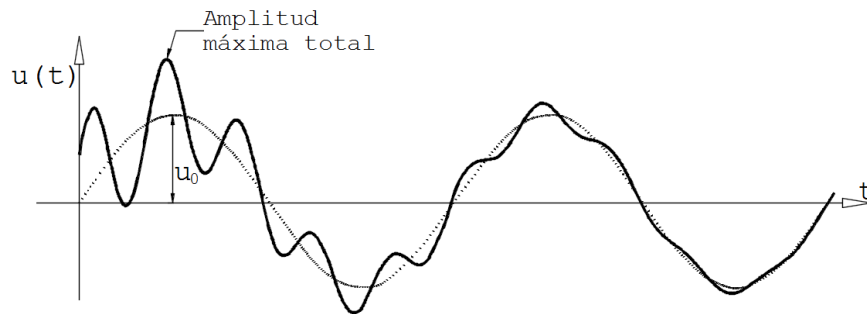


Figura 2.25 Gráfica de la amplitud máxima total.

2.8 VIBRACIÓN FORZADA ARMÓNICA CON AMORTIGUAMIENTO.

A continuación, se continuará con el análisis del caso ante vibración forzada armónica, pero esta vez considerando el amortiguamiento de la estructura.

2.8.1 Modelo analítico.

El modelo analítico considerado sería el siguiente:

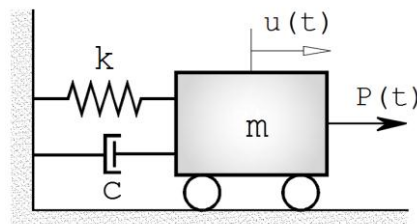


Figura 2.26 Modelo analítico



Se estudiará el caso de una excitación armónica con la función seno:

$$P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} \cdot t \quad (2.62)$$

2.8.2 Ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (2.63)$$

Sustituyendo (2.62) en(2.63):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.64)$$

Donde la frecuencia $\bar{\omega}$ pertenece a la fuerza de excitación P_0 .

2.8.3 Solución de la ecuación de movimiento.

La ecuación (2.64) nuevamente es una ecuación diferencial lineal de 2° orden de coeficientes constantes no homogénea. En las ecuaciones no homogéneas se tiene la solución complementaria $u_c(t)$ y la solución particular $u_p(t)$.

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \quad (2.65)$$

La solución complementaria de la ecuación es la respuesta a la vibración libre determinada en la ecuación (2.20):

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega t}(A \cos \omega_D(t) + B \sin \omega_D(t)) \quad (2.20)$$

La solución particular de esta ecuación diferencial es:

$$u_p(t) = C \cos \bar{\omega} \cdot t + D \sin \bar{\omega} \cdot t \quad (2.66)$$

Y la solución completa es la suma de las soluciones complementaria y particular:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t}(A \cos \omega_D(t) + B \sin \omega_D(t)) + C \cos \bar{\omega} \cdot t + D \sin \bar{\omega} \cdot t \quad (2.67)$$

Donde A, B, C y D son constantes que se determinan partir de las condiciones iniciales. Y cuyo valor es:



$$A = u(0) + \frac{P_0}{k} \left(\frac{2 \zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \zeta \beta)^2} \right) \quad (2.68)$$

$$B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} + \left[u(0) + \frac{P_0}{k} \left(\frac{2 \zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \zeta \beta)^2} \right) \right] \cdot \zeta \frac{\omega}{\omega_D} - \left[\frac{P_0}{k} \left(\frac{2 \zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \zeta \beta)^2} \right) \right] \cdot \frac{\bar{\omega}}{\omega_D} \quad (2.69)$$

$$C = \frac{P_0}{k} \left(\frac{-2 \zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \zeta \beta)^2} \right) \quad (2.70)$$

$$D = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \zeta \beta)^2} \right) \quad (2.71)$$

Derivando (2.67) se obtiene la respuesta dinámica en términos de velocidad:

$$\dot{u}(t) = -e^{-\zeta \omega t} [A \omega_D \sin \omega_D(t) + A \zeta \omega \cos \omega_D(t) - B \omega_D \cos \omega_D \cdot (t) + B \zeta \omega \sin \omega_D \cdot (t)] - \bar{\omega} C \sin \bar{\omega} \cdot (t) + \bar{\omega} D \cos \bar{\omega} \cdot (t) \quad (2.72)$$

Derivando (2.72) se obtiene la respuesta dinámica en términos de aceleración, o de forma alternativa se puede despejar $\ddot{u}(t)$ de la ecuación (2.64):

$$\ddot{u}(t) = -2 \zeta \omega \dot{u}(t) - \omega^2 u(t) + \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (2.73)$$

Adicionalmente, aplicando la ley de Hooke se obtiene la ecuación que describe la reacción en el apoyo del resorte R(t):

$$R(t) = -u(t) k \quad (2.74)$$

2.8.4 Respuesta estática.

La respuesta estática en términos de desplazamiento en el tiempo es:

$$u_{st}(t) = \frac{P(t)}{k} \quad (2.75)$$



De igual forma:

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \sin \bar{\omega} t \quad (2.76)$$

Donde, el desplazamiento máximo, es igual a:

$$u_{st0} = \frac{P_0}{k} \quad (2.77)$$

Por lo tanto:

$$u_{st}(t) = u_{st0} \sin \bar{\omega} t \quad (2.78)$$

2.8.5 Factor de amplificación dinámica.

Si se evalúa solo la respuesta estacionaria, el factor de amplificación dinámica esta dado por la siguiente expresión:

$$MF = [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-1/2} \quad (2.79)$$

O bien:

$$MF = \frac{u_0}{u_{st0}} \quad (2.80)$$

Donde:

u_0 = Respuesta máxima estacionaria

u_{st0} = Respuesta máxima estática

2.8.6 Amplitud máxima de la respuesta estacionaria.

Se da por la siguiente expresión:

$$u_0 = u_{st0} MF \quad (2.81)$$

De forma alterna se puede expresar como:

$$u_0 = \sqrt{C^2 + D^2} \quad (2.82)$$

2.9 EXCITACIÓN EN LA BASE.

Probablemente el tema de mayor interés entre los ingenieros estructurales es determinar la respuesta de las estructuras ante el movimiento de la base del suelo, principalmente ante fenómenos sísmicos.

2.9.1 Modelo analítico.

Se presenta el siguiente modelo analítico donde se muestra una estructura desplazada ante el movimiento del terreno (suelo, base).

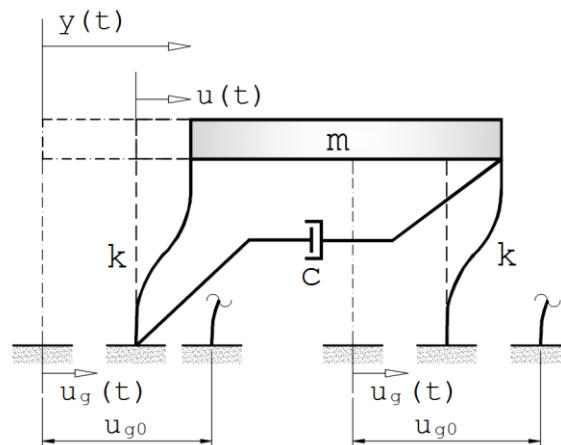


Figura 2.27 Modelo analítico.

Donde:

$u_g(t)$ = Desplazamiento del suelo en función de "t".

u_{g0} = Desplazamiento máximo del suelo.

$u(t)$ = Desplazamiento de la estructura relativo a su base.

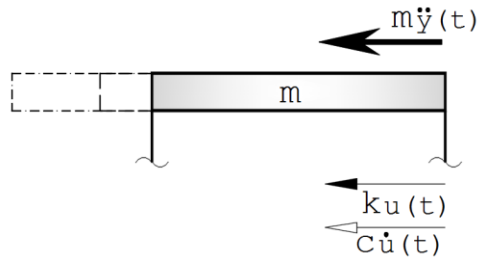
$y(t)$ = Desplazamiento total o absoluto.

$$y(t) = u_g(t) + u(t) \quad (2.83)$$



2.9.2 Ecuación de movimiento.

Realizando un diagrama de cuerpo libre en la masa “m” se observa lo siguiente:



Suma de “fuerzas”:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.84)$$

Derivando dos veces la ecuación (2.83):

$$\dot{y}(t) = \dot{u}_g(t) + \dot{u}(t) \quad (2.85)$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t) \quad (2.86)$$

Sustituyendo (2.86) **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** en (2.84):

$$m[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.87)$$

$$m\ddot{u}_g(t) + m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.88)$$

O bien:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.89)$$

Podemos suponer a:

$$-m\ddot{u}_g(t) = P_{eff}(t) \quad (2.90)$$

Donde:

m = masa de la estructura

$\ddot{u}_g(t)$ = aceleración del suelo.

Entonces:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_{eff}(t) \quad (2.91)$$

2.9.3 Fuerza equivalente.

$P_{eff}(t)$ Representa una fuerza ficticia o equivalente aplicada en el grado de libertad. (Recuerde que la excitación se da en la base). Esquemáticamente se puede representar como:

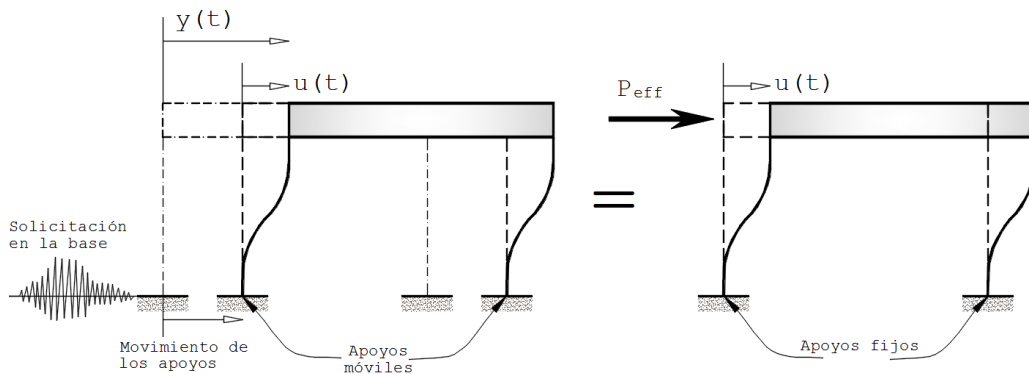


Figura 2.28 Representación de la fuerza equivalente.

2.9.4 Respuesta relativa.

La respuesta relativa $u(t)$ es uno de los valores más importantes a calcular. De una gráfica de respuesta relativa, el valor más importante es el máximo absoluto (positivo o negativo) ya que dicho valor es el que genera los mayores esfuerzos en la estructura (sobre todo en las columnas).

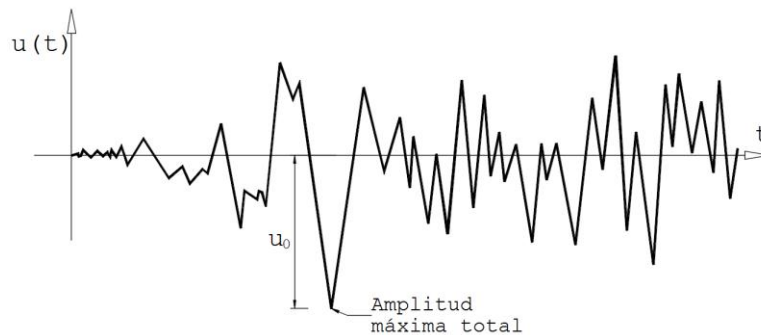


Figura 2.29 Máxima respuesta relativa en términos de desplazamiento $u(t)$.

En la respuesta relativa, también se puede calcular:

$$\dot{u}(t) = \textit{Velocidad relativa}$$

$$\ddot{u}(t) = \textit{Aceleración relativa}$$

2.9.5 Respuesta absoluta.

Esta respuesta se obtiene sumando la respuesta relativa y la respuesta del suelo o base.

$$u_g(t) = \textit{Desplazamiento del suelo}$$

$$\dot{u}_g(t) = \textit{Velocidad del suelo}$$

$$\ddot{u}_g(t) = \textit{Aceleración del suelo}$$

Entonces:

$$y(t) = u(t) + u_g(t) = \textit{Desplazamiento absoluto}$$

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + \dot{u}_g(t) = \textit{Velocidad absoluta}$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) = \textit{Aceleración absoluta}$$

De las respuestas absolutas, la más importante es la aceleración absoluta $\ddot{y}(t)$.

2.9.6 Cortante de entrepiso.

Para los sistemas de un grado de libertad como el estudiado previamente, el cortante de entrepiso es igual a la "fuerza sísmica equivalente".

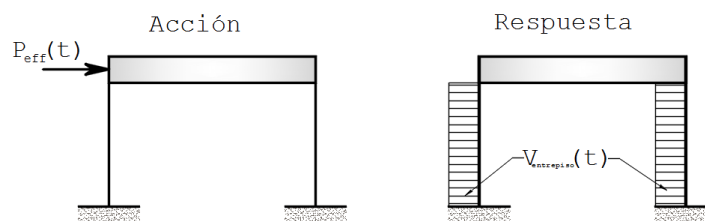


Figura 2.30 cortante de entrepiso distribuido en las columnas.



2.9.7 Cortante de entrepiso por Hooke.

Por Hooke: $F = k \Delta$

$$V(t) = u(t) \cdot k \tag{2.92}$$

$$V_{ent_0} = u_0 \cdot k \tag{2.93}$$

2.9.8 Cortante de entrepiso por Newton.

Por Newton: $F = m a$

$$V(t) \approx m\ddot{y}(t) \tag{2.94}$$

Para que resulte la igualdad, debemos sumar las fuerzas de amortiguamiento.

$$V(t) = m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) \tag{2.95}$$

2.10 VIBRACIÓN FORZADA ARMÓNICA CON AMORTIGUAMIENTO APLICADA EN LA BASE (VFACAAB).

El primer caso a estudiar ante excitación en la base, es el de movimiento armónico; éste puede ser representado por una función seno o coseno, a continuación se tratara el caso con función seno.

2.10.1 Función del movimiento en la base.

Estudiaremos la función seno, la cual está representada por la siguiente grafica del movimiento del terreno o base.

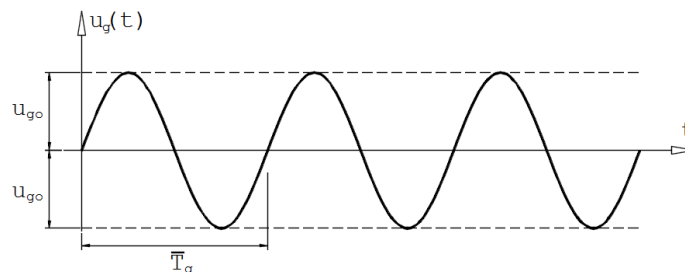


Figura 2.31 Movimiento de la base utilizando la función seno.

$$\bar{T}_g = \text{Periodo del movimiento del suelo } (\frac{\text{segundos}}{\text{ciclo}})$$



$$\frac{1}{\bar{T}_g} = \bar{f}_g = \text{Frecuencia cíclica del movimiento del suelo (Hz)}$$

$$\bar{\omega}_g = \frac{2\pi}{\bar{T}_g} = \text{Frecuencia circular del movimiento del suelo (radianes/segundo)}$$

La función que describe la gráfica anterior es:

$$u_g(t) = u_{g0} \cdot \sin \bar{\omega}_g(t) \quad (2.96)$$

Derivando dos veces la ecuación (2.96):

Velocidad del movimiento del suelo:

$$\dot{u}_g(t) = u_{g0} \cdot \bar{\omega}_g \cdot \cos \bar{\omega}_g(t) \quad (2.97)$$

Aceleración del movimiento del suelo:

$$\ddot{u}_g(t) = -u_{g0} \cdot \bar{\omega}_g^2 \cdot \sin \bar{\omega}_g(t) \quad (2.98)$$

Retomando la ecuación (2.91) que es la ecuación de movimiento a resolver:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_{eff}(t) \quad (2.91)$$

De igual forma la ecuación (2.90)

$$-m\ddot{u}_g(t) = P_{eff}(t) \quad (2.90)$$

Sustituyendo (2.98) en (2.90):

$$P_{eff}(t) = m \cdot u_{g0} \cdot \bar{\omega}_g^2 \cdot \sin \bar{\omega}_g(t) \quad (2.99)$$

Sustituyendo $P_{0eq} = m \cdot u_{g0} \cdot \bar{\omega}_g^2$

$$P_{eff}(t) = P_{0eq} \cdot \sin \bar{\omega}_g(t) \quad (2.100)$$

Por lo que la ecuación de movimiento queda como:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_{0eq} \cdot \sin \bar{\omega}_g(t) \quad (2.101)$$

Para calcular la respuesta relativa $u(t)$ se utilizan las ecuaciones deducidas con anterioridad (2.67) (2.72) y (2.73):



$$u(t) = e^{-\zeta\omega t}(A \cos \omega_D(t) + B \sin \omega_D(t)) + C \cos \bar{\omega} \cdot t + D \sin \bar{\omega} \cdot t \quad (2.67)$$

$$\dot{u}(t) = -e^{-\zeta\omega t}[A\omega_D \sin \omega_D(t) + A\zeta\omega \cos \omega_D(t) - B\omega_D \cos \omega_D \cdot (t) + B\zeta\omega \sin \omega_D \cdot (t)] - \bar{\omega}C \sin \bar{\omega} \cdot (t) + \bar{\omega}D \cos \bar{\omega} \cdot (t) \quad (2.72)$$

$$\ddot{u}(t) = -2 \zeta \omega \dot{u}(t) - \omega^2 u(t) + \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (2.73)$$

Para obtener la respuesta absoluta se utiliza:

$$y(t) = u(t) + u_g(t) = \text{Desplazamiento absoluto}$$

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + \dot{u}_g(t) = \text{Velocidad absoluta}$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) = \text{Aceleración absoluta}$$

2.11 RESPUESTA A IMPULSOS E INTEGRAL DE DUHAMEL.

A continuación, se estudiará la respuesta de un sistema ante excitaciones de tipo general o arbitrarias. Se inicia por estudiar la respuesta ante fuerzas de tipo impulsiva, fuerzas escalonadas, fuerzas linealmente crecientes, entre otras.

2.11.1 Impulso de una fuerza.

Un impulso se define como el producto de una fuerza por el tiempo que es ejercida.

De la 2ª Ley de Newton.

$$F(t) = m \cdot a(t) \quad (2.102)$$

Donde:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad (2.103)$$

Sustituyendo, y despejado se obtiene:

$$F(t)dt = m \cdot dv \quad (2.104)$$



Entonces un impulso es:

$$I = F(t)dt \tag{2.105}$$

2.11.2 Cantidad de movimiento.

La cantidad de movimiento se define como el producto de una masa por su velocidad.

$$\rho = m \cdot v \tag{2.106}$$

Si existe variación de la velocidad (dv), se dice que existe variación de la cantidad de movimiento ($m dv$); por lo tanto:

$$I = m dv \tag{2.107}$$

Entonces un impulso es igual tanto a la fuerza por el tiempo que es ejercida, como a la variación de la cantidad de movimiento:

$$I = F(t)dt = m dv \tag{2.108}$$

2.11.3 Respuesta a un impulso unitario.

Dada la definición de impulso se tiene:

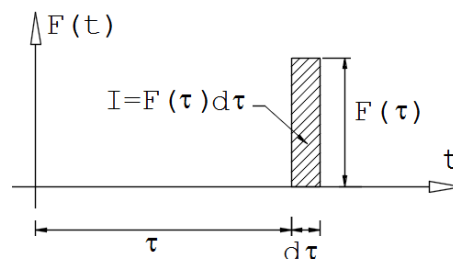


Figura 2.32 Impulso unitario.

$$I = F(\tau)d\tau \tag{2.109}$$

Si la magnitud del impulso es unitaria $I = 1$ y despejando $F(\tau)$.

$$F(\tau) = \frac{1}{d\tau} \tag{2.110}$$



Gráficamente:

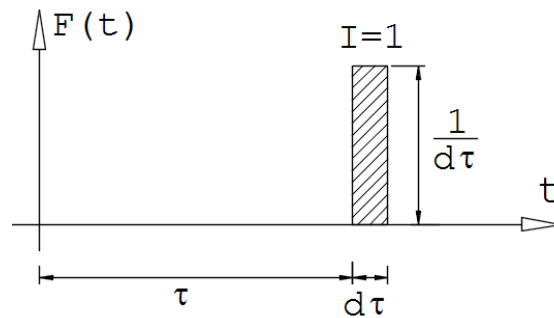


Figura 2.33 Representación gráfica de la ecuación (2.110) .

De la definición de la variación de la cantidad de movimiento:

$$1 = m dv \quad (2.111)$$

O bien:

$$\frac{1}{m} = dv \quad (2.112)$$

Entonces un impulso unitario en el tiempo τ genera un cambio de velocidad (dv) si el sistema se encontraba en reposo antes del impulso, esto se puede interpretar con condiciones iniciales (C.I.).

Retomando las ecuaciones del caso de vibración libre sin amortiguamiento (V.L.S.A.) se tiene para el caso de desplazamiento y velocidad iniciales:

$$u_0 = 0 \quad (2.113)$$

$$\dot{u}_0 = dv = \frac{1}{m} \quad (2.114)$$

Retomando la ecuación que define la respuesta de un modelo con vibración libre sin amortiguamiento:

$$u(t) = u_0 \cos \omega(t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega(t) \quad (2.115)$$



Ajustando el tiempo a $(t - \tau)$ debido a que existe un retraso τ en la aplicación del impulso I adicionalmente cambiando la nomenclatura de las ecuaciones de $u = h$

$$h(t - \tau) = 0 \cdot \cos \omega(t - \tau) + \frac{1}{m \cdot \omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (2.116)$$

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (2.117)$$

La ecuación anterior es la respuesta a un impulso unitario en sistemas sin amortiguamiento. Para $t \geq \tau$

Sustituyendo las ecuaciones (2.113) y (2.114) en la ecuación correspondiente de un sistema con vibración libre con amortiguamiento (V.L.C.A.) y realizando los ajustes anteriores se tiene:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[\mathcal{U}_0 \cdot \cos \omega_D(t) + \frac{\dot{\mathcal{U}}_0 + \mathcal{U}_0 \zeta \omega}{\omega_D} \sin \omega_D(t) \right] \quad (2.118)$$

$$h(t - \tau) = e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \left[0 \cdot \cos \omega_D(t - \tau) + \frac{1 + 0 \cdot \zeta \omega}{m \cdot \omega_D} \sin \omega_D(t - \tau) \right] \quad (2.119)$$

$$h(t - \tau) = e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \left[\frac{1}{m \cdot \omega_D} \sin \omega_D(t - \tau) \right] \quad (2.120)$$

La ecuación anterior es la respuesta a un impulso unitario en sistemas con amortiguamiento. Para $t \geq \tau$

2.11.4 Integral de Duhamel.

Una fuerza $F(t)$ puede representarse mediante una secuencia de impulsos cortos. La respuesta a uno de estos impulsos puede determinarse mediante la respuesta estudiada de un impulso unitario multiplicada por la magnitud del impulso en el instante de tiempo correspondiente.

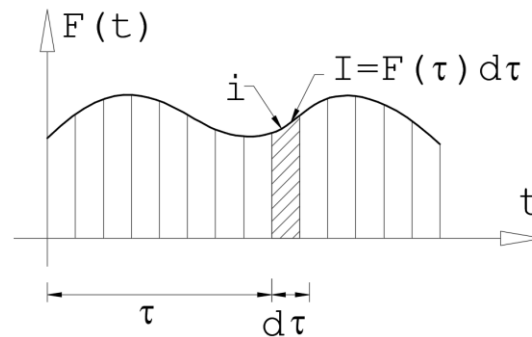


Figura 2.34 Representación de una fuerza mediante una secuencia de impulsos cortos.

$$du(t) = I \cdot h(t - \tau) \quad (2.121)$$

$$du(t) = F(\tau)d\tau \cdot h(t - \tau) \quad (2.122)$$

La respuesta total ante la función de carga será la sumatoria de todos los impulsos en t por lo tanto corresponde a una integral.

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)d\tau \cdot h(t - \tau) \quad (2.123)$$

La integral anterior corresponde a la integral de convolución o integral de Duhamel (en su forma general).

2.11.5 Caso sin amortiguamiento.

Sustituyendo la ecuación correspondiente al impulso unitario (caso sin amortiguamiento) Ecuación (2.117).

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (2.117)$$

Sustituyendo en (2.123) se obtiene la integral de Duhamel para el caso sin amortiguamiento.

$$u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.124)$$

La ecuación anterior corresponde al caso donde la estructura se encuentra en reposo, es decir, con condiciones iniciales nulas.



Para estudiar el caso con cargas iniciales diferentes de cero debe incluirse la respuesta ante vibración libre, resultando en:

$$u(t) = u_0 \cos \omega(t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega(t) + \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.125)$$

2.11.6 Caso con amortiguamiento.

Sustituyendo la ecuación correspondiente al impulso unitario (caso con amortiguamiento).

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} e^{-\zeta \omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_D(t - \tau) \quad (2.126)$$

Sustituyendo en (2.123) se obtiene la integral de Duhamel para el caso con amortiguamiento.

$$u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t e^{-\zeta \omega(t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot \sin \omega_D(t - \tau) d\tau \quad (2.127)$$

La ecuación anterior corresponde al caso donde la estructura se encuentra en reposo, es decir, con condiciones iniciales nulas.

Para estudiar el caso con cargas iniciales diferentes de cero debe incluirse la respuesta ante vibración libre, resultando en:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega(t-\tau)} \left[u_0 \cos \omega_D(t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \cdot \zeta \cdot \omega}{\omega_D} \sin \omega_D(t) \cdot \int_0^t e^{-\zeta \omega(t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot \sin \omega_D(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.128)$$

2.11.7 Caso sin amortiguamiento con excitación en la base.

En este caso debe considerarse la fuerza equivalente $P_{eff}(\tau)$ ajustada a:

$$P_{eff}(\tau) = -m \cdot \ddot{u}_g(\tau) \quad (2.129)$$

$$P_{eff}(\tau) = F(\tau) \quad (2.130)$$



$$u(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.131)$$

La ecuación anterior expresa la integral de Duhamel para el caso de excitación en la base, sin amortiguamiento.

Mismo caso para condiciones iniciales diferentes de cero.

$$u(t) = u_0 \cos \omega(t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega(t) + \left[-\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.132)$$

2.11.8 Caso con amortiguamiento con excitación en la base.

Sustituyendo la ecuación (2.129) en (2.127)

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cdot \ddot{u}_g(\tau) \cdot \sin \omega_D(t - \tau) d\tau \quad (2.133)$$

Integral de Duhamel excitación en la base (caso amortiguado)

Para condiciones iniciales diferentes de cero:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \left[u_0 \cos \omega_D(t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \cdot \zeta \cdot \omega}{\omega_D} \sin \omega_D(t) \right] + \left[-\frac{1}{\omega_D} \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cdot \ddot{u}_g(\tau) \cdot \sin \omega_D(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.134)$$

2.11.9 Retos de la integral de Duhamel.

- 1) Saber integrar.
- 2) Para el caso de sismos conocer el registro de aceleraciones del suelo $\ddot{u}_g(t)$ (esto se logra con instrumentación).
- 3) $\ddot{u}_g(t)$ para el caso de sismos representa valores discretos o no continuos por lo tanto no se puede realizar una integración analítica y consecuentemente deberá ser una integración numérica.
- 4) Para el caso de sismos se manejan miles de datos por lo que integrando a mano puede ser muy tardado. Para ellos es útil el uso de la computadora.
- 5) Saber programar (Visual Basic, C++, C#, MathCad, Excell, etc.)



2.11.10 Aplicaciones.

Se estudiarán algunos casos no amortiguados.

Fuerza constante no definida.

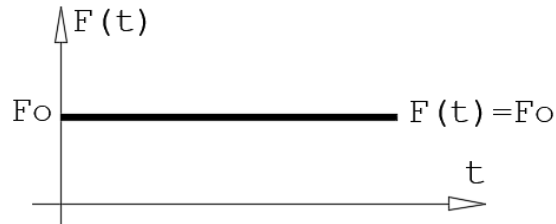


Figura 2.35 Sistema de 1 GDL fuerza constante.

Utilizando la integral de Duhamel (partiendo del reposo y $\zeta = 0$).

$$u(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.135)$$

Se puede demostrar que:

$$\int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega \cdot t) \quad (2.136)$$

Por lo tanto:

$$u(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega^2} (1 - \cos \omega \cdot t) \quad (2.137)$$

Recordando que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ se obtiene:

$$u(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega \cdot t) \quad (2.138)$$

Recordando la ley de Hooke $\frac{F_0}{k} = u_{sto}$.

$$u(t) = u_{sto} (1 - \cos \omega \cdot t) \quad (2.139)$$



De igual forma:

$$u(t) = u_{sto} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \quad (2.140)$$

El segundo término de la ecuación anterior se conoce como el factor de amplificación (MF).

$$MF = (1 - \cos \omega \cdot t) = \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \quad (2.141)$$

Por lo tanto, se puede expresar:

$$u(t) = u_{sto} \cdot MF \quad (2.142)$$

Buscando la respuesta máxima, se procede a derivar la ecuación (2.139)

$$\dot{u}(t) = u_{sto} \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t \quad (2.143)$$

Igualando a cero.

$$0 = \omega \cdot \sin \omega \cdot t \quad (2.144)$$

La ecuación anterior se satisface para:

$$\omega t = j \cdot \pi \quad (2.145)$$

Donde j es un entero positivo. Nombrando a t como t_0 obtenemos:

$$t_0 = \frac{j \cdot \pi}{\omega} \quad (2.146)$$

O bien:

$$t_0 = \frac{j \cdot T}{2} \quad (2.147)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.139)

$$u(t_0) = u_0 = u_{sto} (1 - \cos \pi \cdot j) \quad (2.148)$$



Si j es un entero impar, entonces:

$$u_0 = u_{sto} \cdot 2 \quad (2.149)$$

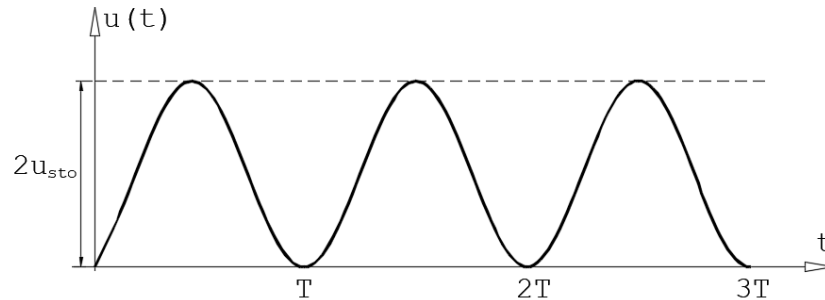


Figura 2.36 Respuesta dinámica para un sistema de un grado de libertad.

Fuerza definida (pulso rectangular).

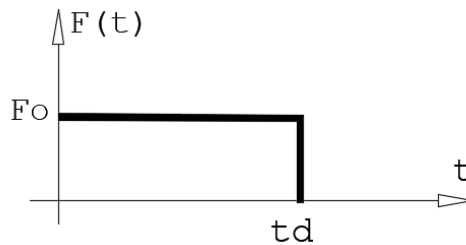


Figura 2.37 Sistema de 1 GDL fuerza rectangular.

Ecuación de movimiento:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = \begin{cases} F_0 \\ 0 \end{cases} \quad (2.150)$$

$t \leq td$ Fase de vibración forzada

$t > td$ Fase de vibración libre

Fase de vibración forzada $t \leq td$

Desplazamiento $u F(t) = u_{sto}(1 - \cos \omega \cdot t) \quad (2.151)$

Velocidad $\dot{u} F(t) = u_{sto}(\omega \sin \omega \cdot t) \quad (2.152)$



Aceleración
$$\ddot{u} F(t) = \frac{F_0}{m} - \omega^2 u F(t) \quad (2.153)$$

Fase de vibración libre $t > t_d$

Condiciones iniciales:

Desplazamiento
$$u F(t_d) = u_0 = u_{sto}(1 - \cos \omega \cdot t_d)$$

Velocidad
$$\dot{u} F(t_d) = \dot{u}_0 = u_{sto}(\omega \sin \omega \cdot t_d)$$

Utilizando las ecuaciones para el caso de vibración libre sin amortiguamiento y ajustando el tiempo a $(t - t_d)$. Se obtiene:

Desplazamiento
$$u_L(t) = u_0 \cos \omega(t - t_d) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_d) \quad (2.154)$$

Velocidad
$$\dot{u}_L(t) = -u_0 \omega \sin \omega(t - t_d) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \omega \cos \omega(t - t_d) \quad (2.155)$$

Aceleración
$$\ddot{u}_L(t) = -\omega^2 u_L(t) \quad (2.156)$$

Rampa ascendente.

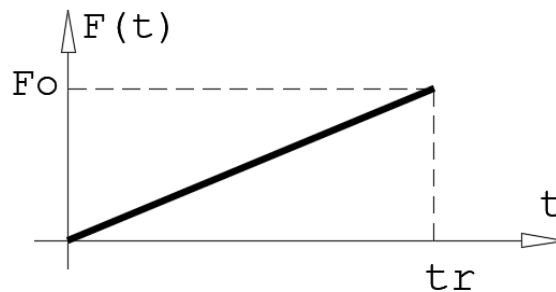


Figura 2.38 Sistema de 1 GDL rampa ascendente.

$$F(t) = \frac{F_0}{t_r} t \quad t \leq t_r \quad (2.157)$$



Ajustando $t \rightarrow \tau$

$$F(\tau) = \frac{F_0}{tr} \tau \tag{2.158}$$

Aplicando la integral de Duhamel

$$u(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \tag{2.159}$$

Sustituyendo $F(\tau)$ en la ecuación anterior y resolviendo la integral.

$$u(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega \cdot tr} \left[\frac{1}{\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega \cdot t \right) \right] \tag{2.160}$$

Recordando que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $\frac{F_0}{k} = u_{sto}$ se obtiene:

$$u(t) = u_{sto} \left[\frac{t}{tr} - \frac{\sin \omega \cdot t}{\omega \cdot tr} \right] \tag{2.161}$$

Otros casos.

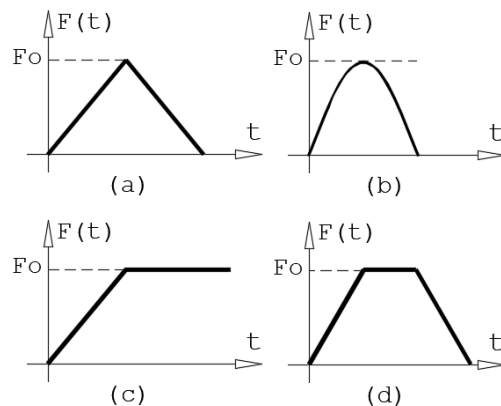


Figura 2.39 Sistema de 1 GDL (a) Triangular (b) Parabólico (c) Escalonada creciente (d) Trapezoidal definido.



2.12 EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL DE DUHAMEL.

Dado que para la mayoría de los casos la integración debe ser numérica, se han desarrollado varios métodos para evaluar la respuesta del sistema. El método que se estudiara es un método basado en la interpolación de la excitación, comúnmente conocido como el método de las ocho constantes. A continuación, se presenta la demostración para el caso no amortiguado para posteriormente aplicar el caso amortiguado con apoyo de la bibliografía.

2.12.1 Método numérico basado en la interpolación de la excitación (caso no amortiguado).

En el caso de los sistemas lineales es posible desarrollar un procedimiento numérico muy eficiente mediante la interpolación de la excitación en cada intervalo de tiempo.

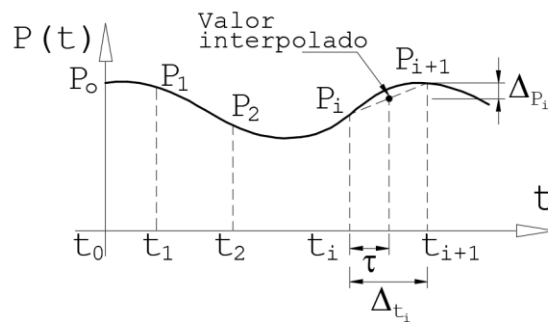


Figura 2.40 Gráfica de la función de la excitación.

El valor interpolado durante el intervalo de tiempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ es:

$$P(\tau) = \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \tau + P_i \tag{2.162}$$

Donde:

$$\Delta P_i = P_{i+1} - P_i \tag{2.163}$$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \tag{2.164}$$

Si $\tau = \Delta t_i$

$$P(\tau) = P_{i+1} \tag{2.165}$$



La ecuación de movimiento para sistemas de un grado de libertad (1GDL) sin amortiguamiento y con vibración forzada es:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = P(t) \quad (2.166)$$

La fuerza $P(t)$ estará dada por una serie de valores discretos $P_i = P(t_i)$. Para valores de i de 0 a N . Consecuentemente la respuesta se obtendrá de forma discreta como: $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$

Estos valores satisfacen la ecuación (2.166) es decir:

$$m \cdot \ddot{u}_i + k \cdot u_i = P_i \quad (2.167)$$

De igual forma:

$$m \cdot \ddot{u}_{i+1} + k \cdot u_{i+1} = P_{i+1} \quad (2.168)$$

Esto aplica sucesivamente para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$

Lo anterior describe un método numérico por lo que son necesarios 4 requisitos:

- 1) Convergencia
- 2) Precisión
- 3) Estabilidad
- 4) Computacionalidad

La ecuación para resolver es:

$$m \cdot \ddot{u}(\tau) + k \cdot u(\tau) = P(\tau) \quad (2.169)$$

Sustituyendo $P(\tau)$ en la ecuación (2.162)

$$m \cdot \ddot{u}(\tau) + k \cdot u(\tau) = \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \tau + P_i \quad (2.170)$$

La ecuación anterior se somete a las condiciones iniciales:

$$u_0 = u_i \quad (2.171)$$

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_i \quad (2.172)$$



La respuesta $u(\tau)$ durante el intervalo de tiempo $0 \leq \tau \leq \Delta_{ti}$ es la sumatoria de tres partes:

- I. Vibración libre: Debido a las condiciones iniciales en $\tau = 0$
- II. Pulso rectangular: Debido a la fuerza P_i con condiciones iniciales nulas.
- III. Rampa: Debido al incremento de carga de 0 a Δ_{ti} en τ

Retomado las respuestas para cada parte y sumándolas obtenemos:

$$u(\tau) = \left[u_i \cos \omega \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin \omega \tau \right] + \left[\frac{P_i}{k} (1 - \cos \omega \tau) \right] + \left[\frac{\Delta P_i}{k} \left(\frac{\tau}{\Delta_{ti}} - \frac{\sin \omega \tau}{\omega \Delta_{ti}} \right) \right] \quad (2.173)$$

$$\dot{u}(\tau) = \left[-u_i \omega \sin \omega \tau + \dot{u}_i \cos \omega \tau \right] + \left[\frac{P_i}{k} \omega \sin \omega \tau \right] + \left[\frac{\Delta P_i}{k \Delta_{ti}} (1 - \cos \omega \tau) \right] \quad (2.174)$$

Si evaluamos $\tau = \Delta_{ti}$ la respuesta está dada por u_{i+1} y \dot{u}_{i+1}

$$u_{i+1} = \left[u_i \cos \omega \Delta_{ti} + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin \omega \Delta_{ti} \right] + \left[\frac{P_i}{k} (1 - \cos \omega \Delta_{ti}) \right] + \left[\frac{\Delta P_i}{k} \left(\frac{\Delta_{ti}}{\Delta_{ti}} - \frac{\sin \omega \Delta_{ti}}{\omega \Delta_{ti}} \right) \right] \quad (2.175)$$

2.12.2 Demostración de las ocho constantes.

$$\dot{u}_{i+1} = \left[-u_i \omega \sin \omega \Delta_{ti} + \dot{u}_i \cos \omega \Delta_{ti} \right] + \left[\frac{P_i}{k} \omega \sin \omega \Delta_{ti} \right] + \left[\frac{\Delta P_i}{k \Delta_{ti}} (1 - \cos \omega \Delta_{ti}) \right] \quad (2.176)$$



Sustituyendo la ecuación (2.163) en (2.175) y (2.176) y realizando el algebra correspondiente se llega a:

$$u_{i+1} = u_i \cos \omega \Delta_{ti} + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin \omega \Delta_{ti} + \frac{P_i}{k} \left[(1 - \cos \omega \Delta_{ti}) - \frac{\omega \Delta_{ti} - \sin \omega \Delta_{ti}}{\omega \Delta_{ti}} \right] + P_{i+1} \left(\frac{\omega \Delta_{ti} - \sin \omega \Delta_{ti}}{k \omega \Delta_{ti}} \right) \quad (2.177)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -u_i \omega \sin \omega \Delta_{ti} + \dot{u}_i \cos \omega \Delta_{ti} + \frac{P_i}{k} \left[\omega \sin \omega \Delta_{ti} - \frac{1}{\Delta_{ti}} (1 - \cos \omega \Delta_{ti}) \right] + P_{i+1} \frac{1}{k \Delta_{ti}} (1 - \cos \omega \Delta_{ti}) \quad (2.178)$$

En las ecuaciones anteriores podemos agrupar las siguientes constantes:

$$A = \cos \omega \Delta_{ti} \quad (2.179)$$

$$B = \frac{\sin \omega \Delta_{ti}}{\omega} \quad (2.180)$$

$$C = \frac{1}{k} \left[(1 - \cos \omega \Delta_{ti}) - \frac{\omega \Delta_{ti} - \sin \omega \Delta_{ti}}{\omega \Delta_{ti}} \right] \quad (2.181)$$

$$D = \frac{\omega \Delta_{ti} - \sin \omega \Delta_{ti}}{k \omega \Delta_{ti}} \quad (2.182)$$

$$A' = \omega \sin \omega \Delta_{ti} \quad (2.183)$$

$$B' = \cos \omega \Delta_{ti} \quad (2.184)$$

$$C' = \frac{1}{k} \left[\omega \sin \omega \Delta_{ti} - \frac{1}{\Delta_{ti}} (1 - \cos \omega \Delta_{ti}) \right] \quad (2.185)$$

$$D' = \frac{1}{k} (1 - \cos \omega \Delta_{ti}) \quad (2.186)$$

Utilizando las ecuaciones anteriores se puede reescribir como:

Respuesta dinámica en términos de desplazamiento:

$$u_{i+1} = A u_i + B \dot{u}_i + C P_i + D P_{i+1} \quad (2.187)$$



Respuesta dinámica en términos de velocidad:

$$\dot{u}_{i+1} = A' u_i + B' \dot{u}_i + C' P_i + D' P_{i+1} \quad (2.188)$$

Respuesta dinámica en términos de aceleración:

$$m\ddot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = P_{i+1} \quad (2.189)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{P_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \quad (2.190)$$

Expresado de forma alterna:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{P_{i+1}}{m} - \omega^2 u_{i+1} \quad (2.191)$$

2.12.3 Método numérico basado en la interpolación de la excitación (caso amortiguado).

Aplicando las respectivas fórmulas para los casos amortiguados se llega a nuevas constantes:

$$A = e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D \Delta_{ti} + \cos \omega_D \Delta_{ti} \right] \quad (2.192)$$

$$B = e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\frac{1}{\omega_D} \sin \omega_D \Delta_{ti} \right] \quad (2.193)$$

$$C = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\zeta}{\omega\Delta_{ti}} + e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\left(\frac{1-2\zeta^2}{\omega_D\Delta_{ti}} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_D \Delta_{ti} - \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega\Delta_{ti}} \right) \cos \omega_D \Delta_{ti} \right] \right\} \quad (2.194)$$

$$D = \frac{1}{k} \left\{ 1 - \frac{2\zeta}{\omega\Delta_{ti}} + e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_D\Delta_{ti}} \sin \omega_D \Delta_{ti} + \frac{2\zeta}{\omega\Delta_{ti}} \cos \omega_D \Delta_{ti} \right] \right\} \quad (2.195)$$

$$A' = e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D \Delta_{ti} \right] \quad (2.196)$$



$$B' = e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\cos \omega_D \Delta_{ti} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D \Delta_{ti} \right] \quad (2.197)$$

$$C' = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta_{ti}} + e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta_{ti} \sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_D \Delta_{ti} + \frac{1}{\Delta_{ti}} \cos \omega_D \Delta_{ti} \right] \right\} \quad (2.198)$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta_{ti}} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega\Delta_{ti}} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D \Delta_{ti} + \cos \omega_D \Delta_{ti} \right] \right\} \quad (2.199)$$

Si el paso del tiempo Δ_{ti} es constante, los coeficientes A, B, C, D, A', B', C' y D' necesitan calcularse sólo una vez (Chopra, 2014).

2.13 MÉTODO DEL ESPECTRO DE RESPUESTA (RSM)

El RSM fue desarrollado por Mauricio Anthony Bidt en 1932. Consiste en una gráfica que muestra las respuestas máximas de una serie de osciladores de distintos periodos (T) sometidos ante una misma excitación en su base.

Los osciladores tienen el mismo porcentaje de amortiguamiento (ζ). Existen varios tipos de espectros, mismos que se estudian a continuación.

2.13.1 Espectro de respuesta de deformación (D).

Considerando la siguiente mesa con osciladores, donde todos tienen el mismo porcentaje de amortiguamiento y cada uno tiene diferente periodo, se aplica una excitación en la mesa.

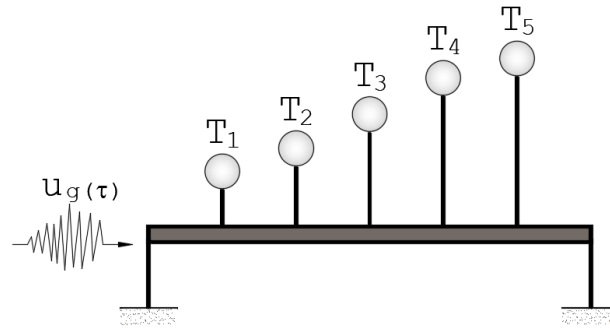


Figura 2.41 Osciladores con diferentes periodos sometidos a una excitación en la base.

Se obtienen las siguientes respuestas de desplazamiento relativo para cada uno de los osciladores.

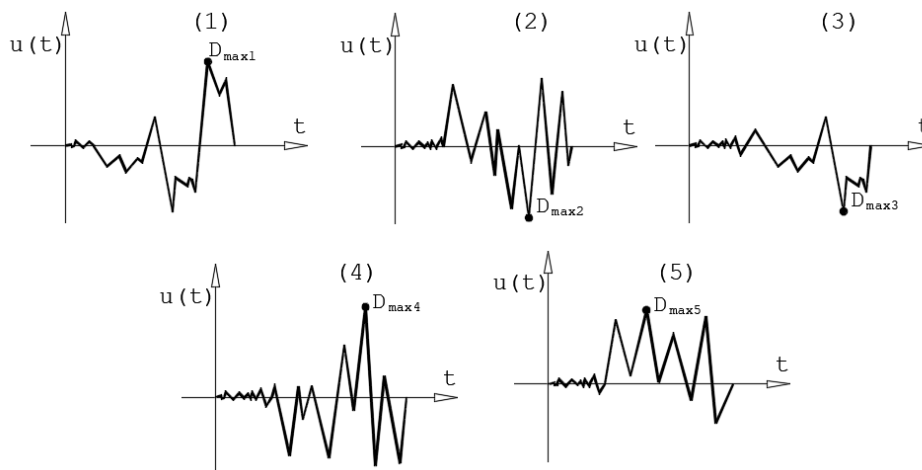


Figura 2.42 Respuestas de desplazamiento relativo.

Si se grafican los máximos absolutos se obtiene la siguiente gráfica.

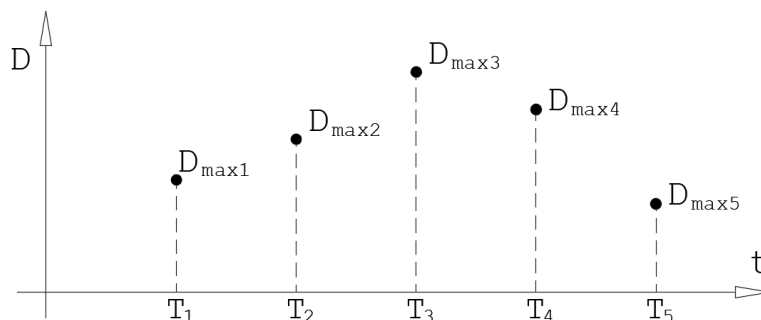


Figura 2.43 Respuestas máximas absolutas de desplazamiento relativo.



Repitiendo el experimento con 500 estructuras con periodos desde $T=0$, $T=0.01$, $T=0.002$, ..., $T=5$, se obtendría la siguiente gráfica.

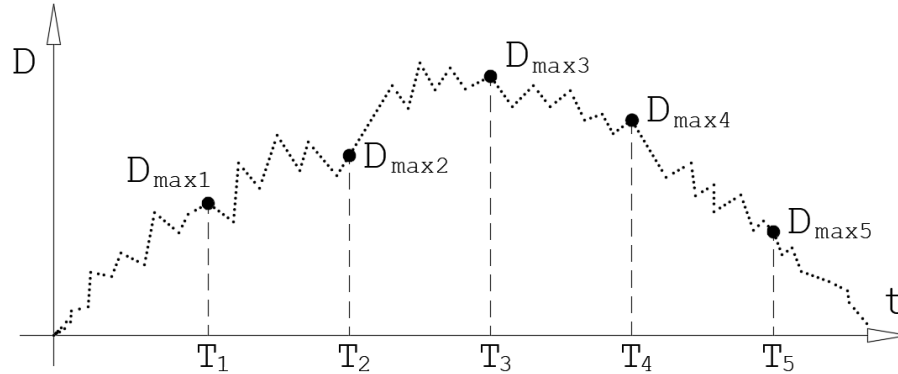


Figura 2.44 Respuestas máximas absolutas para 500 estructuras.

Esta gráfica se conoce como espectro de respuesta de deformación.

2.13.2 Espectro de respuesta de pseudo-aceleración (S_a).

Retomando la ecuación de movimiento para el caso de excitación en la base:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.200)$$

Dividiendo entre m

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega \cdot \dot{u}(t) + \omega^2 \cdot u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (2.201)$$

Si suponemos $\zeta = 0$

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 \cdot u(t) \cong -\ddot{u}_g(t) \quad (2.202)$$

Donde:

$$\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) + \omega^2 \cdot u(t) \cong 0 \quad (2.203)$$

Recordando el tema de la respuesta absoluta:

$$\dot{y}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) = \text{Aceleración absoluta}$$

$$\dot{y}(t) \cong -\omega^2 \cdot u(t) \quad (2.204)$$



Si:

$$-u(t) \rightarrow |u_{max}| \rightarrow D \quad (2.205)$$

$$\dot{y}(t) \rightarrow |\dot{y}_{max}| \rightarrow Sa \quad (2.206)$$

$$Sa = D\omega^2 \quad (2.207)$$

$$Sa \cong \ddot{y} \quad (2.208)$$

Donde:

$Sa = Pseudo - aceleración$

$\ddot{y} = Aceleración absoluta$

La gráfica de pseudo-aceleración se obtiene con la expresión:

$$Sa(t) = u(t)\omega^2 \quad (2.209)$$

2.13.3 Espectro de respuesta de pseudo-velocidad (Sv).

El espectro de pseudo-velocidad se relaciona directamente con la energía de deformación. El espectro de respuesta de pseudo-velocidad es una gráfica de V en función del periodo de vibración (T), o de la frecuencia de vibración f, del sistema. Para el movimiento en la base, la pseudo-velocidad máxima V de un sistema con periodo natural (T) puede determinarse a partir de:

$$Sv = D\omega \quad (2.210)$$

A sí mismo:

$$Sv(t) = u(t)\omega \quad (2.211)$$

2.13.4 Espectro combinado o espectro tetra logarítmico.

En 1960 N.M. Newark desarrollo un espectro único donde se observan las tres cantidades: deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración. Los tres espectros constituyen tan sólo formas distintas de presentar la misma información



sobre la respuesta estructural. Si se conoce uno de los espectros, los otros dos pueden deducirse mediante operaciones algebraicas (Chopra, 2014).

Esta presentación integrada es posible porque las tres magnitudes espectrales están relacionadas entre sí por:

$$\frac{Sa}{\omega} = Sv = D\omega \tag{2.212}$$

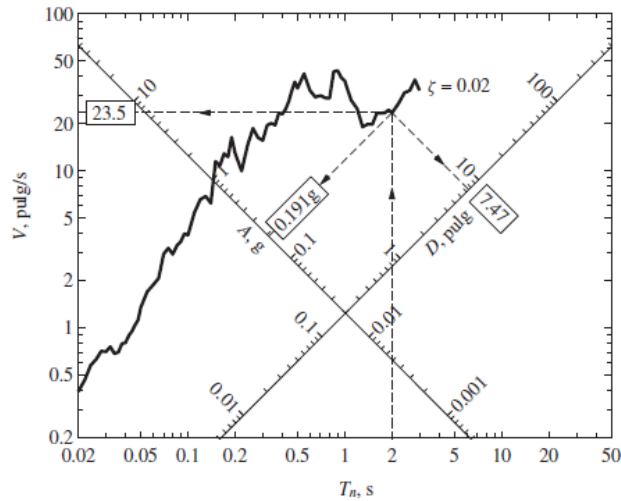


Figura 2.45 Espectro tetra logarítmico (Chopra, 2014).

2.13.5 Espectro de respuesta de pseudo-aceleración normalizada o coeficiente sísmico

Si normalizamos el espectro de pseudo-aceleración con respecto a la aceleración “g”, se obtiene el valor denominado coeficiente sísmico.

$$Cs = \frac{Sa}{g} \tag{2.213}$$

Con este nuevo espectro se puede encontrar la fuerza sísmica equivalente, solo multiplicando el coeficiente por el peso de la estructura.

$$Fseq = Cs \cdot W \tag{2.214}$$



2.13.6 Espectro de diseño sísmico

Este espectro está basado en un análisis estadístico donde se evalúa la respuesta de estructuras de un grado de libertad (1GDL) ante diversos sismos y en un mismo sitio. El análisis estadístico tiene como objetivo evaluar la media y la desviación estándar para resultar con una envolvente de espectros.

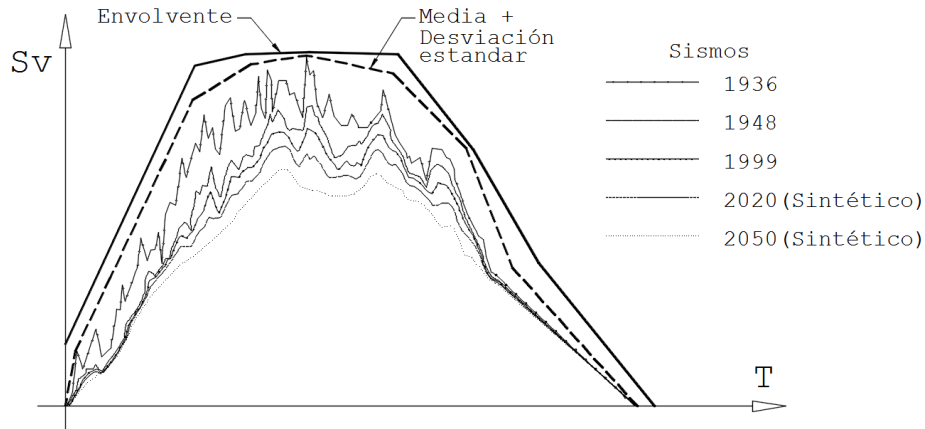


Figura 2.46 Espectro de diseño sísmico de Sv en escala logarítmica.

Transformando a pseudo-aceleración (S_a) y escala decimal resulta el formato de espectro utilizado en las normativas de diseño.

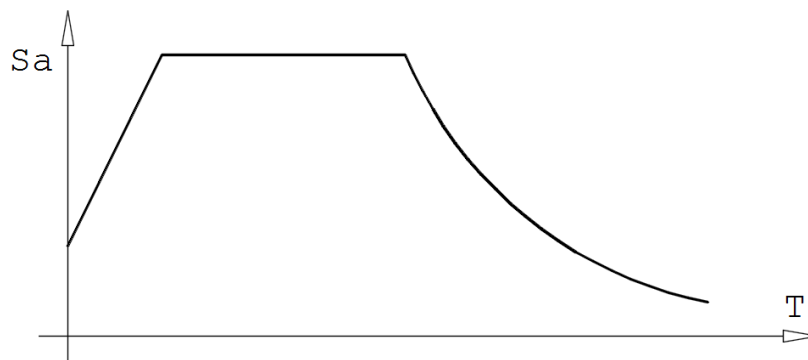


Figura 2.47 Espectro de diseño sísmico de Sa en escala decimal.

Si normalizamos las ordenadas del espectro con respecto a “g” ($C_s = \frac{S_a}{g}$) resulta en el espectro de coeficiente sísmico que se incluye en los códigos o reglamentos de construcción.

El espectro de diseño debe satisfacer ciertos requisitos, ya que está pensado para diseñar nuevas estructuras o para evaluar la seguridad sísmica de las estructuras existentes, a fin de que puedan resistir sismos futuros. Con este propósito, el espectro de respuesta para un movimiento del terreno registrado durante un sismo pasado es inapropiado. El espectro de respuesta para otro movimiento del terreno registrado en el mismo sitio durante un sismo diferente también es irregular, pero los picos y los valles no se presentan necesariamente en los mismos periodos. No es posible predecir la variación del espectro de respuesta en todos sus detalles para un movimiento del terreno que puede producirse en el futuro. Así, el espectro de diseño debe consistir en un conjunto de curvas suaves o en una serie de líneas rectas con una curva para cada nivel de amortiguamiento.

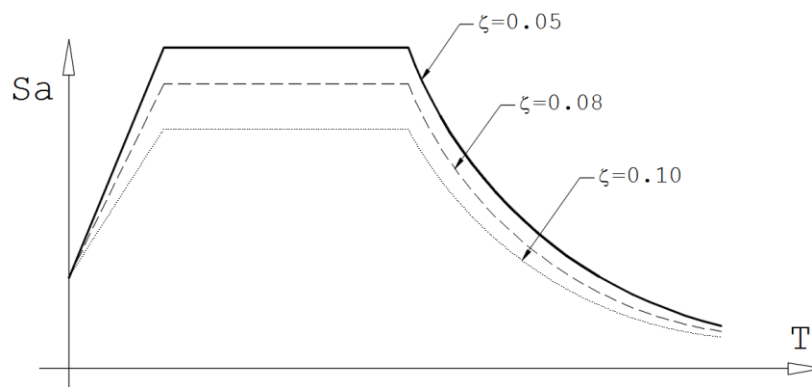


Figura 2.48 Espectro de diseño sísmico considerando diferentes valores de amortiguamiento.

2.13.7 Espectro de diseño sísmico para la Ciudad de Puebla

El código reglamentario para el municipio de Puebla especifica que los proyectos estructurales deberán considerar las normas técnicas para diseño por sismo.

En la versión de las normas de diseño por sismo de año 1994, se especifican los valores característicos para la construcción de los espectros de diseño a utilizar bajo las siguientes hipótesis:

- I. La estructura se comporta elásticamente.
- II. La ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico, **A**, expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones, donde **C**, es el coeficiente sísmico.



$$A = C \quad \text{Si } T \text{ está entre } T1 \text{ y } T2 \quad (2.215)$$

$$A = Cq \quad \text{Si } T \text{ excede de } T2 \quad (2.216)$$

$$q = (T2/T)^r \quad (2.217)$$

Donde T es el periodo natural de interés, además que T , $T1$ y $T2$ están expresados en segundos.

Zona	Descripción	C	Ao	T1	T2	r
I	Terreno firme	0.20	0.20	0.0	0.6	1/2
II	Terreno medianamente blando	0.32	0.32	0.0	1.0	2/3
III	Terreno blando	0.36	0.36	0.0	1.5	2/3
Tratándose de las construcciones clasificadas en el grupo A, estos valores se multiplicarán por 1.3						

Tabla 2.2 Valores para la construcción del espectro de diseño indicados en las NTC-sismo 1994 de Puebla

2.13.8 Espectros de diseño especificados por el Manual de CFE.

Los espectros de diseño estipulados en el Manual de Diseño de Obras Civiles son transparentes, es decir, carecen de factores de reducción ajenos al peligro sísmico. Por lo que, habrá que tomar en cuenta el tipo de estructura (por ejemplo: puentes, presas, edificios), la importancia de la estructura (calificada en el Manual como: B, A y A+) y las reducciones por ductilidad y sobrerresistencia.

En el Manual de CFE se incluye una aplicación de cómputo denominada PRODISIS (Programa de Diseño Sísmico). Empleando este programa (figura 2.9) se localiza el sitio en estudio en función de las coordenadas geográficas y de la importancia estructural (B, A y A+).

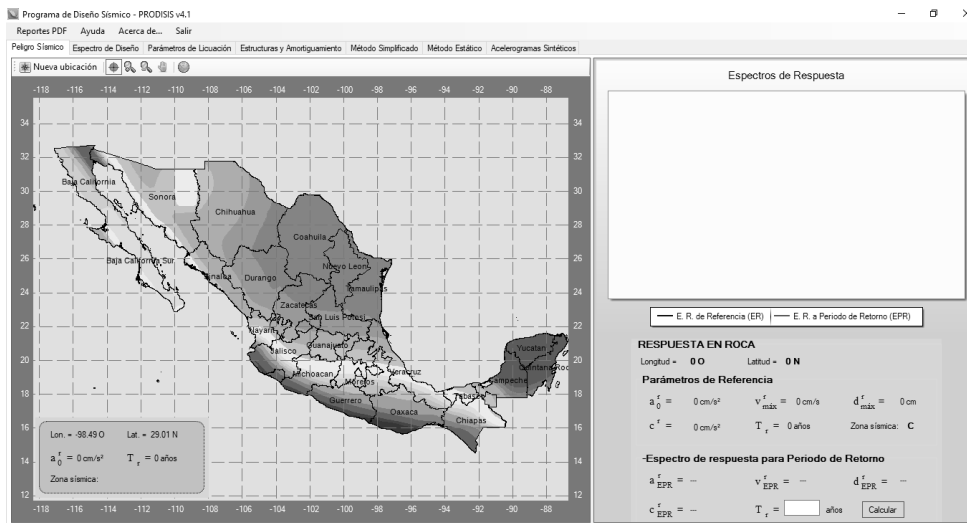


Figura 2.49 Interfaz del programa PRODISIS.

2.13.9 Espectros de diseño especificados por las NTC-sismo de la CDMX.

Las normas Técnicas Complementarias para el Diseño por Sismo de la Ciudad de México 2017 especifica que las acciones sísmicas de diseño se determinarán a partir de los espectros de diseño contenidos en el Sistema de Acciones Sísmicas de Diseño, denominado SASID, para la ubicación específica del predio en estudio. Se encuentran en esa base de datos el espectro elástico para el sitio de la construcción, así como el afectado por los factores de reducción por comportamiento sísmico, Q' , y por sobre-resistencia, R , que se usa para revisar los requisitos de seguridad contra colapso.

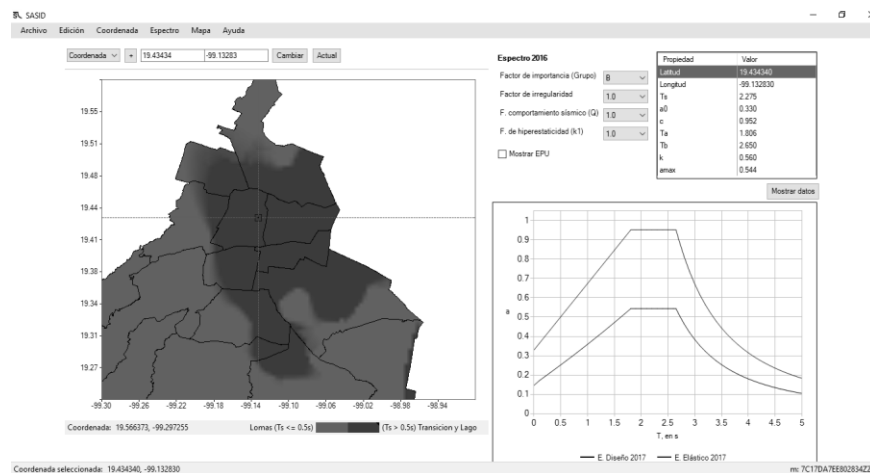


Figura 2.50 Interfaz del programa SASID.

2.14 Análisis modal

Estudiaremos el denominado análisis modal de edificios de cortante (1GDL por nivel). En estos edificios, las columnas tienen comportamiento de barra axialmente rígida y las losas y/o traveses de diafragma. Inicialmente se estudiarán los casos de vibración libre sin amortiguamiento y con amortiguamiento sometidos a condiciones iniciales.

2.14.1 Modelo analítico (caso sin amortiguamiento)

Considerando el siguiente edificio de cortante sometido a condiciones iniciales (desplazamiento y velocidad).

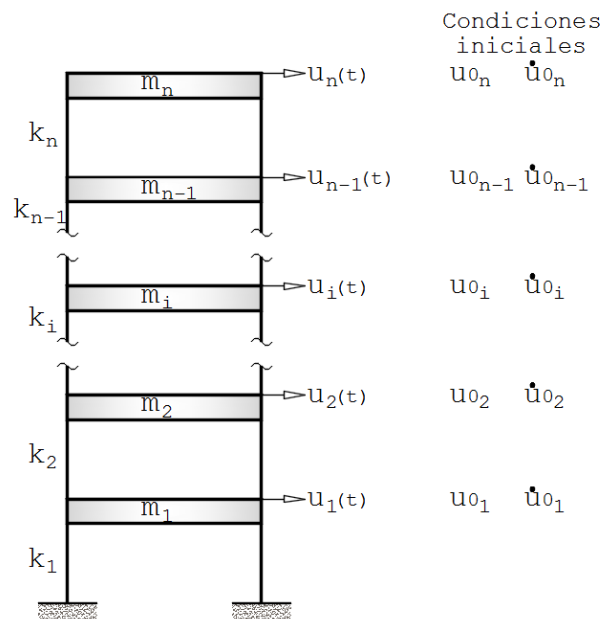


Figura 2.51 Modelo analítico de un edificio de cortante.

Las condiciones iniciales se pueden agrupar en dos vectores.

$$\text{desplazamiento} = \widetilde{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \vdots \\ u_{0i} \\ \vdots \\ u_{0n-1} \\ u_{0n} \end{bmatrix} \quad \text{velocidad} = \widetilde{\dot{u}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{u}_{01} \\ \dot{u}_{02} \\ \vdots \\ \dot{u}_{0i} \\ \vdots \\ \dot{u}_{0n-1} \\ \dot{u}_{0n} \end{bmatrix}$$



La respuesta también se puede agrupar en un vector como:

$$\text{desplazamiento} = \tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_i(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

2.14.2 Ecuación de movimiento

Retomando las ecuaciones para el caso de vibración libre sin amortiguamiento (VLSA) en sistemas de 1GDL.

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \tag{2.218}$$

La respuesta está dada por:

$$u(t) = U_0 \cos \omega(t) + \frac{\dot{U}_0}{\omega} \sin \omega(t) \tag{2.219}$$

O bien por la expresión alternativa.

$$u(t) = U_0(\sin \omega(t) + \phi) \tag{2.220}$$

Cambiando U_0 por A

$$u(t) = A(\sin \omega(t) + \phi) \tag{2.221}$$

Retomando la ecuación de movimiento para el caso de “n”GDL:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\tilde{u}}(t) + \mathbf{K} \cdot \tilde{u}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) \tag{2.222}$$

Para el caso de vibración libre: $\tilde{\mathbf{F}}(t) = \tilde{\mathbf{0}}$

Por lo tanto:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\tilde{u}}(t) + \mathbf{K} \cdot \tilde{u}(t) = \tilde{\mathbf{0}} \tag{2.223}$$

Donde el objetivo es calcular el vector de desplazamientos (“n” incógnitas).



2.14.3 Vector de desplazamientos

De forma análoga con la ecuación (2.221) podemos suponer que la solución está dada por:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A}(\sin \omega(t) + \phi) \quad (2.224)$$

Misma que deberá verificarse. Interpretando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1(\sin \omega(t) + \phi) \\ u_2(t) &= A_2(\sin \omega(t) + \phi) \\ &\vdots \\ u_i(t) &= A_i(\sin \omega(t) + \phi) \\ &\vdots \\ u_{n-1}(t) &= A_{n-1}(\sin \omega(t) + \phi) \\ u_n(t) &= A_n(\sin \omega(t) + \phi) \end{aligned} \quad (2.225)$$

En la propuesta de solución se plantean distintas amplitudes, pero mismo ω y ϕ . Debemos introducir la ecuación (2.224) en la ecuación de movimiento. Por lo que es necesario derivar dos veces.

$$\tilde{\dot{u}}(t) = \omega \tilde{A}(\cos \omega(t) + \phi) \quad (2.226)$$

$$\tilde{\ddot{u}}(t) = -\omega^2 \tilde{A}(\sin \omega(t) + \phi) \quad (2.227)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{M} \cdot [-\omega^2 \tilde{A}(\sin \omega(t) + \phi)] + \mathbf{K} \cdot [\tilde{A}(\sin \omega(t) + \phi)] = \tilde{0} \quad (2.228)$$

Reordenando y reagrupando:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \cdot \tilde{A}(\sin \omega(t) + \phi) = \tilde{0} \quad (2.229)$$

Analizando la ecuación anterior para las tres posibles soluciones:

- 1) $\tilde{A} = \tilde{0}$ → Es una solución trivial, porque la estructura no vibra.
- 2) $(\sin \omega(t) + \phi) = \tilde{0}$ → Es cero solo en algunos puntos.
- 3) $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = \tilde{0}$ → Es la solución.



2.14.4 Eigenvalores y Eigenvectores

Retomado la tercera solución planteada anteriormente:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = \tilde{\mathbf{0}} \quad (2.230)$$

Esta ecuación corresponde a un problema general de matemáticas conocido como problema de eigenvalores y eigenvectores. También se le conoce como problema de valores y vectores propios. En dinámica estructural se le conoce como análisis modal.

Solución:

- 1) Calcular el determinante e igualar a cero.

$$|[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]| = 0 \quad (2.231)$$

Al resolver el determinante se genera un polinomio llamado “polinomio característico”.

$$C_n \omega^n + C_{n+1} \omega^{n+1} + \dots + C_i \omega^i + \dots + C_1 \omega^1 + C_0 = 0 \quad (2.232)$$

- 2) Calcular ω .

Al resolver el polinomio se observa que se tiene varias ω y no una como se planteo al inicio. Las ω^2 corresponden a los denominados eigenvalores.

- 3) Una vez calculados los eigenvalores: $\omega^2_1, \omega^2_2, \dots, \omega^2_i, \dots, \omega^2_n$

Se ordena de 1 a “n” en la ecuación:

$$[\mathbf{K} - \omega^2_i \mathbf{M}] \cdot \tilde{\mathbf{A}}_i = \tilde{\mathbf{0}} \quad (2.233)$$

Y se calcula: $\tilde{\mathbf{A}}_i$ de 1 a “n”, se tiene: $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_i, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$ (Eigenvectores)

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{i1} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{n2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ii} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{in} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.234)$$



En dinámica estructural son: las formas modales o modos de vibrar. Un modo de vibración es un patrón o forma característica en el que vibrará una estructura. El objetivo del análisis modal es determinar la forma de esos modos.

El concepto fundamental es que, en un instante dado, los desplazamientos de las masas de un sistema de varios grados de libertad pueden expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a la participación de cada uno de los modos naturales.

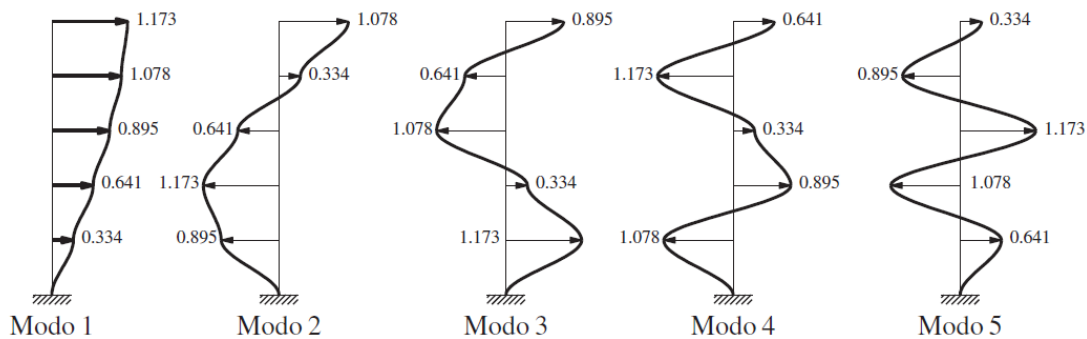


Figura 2.52 Modos de vibración de un edificio de cortante, (Chopra, 2014).

2.14.5 Matriz modal

Haciendo un cambio de nomenclatura en la ecuación (2.234) de \tilde{A}_i por $\tilde{\phi}_i$. Los eigenvectores nodales $\tilde{\phi}_i$ pueden reunirse en una sola matriz como:

$$\Phi_A = [\tilde{\phi}_1 \quad \tilde{\phi}_2 \quad \dots \quad \tilde{\phi}_i \quad \dots \quad \tilde{\phi}_n] \quad (2.235)$$

Esta matriz tiene la forma:

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{12} & \dots & \tilde{\phi}_{1i} & \dots & \tilde{\phi}_{1n} \\ \tilde{\phi}_{21} & \tilde{\phi}_{22} & \dots & \tilde{\phi}_{2i} & \dots & \tilde{\phi}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\phi}_{i1} & \tilde{\phi}_{i2} & \dots & \tilde{\phi}_{ii} & \dots & \tilde{\phi}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\phi}_{n1} & \tilde{\phi}_{n2} & \dots & \tilde{\phi}_{ni} & \dots & \tilde{\phi}_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.236)$$

La matriz Φ_A es de tamaño $n \times n$ ($n = \text{GDL}$) y recibe el nombre de matriz modal.



$$\Phi_N^T \cdot C \cdot \Phi_N = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2\zeta_2\omega_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2\zeta_i\omega_i & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.266)$$

2.15 Vibración libre sin amortiguamiento (VLSA)

Estudiaremos la respuesta ante condiciones iniciales en sistemas de varios grados de libertad (GDL). Recordando la respuesta en sistemas de 1GDL.

$$u(t) = A \cos \omega(t) + B \sin \omega(t) \quad (2.4)$$

$$\dot{u}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (2.7)$$

2.15.1 Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento a resolver es:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}(t) = \Phi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi_A \quad (2.267)$$

Se resolvió el problema de eigenvalores y eigenvectores, de lo cual se observó que existen “n” frecuencias ω y “n” vectores o formas modales $\tilde{\phi}_i$ por lo tanto la respuesta estará dada por una superposición de las respuestas individuales de cada modo, por ello se tiene lo siguiente:

$$\tilde{u}(t) = [\check{A} \cdot \sin(\omega(t) + \phi)] \quad (2.268)$$

Propuesta inicial de solución la cual es incorrecta.

Haciendo un cambio de nomenclatura:

$$\tilde{u}(t) = [\check{U} \cdot \sin(\omega(t) + \alpha)] \quad (2.269)$$

Debemos superponer las respuestas de cada modo.



$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i [\tilde{U}_i \cdot \sin(\omega_i(t) + \alpha_i)] \quad (2.270)$$

Empleando la ecuación común (2.4) se tiene:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i [A_i \cdot \cos \omega_i(t) + B_i \cdot \sin \omega_i(t)] \quad (2.271)$$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i [-A_i \cdot \omega_i \cdot \sin \omega_i(t) + B_i \cdot \omega_i \cdot \cos \omega_i(t)] \quad (2.272)$$

2.15.2 Cálculo de constantes

Evaluando en t=0

$$\tilde{u}(t = 0) = \tilde{U}_0 \quad (2.273)$$

$$\dot{\tilde{u}}(t = 0) = \dot{\tilde{U}}_0 \quad (2.274)$$

Con la ecuación (2.271)

$$\tilde{U}_0 = \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i A_i \quad (2.275)$$

Como son vectores, interpretando la ecuación anterior:

$$\tilde{U}_0 = \tilde{\phi}_1 A_1 + \tilde{\phi}_2 A_2 + \dots + \tilde{\phi}_i A_i + \dots + \tilde{\phi}_n A_n \quad (2.276)$$



CAPÍTULO 3. CONCEPTOS DE PROGRAMACIÓN

Aprender a programar significa conocer las herramientas del lenguaje de programación y saber cómo combinarlas para realizar aquello que se desea. La tarea de programación se simplifica si podemos utilizar componentes prefabricados. Pero la programación no es solo el trabajo de escritura del código, sino todo un conjunto de tareas que se deben cumplir, a fin de que el código que se escribió resulte correcto y cumpla con el objetivo o los objetivos para los que fue creado.

3.1 Programas de computadora.

Los programas consisten en instrucciones combinadas con sub-tareas y los conceptos de secuencia, selección y repetición. La computadora es una máquina que lleva a cabo de manera automática esta secuencia de instrucciones o programa, si el programador comete un error al determinar las instrucciones, es probable que la computadora realice una tarea incorrecta (M. Deitel & J. Deitel, 2007).

El conjunto de instrucciones disponibles para que una computadora las lleve a cabo suele componerse de:

- Ingresar un número (o alimentación, input);
- Ingresar algunos caracteres (letras y dígitos);
- Dar como resultado algunos caracteres (output);
- Realizar un cálculo;
- Mostrar un número como resultado;
- Mostrar una imagen gráfica en la pantalla;
- Responder al clic de un botón que se encuentra en la pantalla.

Un programa se escribe con instrucciones en un lenguaje de programación, el cual, a su vez, está definido por su sintaxis, que establece e indica las reglas de escritura (la gramática), y por la semántica de los tipos de datos, instrucciones, definiciones, y todos los otros elementos que constituyen un programa (Juganaru Mathieu, 2014).



Un lenguaje de programación es un caso particular del lenguaje informático; el cual permite hacer programas, pero también describir datos, configuraciones físicas y protocolos de comunicación entre equipos y programas (Figura 3.1).

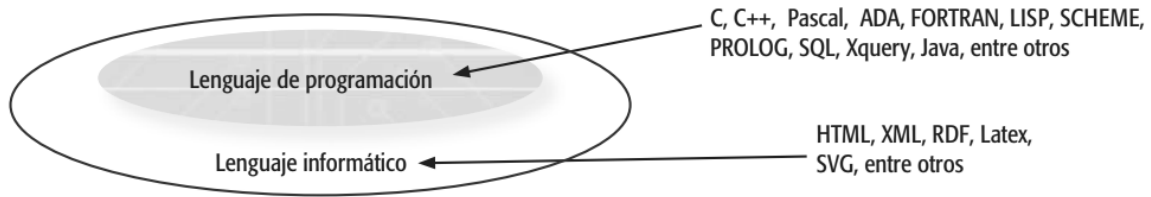


Figura 3.1 Tipos de lenguajes, (Juganaru Mathieu, 2014)

En la Figura 3.2 se observa una lista de lenguajes de programación, ordenados cronológicamente.

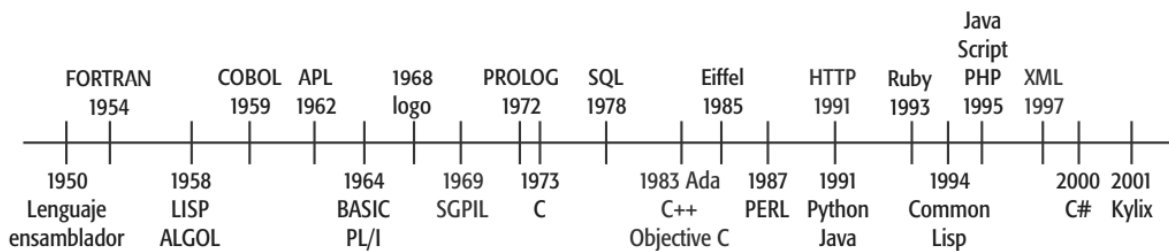


Figura 3.2 Línea de tiempo de los lenguajes de programación, (Juganaru Mathieu, 2014).

Si un programa está escrito en un lenguaje de programación comprensible para el ser humano, se le llama código fuente. A su vez, el código fuente se puede convertir en un archivo ejecutable (código máquina) con la ayuda de un compilador, aunque también puede ser ejecutado de inmediato a través de un intérprete (Figura 3.3).

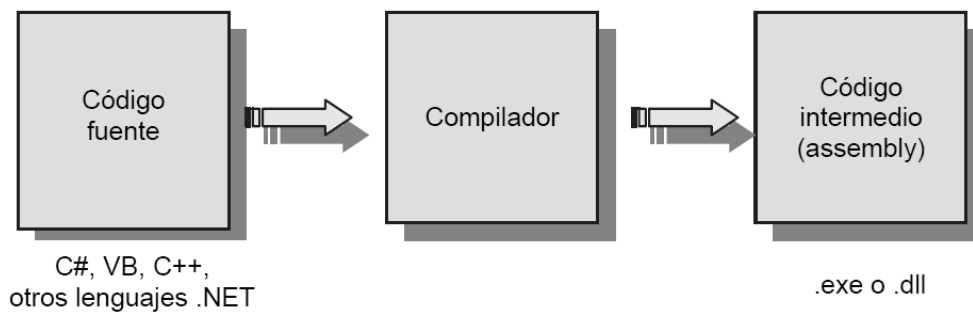


Figura 3.3 Proceso de ejecución de un programa, (Ceballos Sierra, 2013)



A su vez, un paradigma de programación provee (y determina) la visión y los métodos de un programador en la construcción de un programa o subprograma (Juganaru Mathieu, 2014). Existen diferentes paradigmas que derivan en múltiples y variados estilos de programación y en diferentes formas de solución de problemas:

- Paradigma imperativo
- Paradigma estructurado
- Paradigma declarativo funcional
- Paradigma declarativo lógico
- Paradigma orientado a objetos

El programa que se desarrolla en el presente trabajo se realizó utilizando el lenguaje de programación Microsoft Visual C#, el cual se basa en el paradigma orientado a objetos. Este lenguaje está integrado al entorno de desarrollo de Microsoft Visual Studio .Net

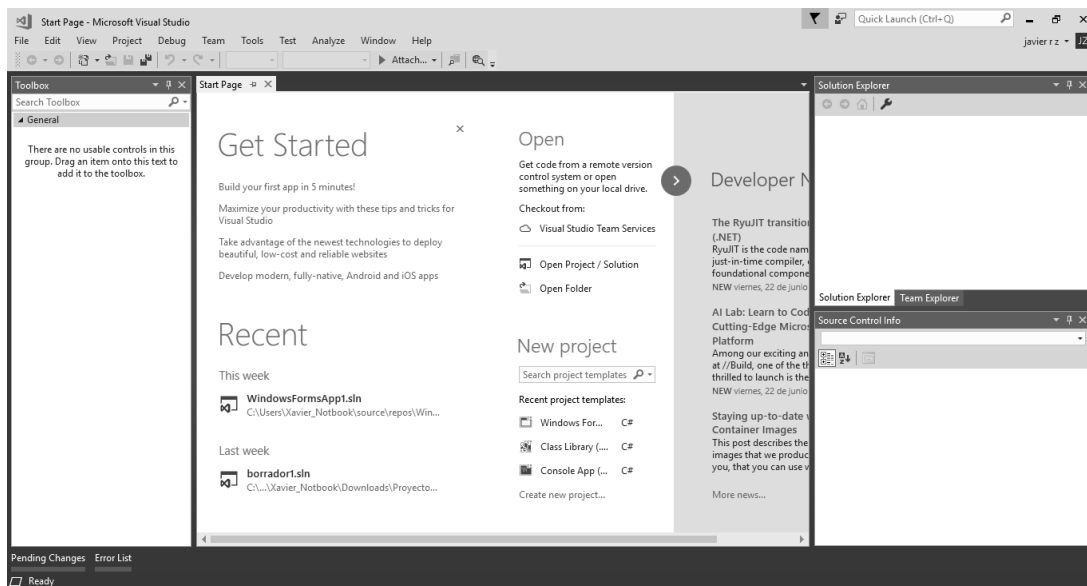


Figura 3.4 Interfaz gráfica del entorno de desarrollo Microsoft Visual Studio.Net.



3.2 Programación orientada a objetos.

Los lenguajes como C# están orientados a objetos. La programación en un lenguaje de este tipo se llama programación orientada a objetos (POO), y permite a los programadores de computadoras implementar en forma conveniente un diseño orientado a objetos como un sistema de software funcional (M. Deitel & J. Deitel, 2007).

La programación orientada a objetos se basa en la construcción de programas a partir de objetos. Los objetos son combinaciones de datos (variables) y acciones (métodos) que desempeñan funciones útiles en un programa. El programador diseña un objeto de manera que los datos y las acciones estén estrechamente relacionados entre sí en vez de agruparlos al azar.

En C# no es posible escribir de manera directa instrucciones que describan un objeto, en vez de ello, el programador define todos los objetos de la misma clase. Por ejemplo, si necesitamos un objeto botón, vamos al cuadro de herramientas y seleccionamos la clase Button, arrastramos una instancia de esa clase y la colocamos en el formulario. Si necesitamos un segundo botón, creamos una segunda instancia de esa misma clase. La descripción de la estructura de todos los posibles botones se llama clase, y constituye una plantilla o plano maestro para fabricar cualquier número de objetos. En consecuencia, podemos decir que una clase es la generalización de un objeto.

El concepto de clases es común en casi todas las actividades de diseño. Por lo general, antes de construir un objeto real hay que crear un diseño de este. Se bosqueja cierto tipo de plano en papel o en un programa de computación, y el diseño resultante especifica todos los detalles del objeto deseado, de manera que alguien más pueda llevar a cabo su construcción. Una vez que se ha diseñado un objeto (digamos un automóvil, un libro o una computadora), es posible construir varias instancias idénticas. Por lo tanto, el diseño especifica la composición de cualquier cantidad de objetos. Lo mismo ocurre en el ámbito de la programación orientada a objetos: una clase es el plano para construir cualquier número de objetos idénticos.



Una vez que especificamos una clase, podemos hacer cualquier cantidad de objetos con el mismo comportamiento (Bell & Parr, 2010).

Los objetos son agrupamientos lógicos de variables, métodos y propiedades. Cada uno constituye un módulo autocontenido que se puede utilizar y entender con facilidad. El principio del ocultamiento o encapsulamiento de información implica que los usuarios de un objeto tienen una vista restringida del mismo. El objeto proporciona un conjunto de servicios en forma de métodos y propiedades que otros pueden utilizar.

3.3 Algoritmos de programación.

Un algoritmo constituye una lista bien definida, ordenada y finita de operaciones, que permite encontrar la solución a un problema determinado. Dado un estado inicial y una entrada, es a través de pasos sucesivos y bien definidos que se llega a un estado final, en el que se obtiene una solución (si hay varias) o la solución (si es única) (Juganaru Mathieu, 2014).

Un algoritmo puede ser expresado en:

- Lenguaje natural (a veces, este no resulta muy claro, pero es muy útil para problemas simples)
- Pseudocódigo
- Diagramas de flujo
- Programas

El uso de algún elemento de la lista anterior para la expresión de un algoritmo, se hace según el nivel de descripción de dicho algoritmo. Es evidente que el lenguaje natural es de mayor utilidad para transmitir las ideas del algoritmo. Al contrario, un programa es difícil de entender por simple lectura, aun por una persona que conoce el lenguaje del programa, e imposible para aquellas que no lo conocen.

El pseudocódigo y los diagramas de flujo, en cambio, se sitúan en un punto intermedio de comprensión, entre el lenguaje natural y un programa. Estas dos



herramientas poseen un poder de expresión equivalente; no obstante, los diagramas de flujo tienen la ventaja de ser más gráficos y visuales (figura 3.6).

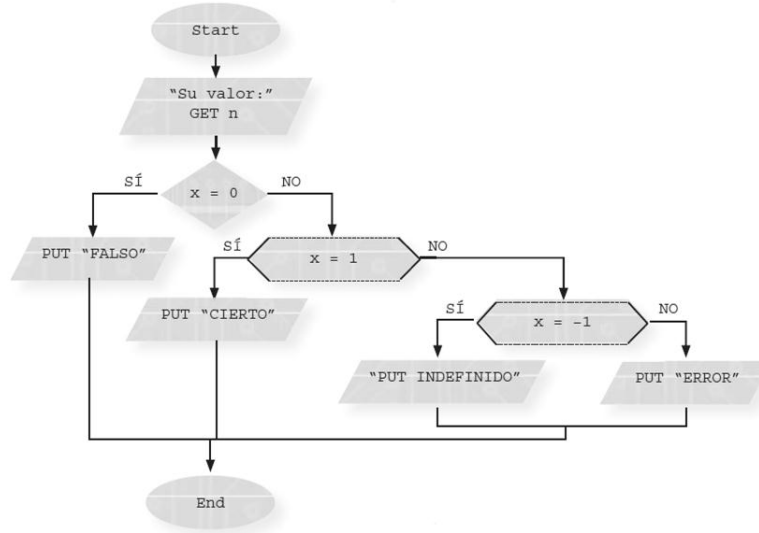


Figura 3.5 Ejemplo de diagrama de flujo, (M. Deitel & J. Deitel, 2007)

Un algoritmo sigue un proceso de elaboración que pasa por las siguientes fases:

1. **Definición.** Se especifica el propósito del algoritmo.
2. **Análisis.** Se analizan el problema y sus características; se determinan las entradas y las salidas del problema, y se elige la solución más conveniente, si hay varias, o se propone una nueva.
3. **Diseño.** Se plasma la solución del problema; aquí se emplea una herramienta de diseño: el diagrama de flujo y el pseudocódigo.
4. **Implementación.** Se realiza el programa y se hacen varias pruebas; el programa se edita con editores de texto y se compila o se interpreta a fin de crear el ejecutable o ejecutar el código.

El diseño de la mayoría de los algoritmos requiere creatividad y conocimientos de la metodología de programación, esto significa que debe desarrollar una lógica computacional a través de la resolución de programas. Y principalmente en diseño de un algoritmo debe realizarse a partir de un análisis del problema.



Todo problema algorítmico es un reto para su diseñador. Algunos resultan inmediatos de resolver, otros son bastante complejos. La investigación en esta área ha permitido descubrir un conjunto de métodos y esquemas de diseño hacia los cuales puede orientarse la realización de muchos algoritmos. Idear un algoritmo continúa siendo una labor bastante creativa donde los conocimientos y las experiencias del propio diseñador tienen un papel fundamental.

3.4 Interfaz gráfica de usuario.

Una interfaz gráfica de usuario (“GUI” por sus siglas en inglés Graphical User Interface) permite a un usuario interactuar con un programa en forma visual; además, proporciona a un programa una “apariencia visual” única. Al proporcionar distintas aplicaciones en las que los componentes de la interfaz de usuario sean consistentes e intuitivos, los usuarios pueden conocer con mayor rapidez las aplicaciones y así volverse más productivos (M. Deitel & J. Deitel, 2007).

Las GUIs se crean a partir de controles (conocidos como componentes o widgets). Los controles de la GUI son objetos que pueden mostrar información en la pantalla o que permiten a los usuarios interactuar con una aplicación a través del ratón, del teclado o de alguna otra forma de entrada (como los comandos de voz) (Figura 3.6).

situada debajo del título del formulario. Cuando el usuario haga clic en un título de un menú, se desplegará una lista visualizando los elementos que contiene el menú (figura 3.7).

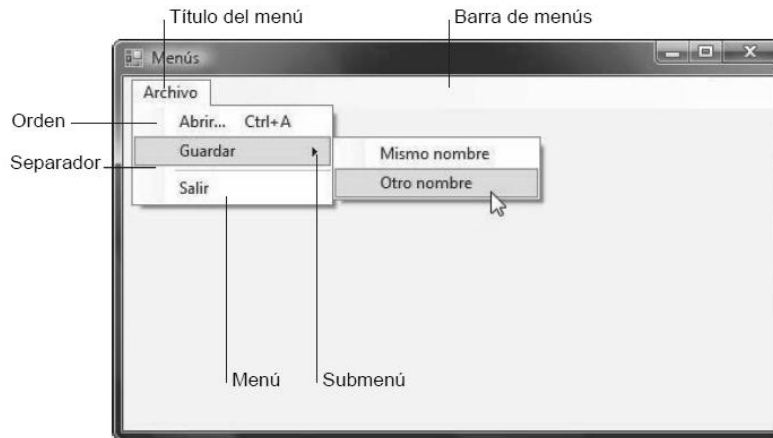


Figura 3.7 Elementos que integran a un “Menú”, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.2 Caja de mensaje.

Cuando una aplicación necesita datos adicionales de los usuarios para continuar, visualizará una caja de diálogo modal, esto es, una caja de diálogo que tiene que ser cerrada para poder continuar (normalmente pulsando el botón Aceptar o el botón Cancelar) (figura 3.8).

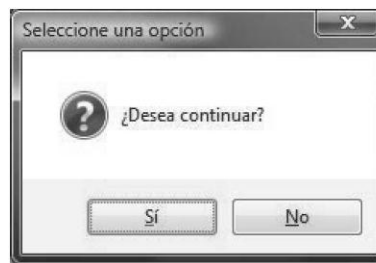


Figura 3.8 Caja de mensaje, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.3 Casilla de verificación.

Una casilla de verificación es un control que indica si una opción particular está activada o desactivada. Si durante la ejecución se hace clic en una casilla de verificación, la opción queda seleccionada (☑). Una opción ya seleccionada puede



pasar a no estarlo haciendo clic de nuevo sobre la casilla de verificación correspondiente (☐). (figura 3.9).



Figura 3.9 Casilla de verificación, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.4 Botón.

Un botón es un control que el usuario oprime para desencadenar una acción específica, o para seleccionar una opción en un programa. Un programa puede usar varios tipos de botones, tales como casillas de verificación y botones de opción (figura 3.10).



Figura 3.10 Botón de opción, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.5 Etiquetas.

Las etiquetas, son cajas de texto no modificables por el usuario. Su finalidad es informar al usuario de qué tiene que hacer y cuál es la función de cada control (figura 3.11).



Figura 3.11 Ejemplo de etiqueta, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.6 Botones de opción.

Un botón de opción es un control que indica si una determinada opción está activada o desactivada. Cada botón de opción es independiente de los demás, ya que cada uno de ellos tiene su propio identificador. El número de opciones representadas de esta forma puede ser cualquiera y, de ellas, el usuario solo puede seleccionar una cada vez. (figura 3.12).



Figura 3.12 Ejemplo de botón de opción, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.7 Lista.

Una lista es un control que pone a disposición del usuario un conjunto de elementos, que podrá elegir haciendo clic en ellos. La selección de los elementos puede ser simple o múltiple. De forma predeterminada, los elementos de una lista son visualizados verticalmente en una sola columna. Cuando la lista muestra una sola



columna y la cantidad de elementos rebasa el número de los que pueden ser visualizados simultáneamente en el espacio disponible, aparecerá automáticamente una barra de desplazamiento vertical para que el usuario pueda desplazar los elementos de la lista hacia arriba o hacia abajo (figura 3.13).

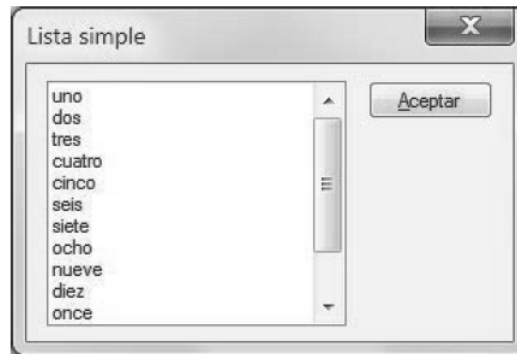


Figura 3.13 Ejemplo de lista simple, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.8 Control deslizante.

Un control deslizante o deslizador al igual que una barra de desplazamiento puede tener orientación horizontal o vertical y, además, se puede mejorar su apariencia con marcas (figura 3.14).

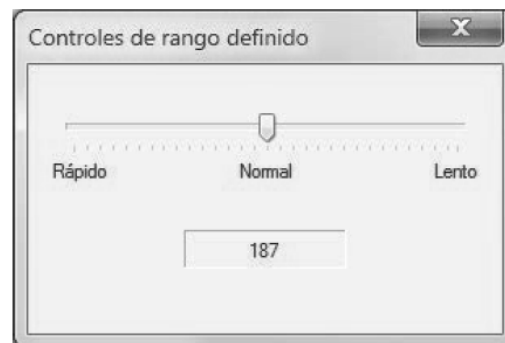


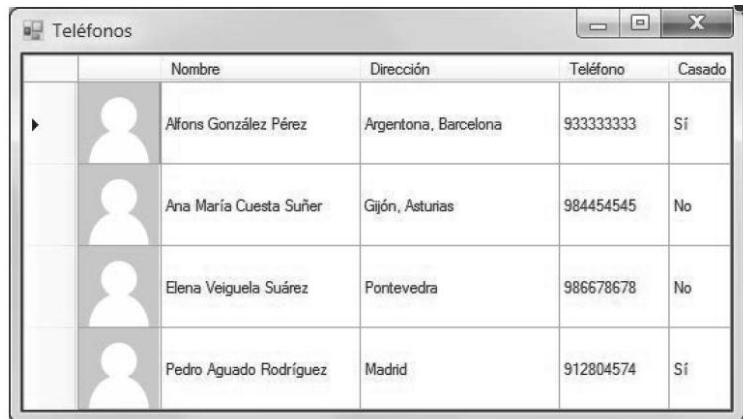
Figura 3.14 Ejemplo de control deslizante, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.9 Tablas.

Este control proporciona una tabla para visualizar datos en la que se pueden personalizar las celdas, filas, columnas, bordes y color a través de sus propiedades. Así mismo, este control puede ser utilizado para mostrar datos independientemente



de que estos procedan o no de una fuente de datos. Cuando no se especifica una fuente de datos, se pueden crear columnas y filas y añadirlas a la tabla (figura 3.15).



	Nombre	Dirección	Teléfono	Casado
▶	Alfons González Pérez	Argentona, Barcelona	933333333	Sí
	Ana María Cuesta Suñer	Gijón, Asturias	984454545	No
	Elena Veigueta Suárez	Pontevedra	986678678	No
	Pedro Aguado Rodríguez	Madrid	912804574	Sí

Figura 3.15 Ejemplo de tabla, (Ceballos Sierra, 2013)

3.4.10 Control con pestañas.

Para exponer una gran cantidad de datos minimizando el uso del espacio de pantalla podemos utilizar pestañas. Las diferentes pestañas son almacenadas en una colección y se muestra solo una a la vez (figura 3.16).



Figura 3.16 Ejemplo de control con pestañas, (Ceballos Sierra, 2013)



CAPÍTULO 4. PROGRAMA “DINÁMICA ESTRUCTURAL”

En los temas siguientes se presenta el programa desarrollado, describiendo cada uno de los componentes (menús, botones, ventanas, etc.). Posteriormente se muestra la validación de los resultados del programa al compararlos con ejercicios que se incluyen en la literatura técnica existente.

4.1 Interfaz de usuario.

El programa presenta una pantalla inicial donde se muestra las dos opciones: “Sistema de un grado de libertad (1GD)” y “Sistema de múltiples grados de libertad (MGDL)”.



Figura 4.1 Pantalla inicial del programa.

4.2 Oscilador de un grado de libertad (1GDL)

La interfaz general del programa se integra por cinco zonas principales: barra de menús, zona de gráficas, representación de los osciladores, ventana de datos de entrada y zona de controladores.

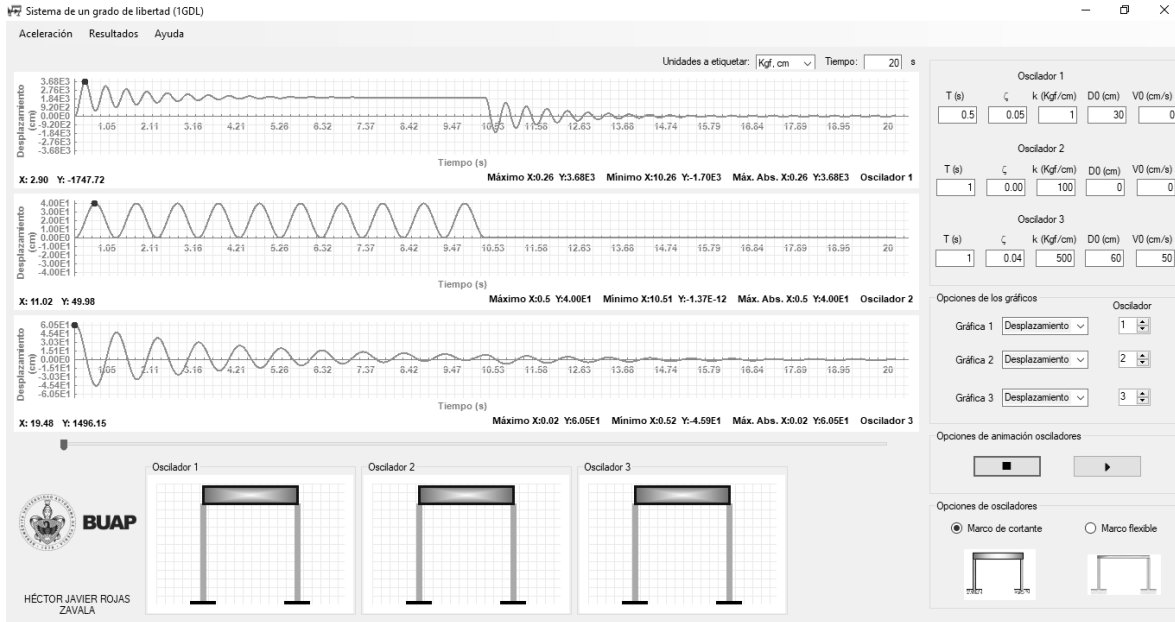


Figura 4.2 Interfaz gráfica del programa (1GDL).

4.2.1 Barra de menús (Aceleración).

En este menú se presentan las alternativas de datos de entrada para la “Aceleración”. Con estas opciones el usuario puede introducir datos de entrada para la excitación a la que estarán sometidos los osciladores.

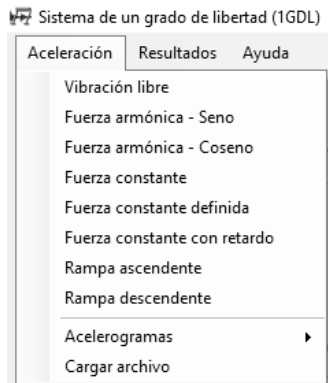


Figura 4.3 Menú donde se muestran las opciones de las fuerzas de excitación.

En la opción de aceleración se presentan varias alternativas para introducir los datos de la fuerza a la que estarán sometidos los osciladores:

- Vibración libre: Se obtiene la respuesta del oscilador bajo únicamente las condiciones iniciales especificadas por el usuario.
- Fuerza armónica - Seno.

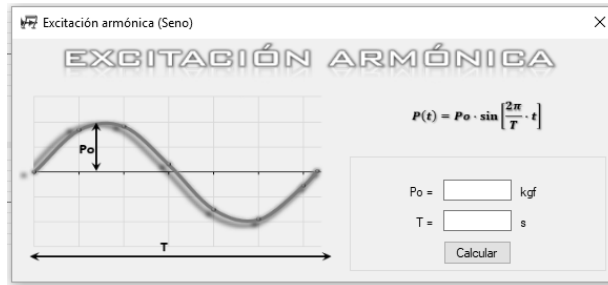


Figura 4.4 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza armónica - Seno.

- Fuerza armónica – Coseno.

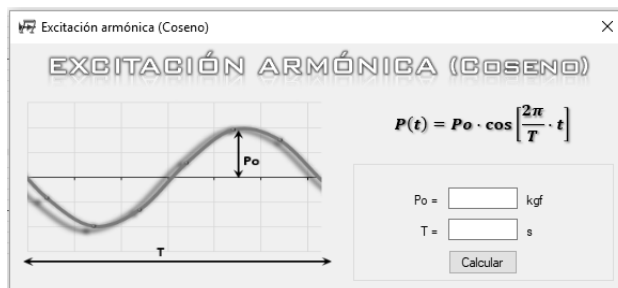


Figura 4.5 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza armónica - Coseno.

- Fuerza constante.



Figura 4.6 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza constante.



- Fuerza constante definida.

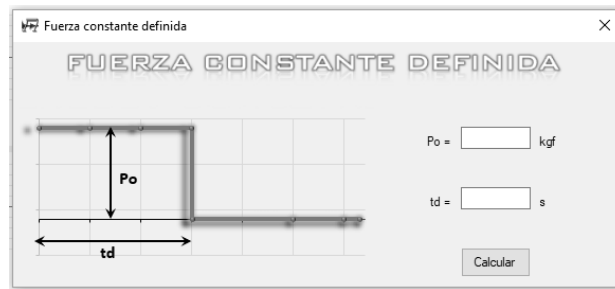


Figura 4.7 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza constante definida.

- Fuerza constante con retardo.

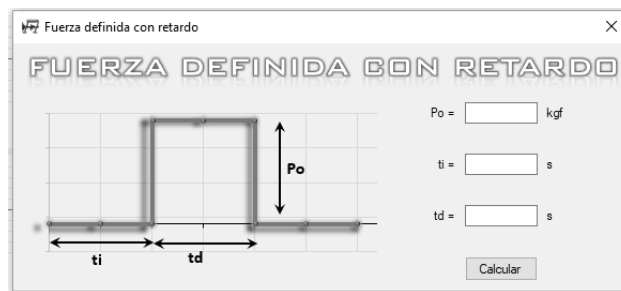


Figura 4.8 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza definida con retardo.

- Rampa ascendente.

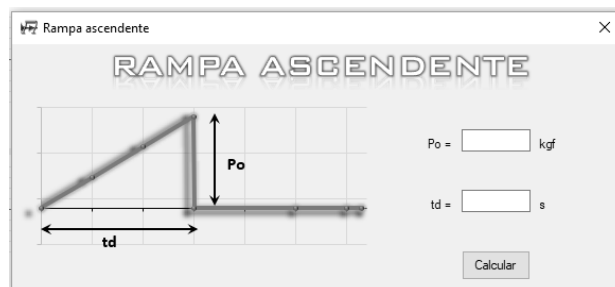


Figura 4.9 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza rampa ascendente.

- Rampa descendente.

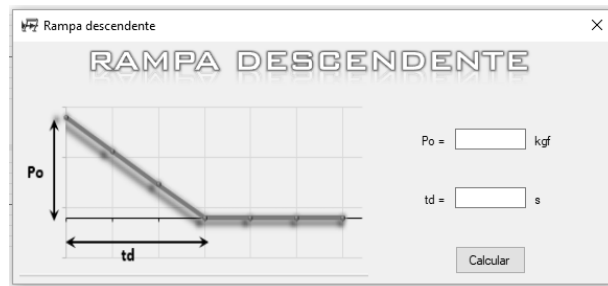


Figura 4.10 Cuadro de dialogo para especificar los parámetros de una fuerza rampa descendente.

- Acelerogramas: En esta opción el usuario tiene la alternativa de escoger entre varios registros de aceleraciones precargados en el programa. Los registros incluidos están normalizados con respecto a la aceleración de la gravedad (g), por lo que al seleccionar un registro el programa muestra un mensaje donde el usuario define el valor de “ g ”, de acuerdo con las unidades que este trabajando.

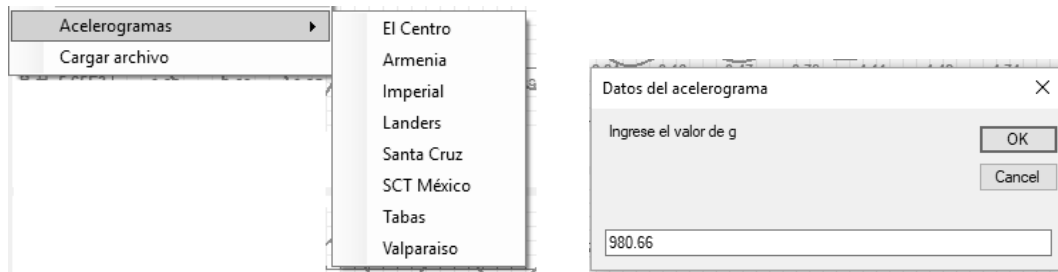


Figura 4.11 Cuadros de dialogo para especificar diferentes registros de aceleraciones y el valor de la constante “ g ”.

- Cargar archivos: El programa permite que el usuario ingrese un registro de aceleraciones almacenado en un archivo de texto “ txt ”, en el cual se deben incluir únicamente los valores de las aceleraciones, el programa muestra una ventana de explorador para seleccionar la ubicación del archivo y posteriormente el programa muestra dos ventanas para ingresar los datos adicionales: intervalo de tiempo en los datos (Δt) y el valor de la constante “ g ”.

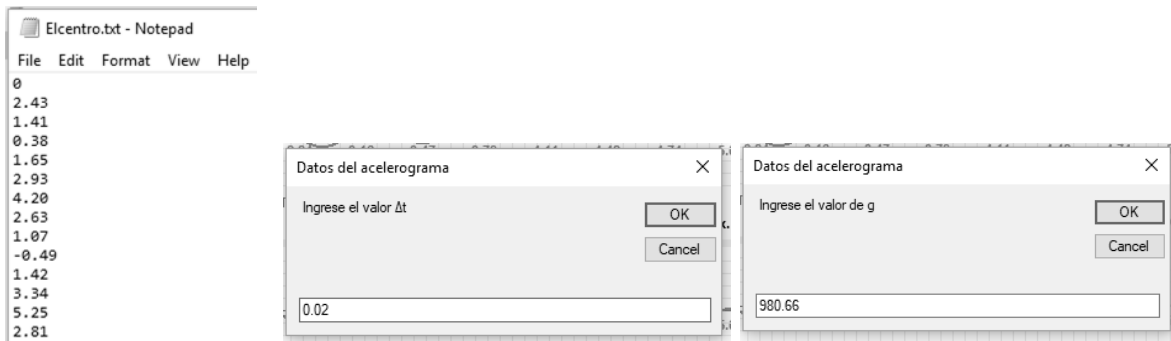


Figura 4.12 Ejemplo del formato de un registro de aceleraciones y los dos cuadros de dialogo donde se ingresan los parámetros adicionales para que el programa realice los cálculos.

4.2.2 Barra de menús (Resultados).

Este menú permite al usuario exportar los resultados del análisis en un archivo de datos “csv” con lo cual se tiene la posibilidad de trabajar en otro programa, por ejemplo, una hoja de cálculo.

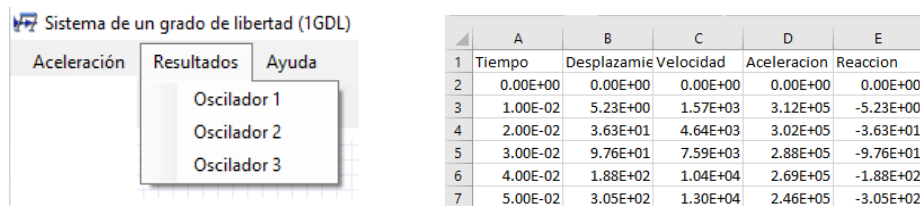


Figura 4.13 Opciones para exportar resultados y ejemplo de archivo exportado.

4.2.3 Gráficas.

En esta zona se presentan tres gráficas donde es posible mostrar la fuerza a la que fue sometido el oscilador y la respuesta de los osciladores en términos de: desplazamiento, velocidad, aceleración y reacción. Los resultados se calculan con el método numérico basado en la interpolación de la excitación (Chopra, 2014).

Adicionalmente se tienen la opción de establecer el rango a mostrar en la gráfica con respecto a la duración (segundos) y las unidades a etiquetar.

En la parte inferior derecha de cada grafica se muestra el valor máximo, mínimo y máximo absoluto de cada gráfica, de manera visual se muestra un punto rojo en la gráfica donde se presenta el valor máximo absoluto.



Figura 4.14 Zona de gráficas.

4.2.4 Osciladores.

En esta zona se presentan tres imágenes de los osciladores y se tiene la opción de mostrar la animación de acuerdo con la excitación a la que se sometieron. De manera visual se puede seleccionar entre un marco con viga rígida o flexible.

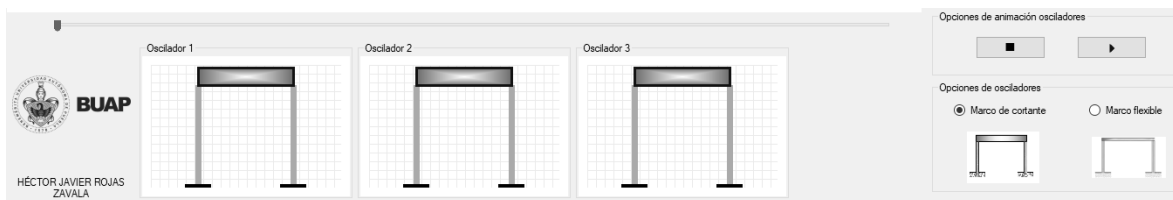


Figura 4.15 Zona de osciladores.

4.2.5 Ingreso de datos.

En esta zona se presentan las celdas donde el usuario ingresa las características dinámicas de los osciladores para realizar su análisis. El programa trabaja de manera predeterminada para tres osciladores.

Oscilador 1				
T (s)	ζ	k (lb/ft)	DO (ft)	VO (ft/s)
0.5	0.05	1	0	0
Oscilador 2				
T (s)	ζ	k (lb/ft)	DO (ft)	VO (ft/s)
1	0.00	100	0	0
Oscilador 3				
T (s)	ζ	k (lb/ft)	DO (ft)	VO (ft/s)
1	0.04	500	60	50

Figura 4.16 Zona de ingreso de datos.

4.2.6 Controladores.

Esta zona contiene opciones que permiten controlar el tipo de gráfica a mostrar en cada uno de los tres recuadros ubicados en la zona de gráficas y al mismo tiempo especificar con respecto a que oscilador en particular se desea mostrar.

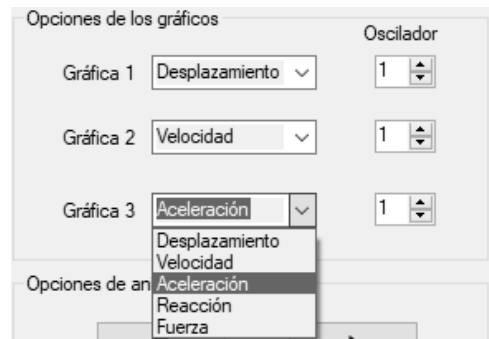


Figura 4.17 Zona de controladores.

4.3 Ejemplos desarrollados con un sistema de 1GDL.

Para comparar resultados se retomó el ejemplo mostrado en el capítulo "2.2.2 Sistemas sub-amortiguados" del libro de (Chopra, 2014). En este ejemplo se muestra la respuesta en términos de desplazamiento para cuatro osciladores con diferentes porcentajes de amortiguamiento.

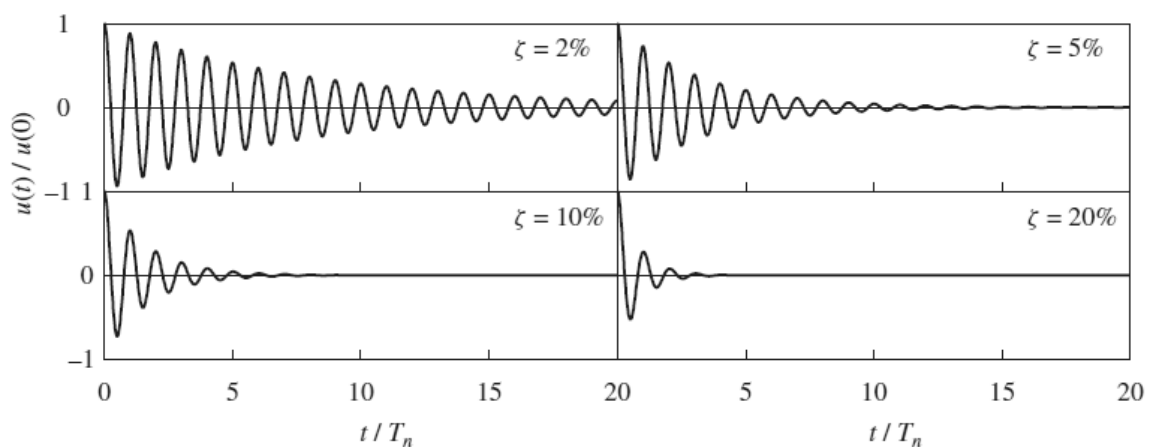


Figura 4.18 Gráfica del ejemplo retomado del libro de (Chopra, 2014).

Introduciendo los mismos parámetros en el programa se obtuvieron gráficas similares.

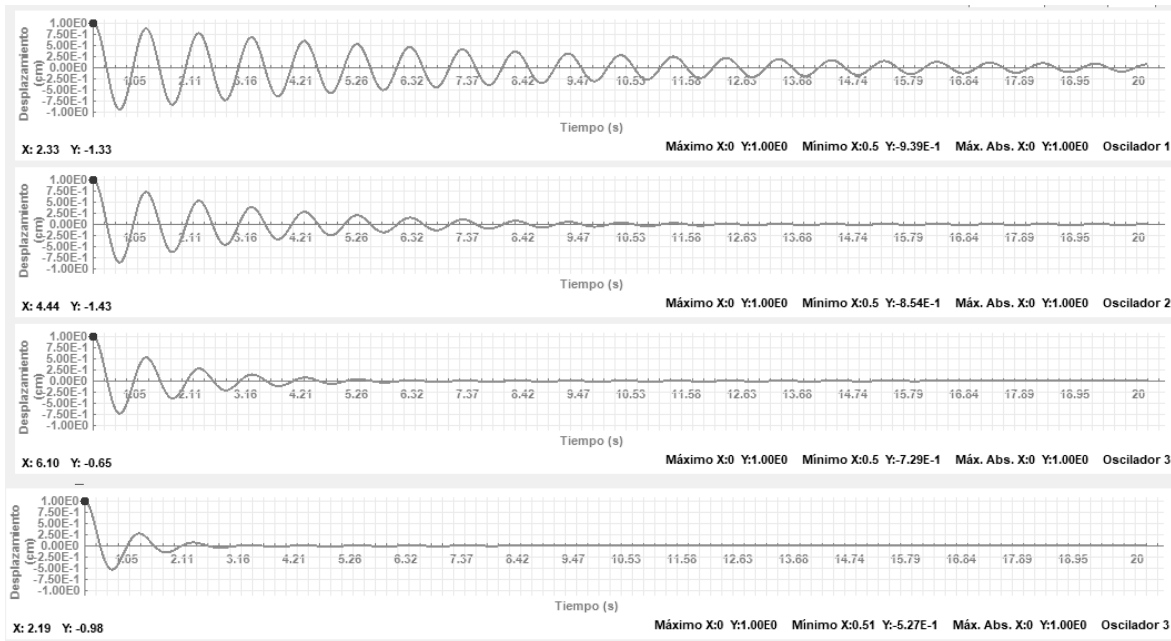


Figura 4.19 Gráficas obtenidas con el programa desarrollado.

Adicionalmente el programa permite mostrar con la animación de los osciladores el comportamiento para diferentes grados de amortiguamiento, lo cual se puede mostrar en clase.

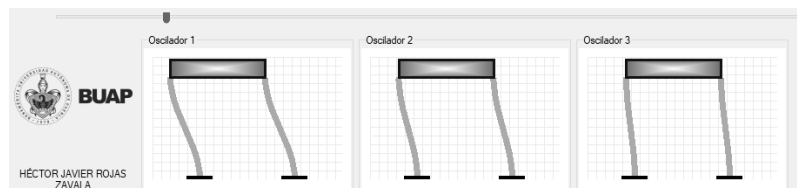


Figura 4.20 Movimiento de los tres osciladores.

Se realizó un segundo ejemplo para comparar resultados, para lo cual se retomó el ejemplo desarrollado en el capítulo “1.1.3 Vibración libre subamortiguada” del libro (Aguar Falconi, 2012).

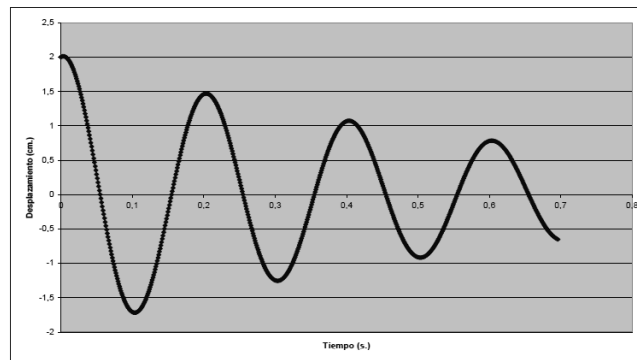


Figura 4.21 Gráfica del ejemplo retomado del libro de (Aguilar Falconi, 2012).

Introduciendo los mismos parámetros se obtuvieron gráficas similares con el programa desarrollado.

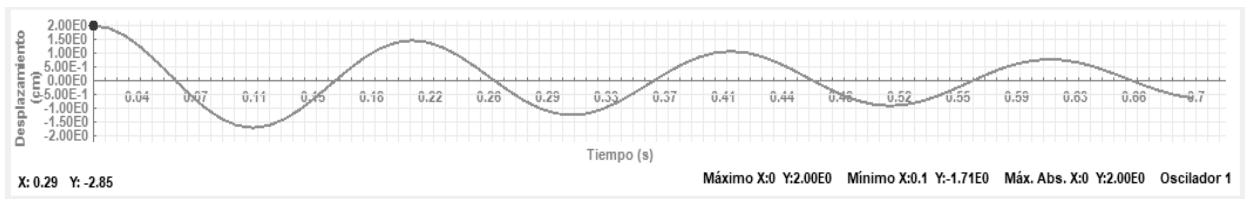


Figura 4.22 Gráfica obtenida con el programa desarrollado.

Finalmente se realizó una comparación para la respuesta de tres osciladores sometidos al mismo movimiento del terreno “El Centro”, ejemplo mostrado en el capítulo 6.4” Historia de la respuesta” del libro (Chopra, 2014).

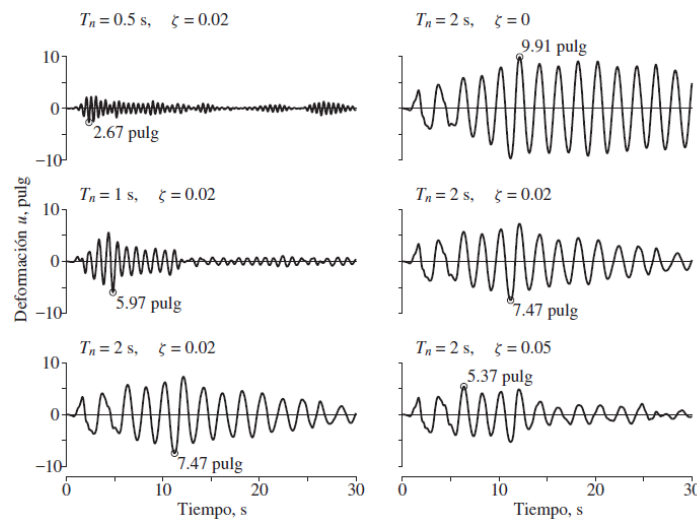


Figura 4.23 Gráficas incluidas en el libro (Chopra, 2014)..



De igual forma que en los ejemplos anteriores se ingresaron los mismos datos en el programa desarrollado con lo cual se obtuvieron los siguientes resultados.

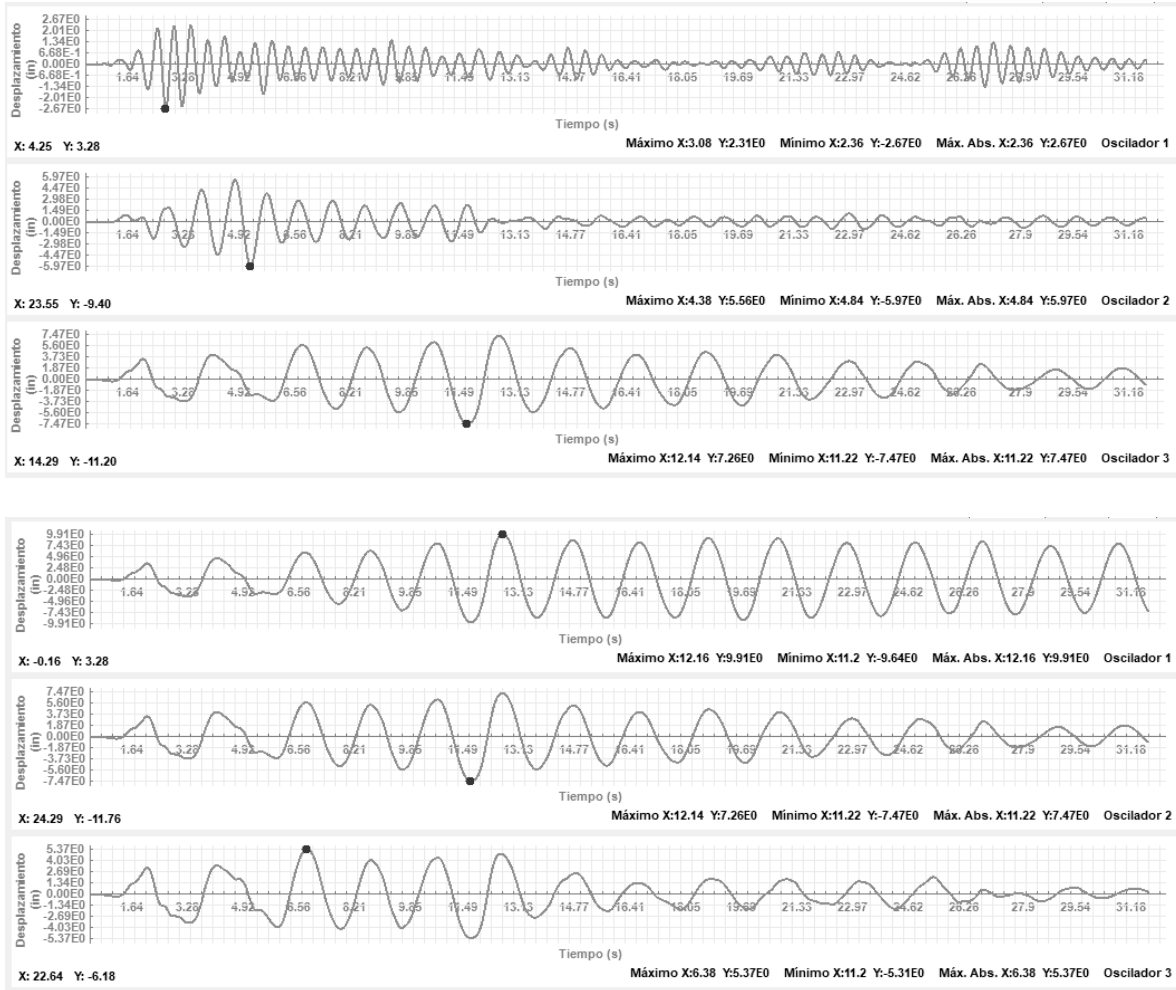


Figura 4.24 Gráficas de desplazamiento obtenidas con el programa desarrollado.

Los valores calculados por el programa de las respuestas máximas coinciden con los mostrados en el libro, como información adicional el programa proporciona el valor del tiempo (segundos) en el que ocurren estos valores máximos.

4.4 Sistema de múltiples grados de libertad (MGDL)

La pantalla inicial del programa para el sistema de múltiples grados de libertad se integra por dos zonas principales: barra de botones y zona de resultados.



Figura 4.25 Interfaz gráfica del programa (MGDL).

4.4.1 Datos.

Esta zona se ingresan los datos del sistema. El programa tiene tres opciones: edificio de cortante, marco flexible y matriz por el usuario.

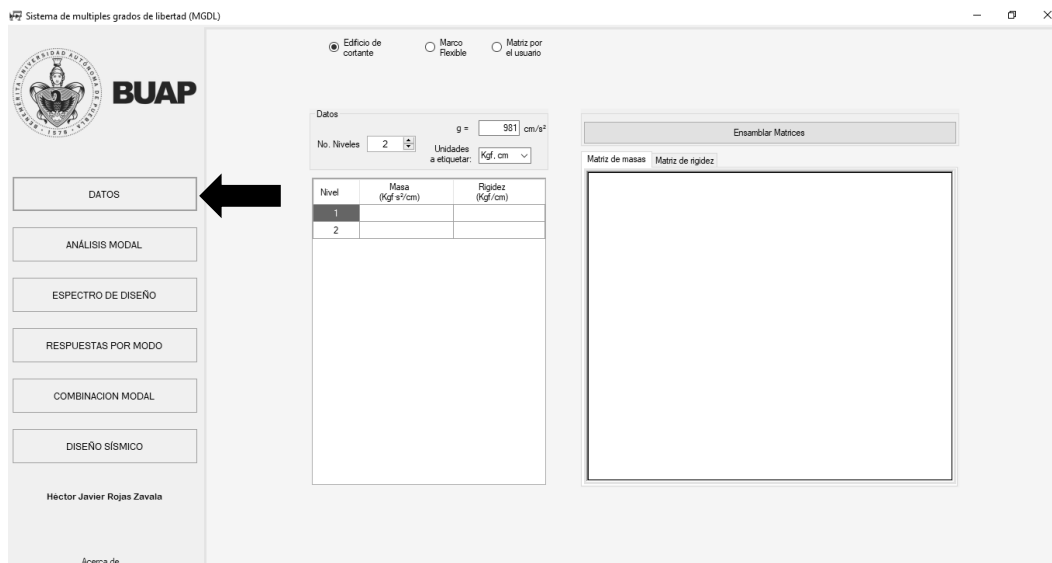


Figura 4.26 Formulario para los datos (MGDL).



Edificio de cortante
 Marco Flexible
 Matriz por el usuario

E= L=

Datos

g = cm/s²

No. Niveles Unidades a etiquetar:

Nivel	Masa (Kgf s ² /cm)	Altura (cm)	Inercia de vigas (cm ⁴)	Inercia de Columnas (cm ⁴)
1				
2				

Figura 4.28 Tabla para el ingreso de datos cuando la opción de “Marco flexible” esta activada.

Al presionar el botón “Ensamblar matrices” el programa muestra en las pestañas la matriz de masas ensamblada con el mismo algoritmo que la opción anterior, sin embargo, el ensamble de la matriz de rigidez se realiza utilizando el método de condensación estática, el programa funciona para marcos planos de un solo claro (dos columnas y una viga por nivel) y “n” número de niveles, el procedimiento no considera las deformaciones axiales.

$$Matriz\ global = \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{ps} \\ k_{sp} & k_{ss} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$Matriz\ condensada = \mathbf{k} = k_{pp} - k_{ps} \cdot k_{ss}^{-1} \cdot k_{sp} \tag{4.4}$$

El ensamble de la matriz de masas es igual al de la opción anterior.

La tercera opción “Matriz por el usuario” permite al usuario ingresar la matriz de rigidez en la pestaña “Matriz de rigidez”, el usuario puede calcular la matriz condensada para diferentes configuraciones de marcos y luego introducir los datos.

Edificio de cortante
 Marco Flexible
 Matriz usuario

Datos

g = cm/s²

No. Niveles Unidades a etiquetar:

Nivel	Masa (Kgf s ² /cm)
1	
2	
3	
4	

Ensamblar Matrices

Matriz de masas Matriz de rigidez

0.00E0	0.00E0	0.00E0	0.00E0
0.00E0	0.00E0	0.00E0	0.00E0
0.00E0	0.00E0	0.00E0	0.00E0
0.00E0	0.00E0	0.00E0	0.00E0

Figura 4.29 Tabla para el ingreso de datos cuando la opción de “Matriz por el usuario” esta activada

4.4.2 Análisis modal

En este formulario se muestran los resultados del análisis modal en dos grupos: “Matrices” y “Vectores” y adicionalmente una gráfica de las “Formas Modales”.

Matrices:

- Matriz modal
- Matriz Ω
- Matriz espectral Ω^2
- Matriz de masa generalizada
- Matriz de rigidez generalizada
- Matriz ΦN

Vectores:

- Eigen valores (ω^2)
- Periodos (T)
- Frecuencia circular (ω)
- Frecuencia cíclica (f)
- Factor de participación modal
- Factor de participación modal normalizado con la matriz de masa
- Factor de participación de masa modal

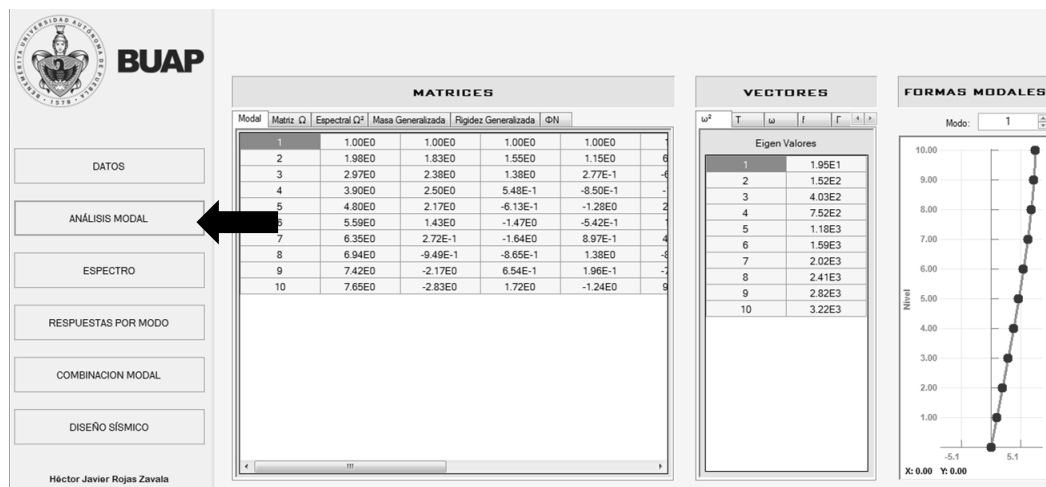


Figura 4.30 Pantalla de resultados del análisis modal (MGDL).

4.4.3 Espectro

En este formulario se ingresan los datos del espectro de diseño para realizar el análisis modal espectral (es posible ingresar un espectro de respuesta de pseudo-aceleración normalizado con respecto a la aceleración de la gravedad “g”).

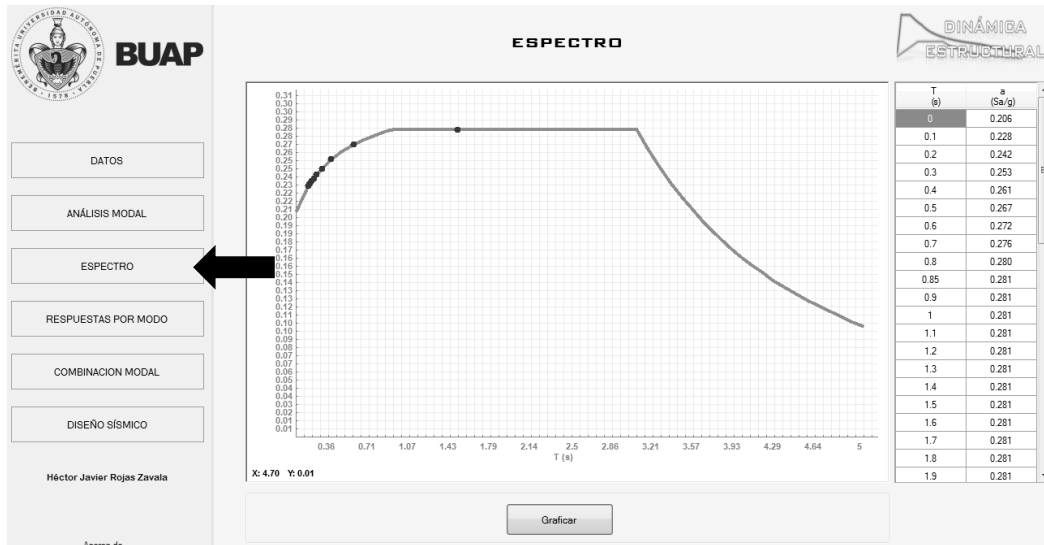


Figura 4.31 Pantalla de ingreso de datos del espectro de diseño (MGDL).

4.4.4 Respuestas por modo

En esta pantalla se muestran los resultados del análisis modal espectral en dos grupos. En el primero se muestran los resultados para cada modo con los datos retomados de la gráfica del espectro de diseño:

- Periodo
- Pseudo-aceleración normalizada con respecto a “g”
- Pseudo-aceleración
- Desplazamiento espectral

En el segundo grupo se muestran las respuestas por cada modo:

- Desplazamientos totales
- Desplazamientos relativos
- Cortantes
- Fuerzas laterales

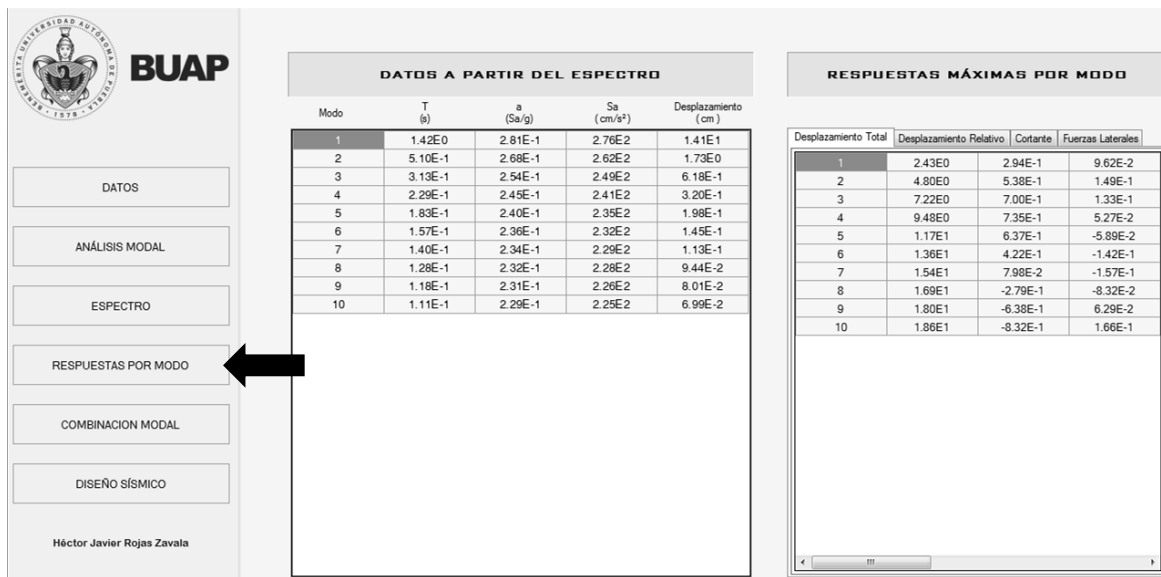


Figura 4.32 Pantalla de resultado de las respuestas por modo (MGDL).

4.4.5 Combinación modal

En esta pantalla el usuario tiene la opción de elegir la combinación modal de todas las respuestas de cada modo:

- La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS)
- La suma cuadrática completa (CQC)
- La suma de los valores absolutos (ABSSUM)

Adicionalmente se muestran las gráficas para cada respuesta: desplazamiento total, desplazamiento relativo y fuerza cortante.

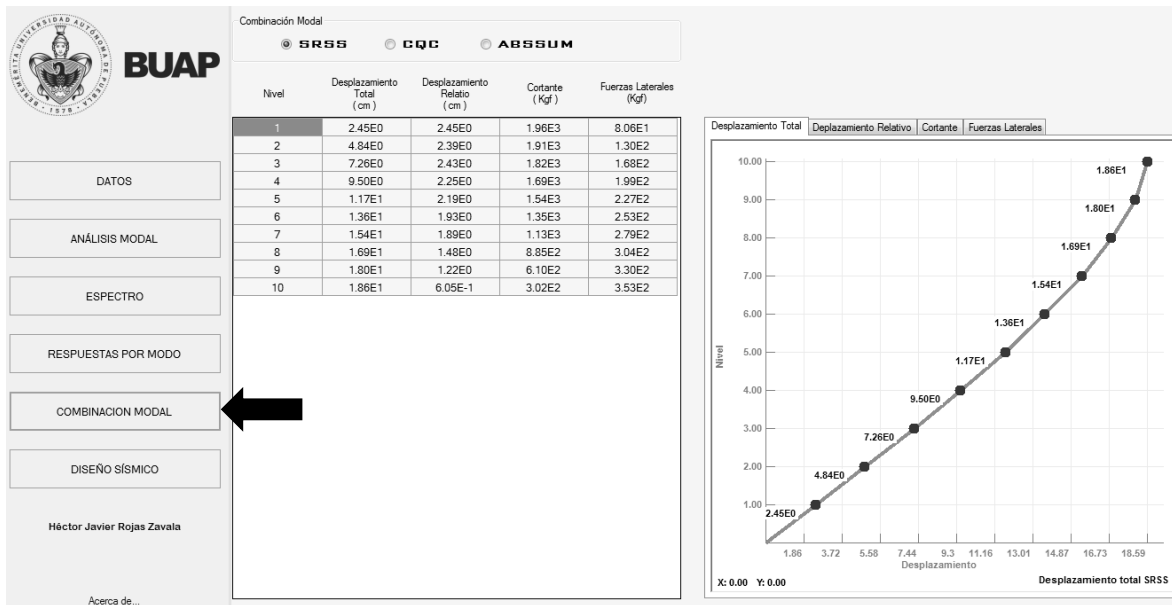


Figura 4.33 Pantalla de selección para la regla de combinación modal (MGDL).

4.4.6 Diseño sísmico

Esta pantalla se divide en dos zonas, en la primera se muestra la revisión del cortante mínimo con respecto al cortante basal calculado y de acuerdo con la combinación seleccionada. El programa muestra inicialmente el valor del cortante mínimo como 80% del peso total de la estructura, sin embargo, el usuario puede ingresar el valor basal mínimo de acuerdo con la reglamentación que ocupe, el programa automáticamente evalúa si el cortante calculado cumple con esta condición.

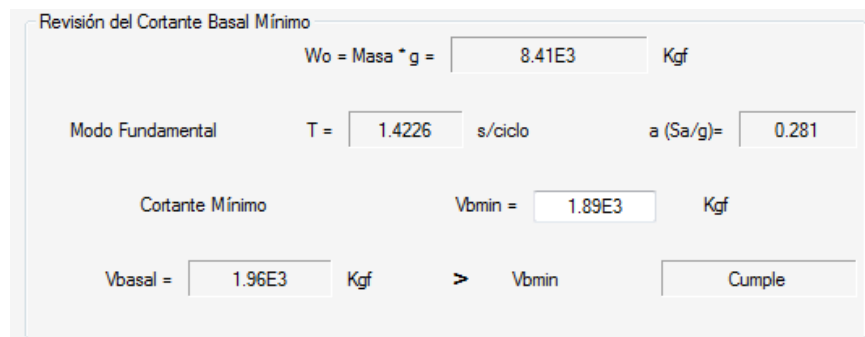


Figura 4.34 Revisión del cortante basal mínimo (MGDL).

En la segunda zona el usuario puede indicar el valor del factor “Q” para calcular los desplazamientos finales y con estos datos se deberá realizar la revisión de la distorsión máxima reglamentaria.

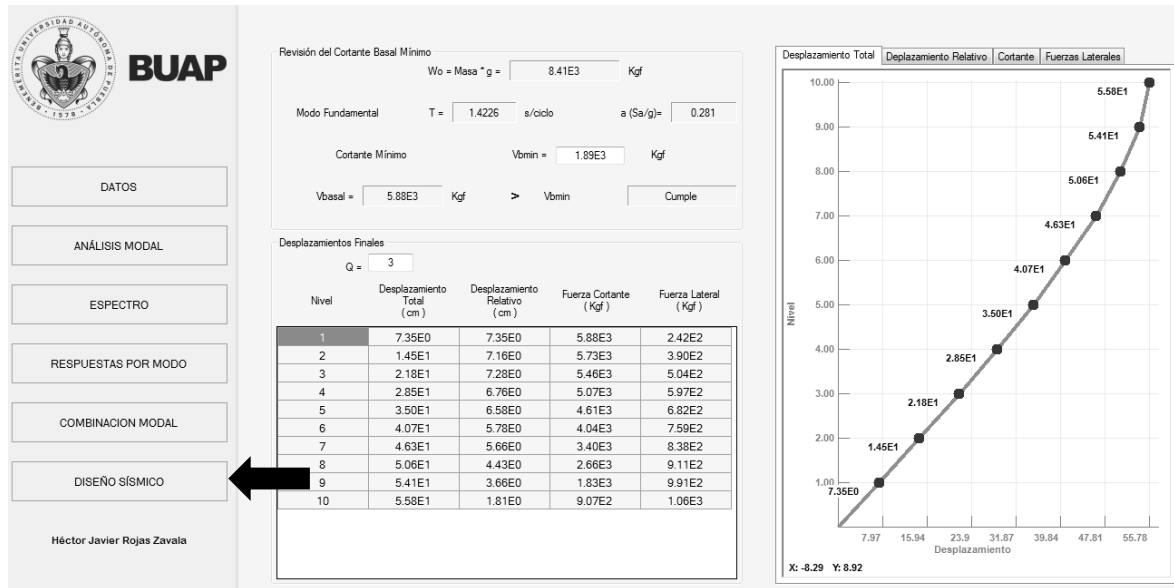


Figura 4.35 Pantalla de diseño sísmico. Cálculo de los desplazamientos finales (MGDL).

4.5 Ejemplos desarrollados con un sistema de MGDL

Ejemplo 1.

Para validar resultados se retomó el ejemplo mostrado en el capítulo “3.3 Sistemas lineales de varios grados de libertad sin torsión” del libro (Meli & Bazán, 2008).

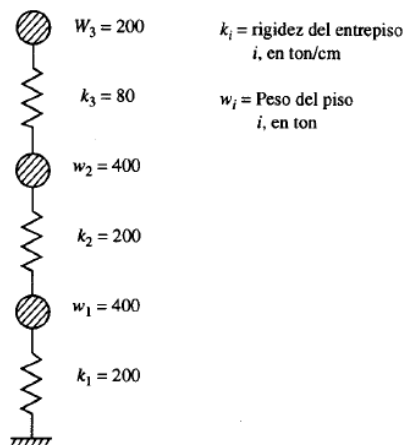


Figura 4.36 Datos del ejemplo retomado del libro (Meli & Bazán, 2008).



Se ingresan los datos iniciales y se comparan los resultados.

Análisis modal	
Libro	Programa
$\mathbf{K} = 80 \begin{bmatrix} 5.0 & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$	
$\omega_1^2 = 122.0,$ $\omega_2^2 = 562.4,$ $\omega_3^2 = 1375.2,$	
$\omega_1 = 11.05 \text{ seg}^{-1},$ $\omega_2 = 23.71 \text{ seg}^{-1},$ $\omega_3 = 37.08 \text{ seg}^{-1},$	
$T_1 = 0.5686 \text{ seg}$ $T_2 = 0.2650 \text{ seg}$ $T_3 = 0.1694 \text{ seg}$	
$\mathbf{Z}_1 = \begin{Bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{Z}_2 = \begin{Bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \\ z_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{Z}_3 = \begin{Bmatrix} z_{13} \\ z_{23} \\ z_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.804 \\ 0.321 \end{Bmatrix}$	



El ejemplo continua en el capítulo “7.3.3”

Análisis modal																										
Libro	Programa																									
$\mathbf{Z}_1 = \begin{Bmatrix} 0.580 \\ 1.015 \\ 1.473 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{Z}_2 = \begin{Bmatrix} 0.818 \\ 0.698 \\ -1.610 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{Z}_3 = \begin{Bmatrix} 1.202 \\ -0.966 \\ 0.386 \end{Bmatrix}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Modal</th> <th>Matriz Ω</th> <th>Espectral Ω^2</th> <th>Masa Generalizada</th> <th>Rigidez Generalizada</th> <th>ΦN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>5.80E-1</td> <td>8.20E-1</td> <td>1.20E0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td>1.02E0</td> <td>6.99E-1</td> <td>-9.66E-1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td>1.47E0</td> <td>-1.61E0</td> <td>3.86E-1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Modal	Matriz Ω	Espectral Ω^2	Masa Generalizada	Rigidez Generalizada	ΦN	1		5.80E-1	8.20E-1	1.20E0		2		1.02E0	6.99E-1	-9.66E-1		3		1.47E0	-1.61E0	3.86E-1		
Modal	Matriz Ω	Espectral Ω^2	Masa Generalizada	Rigidez Generalizada	ΦN																					
1		5.80E-1	8.20E-1	1.20E0																						
2		1.02E0	6.99E-1	-9.66E-1																						
3		1.47E0	-1.61E0	3.86E-1																						
$p_1 = 0.9508$ $p_2 = 0.2896$ $p_3 = 0.1747$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>ω</th> <th>f</th> <th>Γ</th> <th>ΓN</th> <th>ΓN^2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="5">Factor de participación modal normalizado con la matriz de masa</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>9.51E-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td>2.91E-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td>1.75E-1</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	ω	f	Γ	ΓN	ΓN^2	Factor de participación modal normalizado con la matriz de masa					1		9.51E-1			2		2.91E-1			3		1.75E-1		
ω	f	Γ	ΓN	ΓN^2																						
Factor de participación modal normalizado con la matriz de masa																										
1		9.51E-1																								
2		2.91E-1																								
3		1.75E-1																								

Análisis modal espectral																
Libro	Programa															
$A_1 = A_2 = 0.24 \times 981/4.00 = 58.9 \text{ cm/seg}^2$ $A_3 = 0.212 \times 981/3.535 = 58.9 \text{ cm/seg}^2$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Modo</th> <th>T (s)</th> <th>Sa (cm/s²)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>5.69E-1</td> <td>5.89E 1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2.65E-1</td> <td>5.89E 1</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1.69E-1</td> <td>5.89E 1</td> </tr> </tbody> </table>	Modo	T (s)	Sa (cm/s ²)	1	5.69E-1	5.89E 1	2	2.65E-1	5.89E 1	3	1.69E-1	5.89E 1			
Modo	T (s)	Sa (cm/s ²)														
1	5.69E-1	5.89E 1														
2	2.65E-1	5.89E 1														
3	1.69E-1	5.89E 1														
$\mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2662 \\ 0.4661 \\ 0.6763 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} 0.0247 \\ 0.0211 \\ -0.0487 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{U}_3 = \begin{Bmatrix} 0.0090 \\ -0.0072 \\ 0.0029 \end{Bmatrix}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Desplazamiento Total</th> <th>Desplazamiento Relativo</th> <th>Cortante</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2.66E-1</td> <td>2.50E-2</td> <td>9.00E-3</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4.66E-1</td> <td>2.13E-2</td> <td>-7.23E-3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>6.76E-1</td> <td>-4.90E-2</td> <td>2.89E-3</td> </tr> </tbody> </table>	Desplazamiento Total	Desplazamiento Relativo	Cortante	1	2.66E-1	2.50E-2	9.00E-3	2	4.66E-1	2.13E-2	-7.23E-3	3	6.76E-1	-4.90E-2	2.89E-3
Desplazamiento Total	Desplazamiento Relativo	Cortante														
1	2.66E-1	2.50E-2	9.00E-3													
2	4.66E-1	2.13E-2	-7.23E-3													
3	6.76E-1	-4.90E-2	2.89E-3													



Libro	Programa																
$\delta U_1 = \begin{Bmatrix} 0.2662 \\ 0.1999 \\ 0.2103 \end{Bmatrix}$ $\delta U_2 = \begin{Bmatrix} 0.0247 \\ -0.0036 \\ -0.0698 \end{Bmatrix}$ $\delta U_3 = \begin{Bmatrix} 0.0090 \\ -0.0162 \\ 0.0101 \end{Bmatrix}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Desplazamiento Total</th> <th>Desplazamiento Relativo</th> <th colspan="2">Cortante</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2.66E-1</td> <td>2.50E-2</td> <td>9.00E-3</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2.00E-1</td> <td>-3.68E-3</td> <td>-1.62E-2</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>2.10E-1</td> <td>-7.03E-2</td> <td>1.01E-2</td> </tr> </tbody> </table>	Desplazamiento Total	Desplazamiento Relativo	Cortante		1	2.66E-1	2.50E-2	9.00E-3	2	2.00E-1	-3.68E-3	-1.62E-2	3	2.10E-1	-7.03E-2	1.01E-2
Desplazamiento Total	Desplazamiento Relativo	Cortante															
1	2.66E-1	2.50E-2	9.00E-3														
2	2.00E-1	-3.68E-3	-1.62E-2														
3	2.10E-1	-7.03E-2	1.01E-2														
$V_{11} = 200 \times 0.2662 = 53.23 \text{ ton}$ $V_{21} = 200 \times 0.1999 = 39.98 \text{ ton}$ $V_{31} = 80 \times 0.2103 = 16.82 \text{ ton}$ $V_{12} = 200 \times 0.0247 = 4.95 \text{ ton}$ $V_{22} = -200 \times 0.0036 = -0.73 \text{ ton}$ $V_{32} = -80 \times 0.0698 = -5.58 \text{ ton}$ $V_{13} = 200 \times 0.0090 = 1.80 \text{ ton}$ $V_{23} = -200 \times 0.0162 = -3.25 \text{ ton}$ $V_{33} = 80 \times 0.0101 = 0.81 \text{ ton}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Desplazamiento Total</th> <th>Desplazamiento Relativo</th> <th colspan="2">Cortante</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>5.32E1</td> <td>4.99E0</td> <td>1.80E0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4.00E1</td> <td>-7.37E-1</td> <td>-3.25E0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1.68E1</td> <td>-5.62E0</td> <td>8.10E-1</td> </tr> </tbody> </table>	Desplazamiento Total	Desplazamiento Relativo	Cortante		1	5.32E1	4.99E0	1.80E0	2	4.00E1	-7.37E-1	-3.25E0	3	1.68E1	-5.62E0	8.10E-1
Desplazamiento Total	Desplazamiento Relativo	Cortante															
1	5.32E1	4.99E0	1.80E0														
2	4.00E1	-7.37E-1	-3.25E0														
3	1.68E1	-5.62E0	8.10E-1														
$u_1 = \sqrt{0.2662^2 + 0.0247^2 + 0.0090^2} = 0.2675 \text{ cm}$ $u_2 = \sqrt{0.4661^2 + 0.0211^2 + 0.0072^2} = 0.4666 \text{ cm}$ $u_3 = \sqrt{0.6763^2 + 0.0487^2 + 0.0029^2} = 0.6781 \text{ cm}$ $\delta_1 = \sqrt{0.2662^2 + 0.0247^2 + 0.0090^2} = 0.2675 \text{ cm}$ $\delta_2 = \sqrt{0.1999^2 + 0.0036^2 + 0.0162^2} = 0.2006 \text{ cm}$ $\delta_3 = \sqrt{0.2103^2 + 0.0698^2 + 0.0101^2} = 0.2218 \text{ cm}$ $V_1 = \sqrt{53.23^2 + 4.95^2 + 1.80^2} = 53.49 \text{ ton}$ $V_2 = \sqrt{39.98^2 + 0.73^2 + 3.25^2} = 40.12 \text{ ton}$ $V_3 = \sqrt{16.82^2 + 5.58^2 + 0.81^2} = 17.74 \text{ ton}$	<p>Combinación Modal</p> <p><input checked="" type="radio"/> SRSS <input type="radio"/> CQC <input type="radio"/> ABSUM</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nivel</th> <th>Desplazamiento Total (cm)</th> <th>Desplazamiento Relativo (cm)</th> <th>Fuerza Cortante (Tonf)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2.67E-1</td> <td>2.67E-1</td> <td>5.35E1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4.67E-1</td> <td>2.01E-1</td> <td>4.01E1</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>6.78E-1</td> <td>2.22E-1</td> <td>1.77E1</td> </tr> </tbody> </table>	Nivel	Desplazamiento Total (cm)	Desplazamiento Relativo (cm)	Fuerza Cortante (Tonf)	1	2.67E-1	2.67E-1	5.35E1	2	4.67E-1	2.01E-1	4.01E1	3	6.78E-1	2.22E-1	1.77E1
Nivel	Desplazamiento Total (cm)	Desplazamiento Relativo (cm)	Fuerza Cortante (Tonf)														
1	2.67E-1	2.67E-1	5.35E1														
2	4.67E-1	2.01E-1	4.01E1														
3	6.78E-1	2.22E-1	1.77E1														



Diseño sísmico													
Libro	Programa												
$V_{\min} = 0.8(0.24 \times 1000)/4 = 48 \text{ ton.}$ $V = 53.49 \text{ ton, mayor que } V_{\min}$	<p>Revisión del Cortante Basal Mínimo</p> <p>Wo = Masa * g = 1.00E3 Tonf</p> <p>Modo Fundamental T = 0.569 s/ciclo a (Sa/g)= 0.06</p> <p>Cortante Mínimo Vbmin = 4.80E1 Tonf</p> <p>Vbasal = 5.35E1 Tonf > Vbmin Cumple</p>												
$Q = 4,$ $u_1 = 0.2675 \times 4 = 1.07 \text{ cm}$ $u_2 = 0.4666 \times 4 = 1.87 \text{ cm}$ $u_3 = 0.6781 \times 4 = 2.71 \text{ cm}$ $\delta_1 = 0.2675 \times 4 = 1.07 \text{ cm}$ $\delta_2 = 0.2006 \times 4 = 0.80 \text{ cm}$ $\delta_3 = 0.2218 \times 4 = 0.89 \text{ cm}$	<p>Desplazamientos Finales</p> <p>Q = 4</p> <table border="1"><thead><tr><th>Nivel</th><th>Desplazamiento Total (cm)</th><th>Desplazamiento Relativo (cm)</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>1.07E0</td><td>1.07E0</td></tr><tr><td>2</td><td>1.87E0</td><td>8.02E-1</td></tr><tr><td>3</td><td>2.71E0</td><td>8.87E-1</td></tr></tbody></table>	Nivel	Desplazamiento Total (cm)	Desplazamiento Relativo (cm)	1	1.07E0	1.07E0	2	1.87E0	8.02E-1	3	2.71E0	8.87E-1
Nivel	Desplazamiento Total (cm)	Desplazamiento Relativo (cm)											
1	1.07E0	1.07E0											
2	1.87E0	8.02E-1											
3	2.71E0	8.87E-1											

Como se observa los resultados son prácticamente iguales entre los mostrados en el libro y los obtenidos con el programa desarrollado.



Ejemplo 2.

Se retoma el ejemplo 13.8.2 “Marco de cortante de cinco niveles” del libro (Chopra, 2014). Debido a que el libro solo muestra algunos resultados, este mismo ejemplo se resolvió de manera manual con ayuda de una hoja de cálculo del programa Mathcad 15.0. Con el objetivo de validar todos los datos que muestra el programa y adicionalmente ilustrar las ventajas que tiene el programa con respecto al proceso manual.

1) Datos iniciales:

Libro:

Propiedades del sistema. La masa concentrada $m_j = m = 100$ kips/g en cada nivel, la rigidez lateral de cada entrepiso es $k_j = k = 31.54$ kips/pulg.

Las matrices de masa y rigidez de la estructura son

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hoja de cálculo:

<p>Masas por nivel</p> $\underline{\underline{m}} := \begin{pmatrix} 100 \\ \text{g} \\ 100 \\ \text{g} \\ 100 \\ \text{g} \\ 100 \\ \text{g} \\ 100 \\ \text{g} \\ 100 \\ \text{g} \end{pmatrix}$	<p>Masa total</p> $MT := \sum m = 1.295$	<p>Rigideces de entrepiso</p> $\underline{\underline{k}} := \begin{pmatrix} 31.54 \\ 31.54 \\ 31.54 \\ 31.54 \\ 31.54 \end{pmatrix}$
<p>Matriz de masas</p> $\underline{\underline{M}} := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.259 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.259 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.259 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.259 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.259 \end{pmatrix}$		
<p>Matriz de rigidez</p> $\underline{\underline{K}} := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63.08 & -31.54 & 0 & 0 & 0 \\ -31.54 & 63.08 & -31.54 & 0 & 0 \\ 0 & -31.54 & 63.08 & -31.54 & 0 \\ 0 & 0 & -31.54 & 63.08 & -31.54 \\ 0 & 0 & 0 & -31.54 & 31.54 \end{pmatrix}$		



Programa:

Datos

No. Niveles: 5 g = 386.22 in/s²

Unidades a etiquetar: Kip. in

Nivel	Masa (Kip s ² /in)	Rigidez (Kip/in)
1	0.25892	31.54
2	0.25892	31.54
3	0.25892	31.54
4	0.25892	31.54
5	0.25892	31.54

Ensamblar Matrices

Matriz de masas		Matriz de rigidez		
6.31E1	-3.15E1	0.00E0	0.00E0	0.00E0
-3.15E1	6.31E1	-3.15E1	0.00E0	0.00E0
0.00E0	-3.15E1	6.31E1	-3.15E1	0.00E0
0.00E0	0.00E0	-3.15E1	6.31E1	-3.15E1
0.00E0	0.00E0	0.00E0	-3.15E1	3.15E1

2) Análisis modal:

Libro:

$$T_n = 2.0, 0.685\bar{2}, 0.4346, 0.3383 \text{ y } 0.2966 \text{ s.}$$

Hoja de cálculo:

Vector de frecuencias circulares

$$\omega := \begin{pmatrix} 3.14144 \\ 9.16981 \\ 14.45530 \\ 18.56971 \\ 21.17971 \end{pmatrix}$$

Vector de eigen valores

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 9.869 \\ 84.085 \\ 208.956 \\ 344.834 \\ 448.58 \end{pmatrix}$$

Vector de periodos

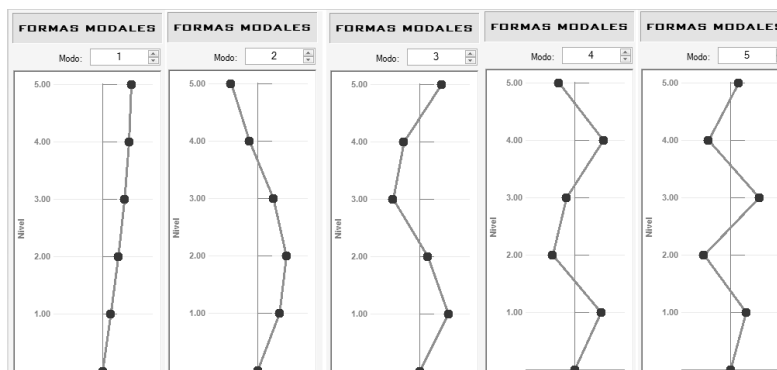
$$T_{\omega\omega} := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.685 \\ 0.435 \\ 0.338 \\ 0.297 \end{pmatrix}$$

Vector de frecuencias cíclicas

$$f := \frac{1}{T} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.459 \\ 2.301 \\ 2.955 \\ 3.371 \end{pmatrix}$$

Programa:

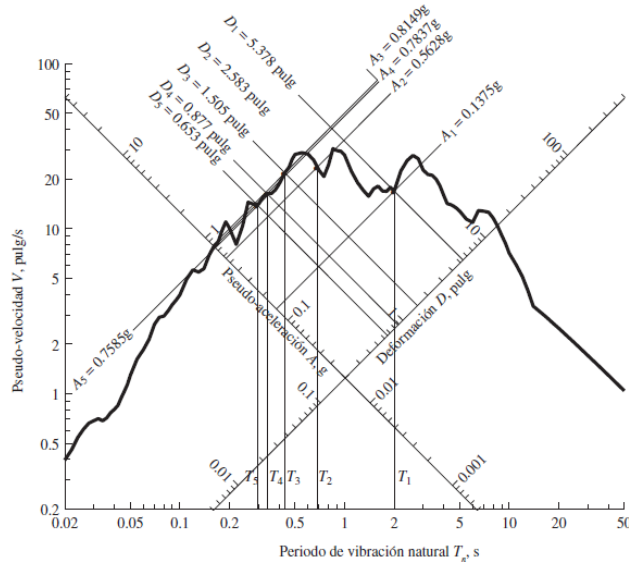
ω^2	T	ω	f	Γ	ω^2	T	ω	f	Γ	ω^2	T	ω	f	Γ	ω^2	T	ω	f	Γ
Frecuencia Circular (rad/s)																			
1		3.14E0			1		9.87E0			1		2.00E0			1		5.00E-1		
2		9.17E0			2		8.41E1			2		6.85E-1			2		1.46E0		
3		1.45E1			3		2.09E2			3		4.35E-1			3		2.30E0		
4		1.86E1			4		3.45E2			4		3.38E-1			4		2.96E0		
5		2.12E1			5		4.49E2			5		2.97E-1			5		3.37E0		





3) Ordenadas del espectro de respuesta:

Libro:



Hoja de cálculo:

Periodo	Pseudo-aceleración normalizada	Pseudo-aceleración espectral	Desplazamiento espectral
$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.685 \\ 0.435 \\ 0.338 \\ 0.297 \end{pmatrix} \text{ s/ciclo}$	$a := \begin{pmatrix} 0.1375 \\ 0.5628 \\ 0.8149 \\ 0.7837 \\ 0.7585 \end{pmatrix}$	$S_a := a \cdot g = \begin{pmatrix} 53.1053 \\ 217.3646 \\ 314.7307 \\ 302.6806 \\ 292.9479 \end{pmatrix} \text{ in/s}^2$	$D := \frac{S_a}{\omega^2} = \begin{pmatrix} 5.381 \\ 2.585 \\ 1.506 \\ 0.878 \\ 0.653 \end{pmatrix} \text{ in}$

Programa:

El libro trabaja con un espectro de Pseudo-velocidad y el programa utiliza un espectro de Pseudo-aceleración normalizado con respecto a “g” para el sismo “El Centro”.





DATOS A PARTIR DEL ESPECTRO				
Modo	T (s)	a (Sa/g)	Sa (in/s ²)	Desplazamiento (in)
1	2.00E0	1.38E-1	5.31E1	5.38E0
2	6.85E-1	5.62E-1	2.17E2	2.58E0
3	4.35E-1	8.14E-1	3.14E2	1.50E0
4	3.38E-1	7.84E-1	3.03E2	8.78E-1
5	2.97E-1	7.60E-1	2.94E2	6.55E-1

Los valores de los resultados son prácticamente iguales. Con la ventaja de que el programa obtiene la ordenada espectral de manera automática a partir de los datos del espectro y los periodos de los modos, mientras que la hoja de cálculo y el libro se obtienen de una lectura manual de las gráficas.

4) Respuestas modales máximas:

Libro:

$$u_1 = \Gamma_1 \phi_1 D_1 = 1.067 \begin{Bmatrix} 0.334 \\ 0.641 \\ 0.895 \\ 1.078 \\ 1.173 \end{Bmatrix} 5.378 = \begin{Bmatrix} 1.916 \\ 3.677 \\ 5.139 \\ 6.188 \\ 6.731 \end{Bmatrix} \text{ pulg} \quad f_1 = s_1 A_1 = \begin{Bmatrix} 0.356 m \\ 0.684 m \\ 0.956 m \\ 1.150 m \\ 1.252 m \end{Bmatrix} 0.1375 g = \begin{Bmatrix} 4.899 \\ 9.401 \\ 13.141 \\ 15.817 \\ 17.211 \end{Bmatrix} \text{ kips}$$

Hoja de cálculo:

$$u1 := \phi_1 \cdot \Gamma_1 \cdot D_1 = \begin{Bmatrix} 1.917 \\ 3.679 \\ 5.143 \\ 6.19 \\ 6.736 \end{Bmatrix} \quad f1 := \Gamma_1 \cdot m_1 \cdot \phi_1 \cdot a_1 \cdot g = \begin{Bmatrix} 4.899 \\ 9.401 \\ 13.141 \\ 15.817 \\ 17.211 \end{Bmatrix}$$

Programa:

Desplazamiento Total		Desplazamiento Rel		Fuerzas Laterales	
1	1.92E0	1	4.90E0	1	4.90E0
2	3.68E0	2	9.40E0	2	9.40E0
3	5.14E0	3	1.31E1	3	1.31E1
4	6.19E0	4	1.58E1	4	1.58E1
5	6.74E0	5	1.72E1	5	1.72E1



5) Combinación modal de los valores de respuesta máximos:

Libro:

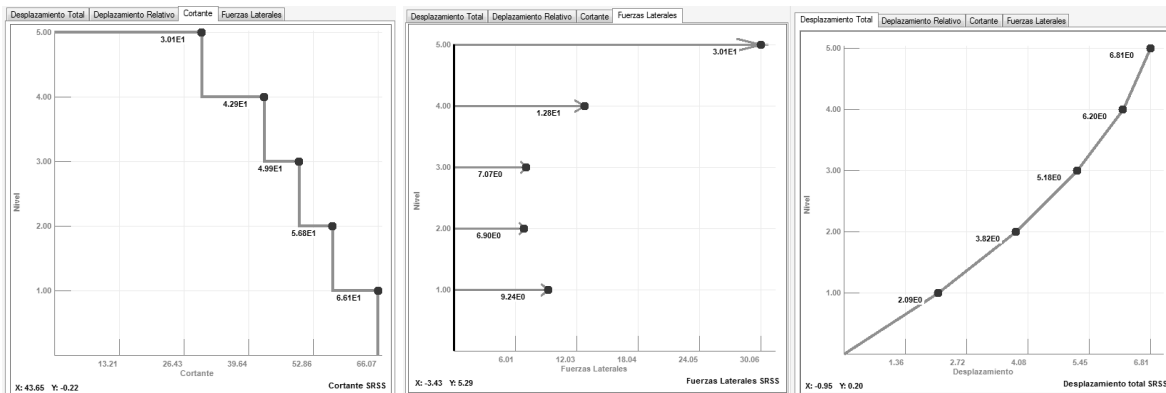
	V_b (kips)	V_5 (kips)	u_5 (pulg)
ABSSUM	98.407	56.608	7.971
SRSS	66.066	30.074	6.800
CQC	66.507	29.338	6.793

Hoja de cálculo:

ABSSUM	VA1 = 98.403	FA5 = 56.607	UA5 = 7.976
SRSS	V1 = 66.064	F5 = 30.074	U5 = 6.805
CQC	VC1 = 66.499	FC5 = 29.345	UC5 = 6.798

Programa:

	Cortante (Kip)	Cortante (Kip)	Desplazamiento Total (in)
<input checked="" type="radio"/> ABSSUM	9.84E1	5.66E1	7.98E0
<input checked="" type="radio"/> SRSS	6.61E1	3.01E1	6.81E0
<input checked="" type="radio"/> CQC	6.65E1	2.93E1	6.80E0



Para el cálculo de los valores máximos “...no es correcto calcular el valor máximo combinado de una cantidad de respuesta a partir de los valores máximos combinados de otras cantidades de respuesta. Del mismo modo, es erróneo calcular



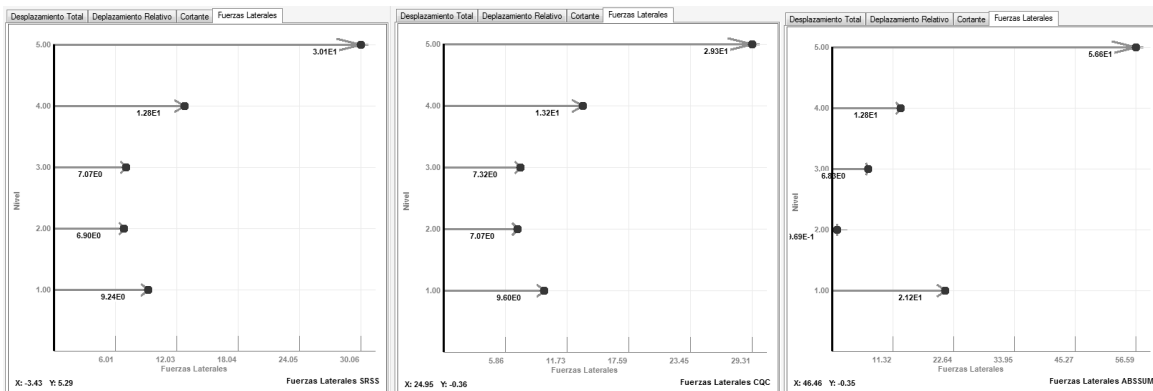
el valor máximo combinado de una fuerza interna a partir de los valores máximos combinados de otras fuerzas. En particular, es incorrecto determinar los cortantes por entrepiso o los momentos de volteo para cada nivel a partir de los valores máximos combinados de las fuerzas estáticas equivalentes.”

Programa:

SRSS

CQC

ABSSUM



Hoja de cálculo:

SRSS

CQC

ABSSUM

$$F_{equir} := \begin{pmatrix} V1 - V2 \\ V2 - V3 \\ V3 - V4 \\ V4 - V5 \\ V5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.257 \\ 6.889 \\ 7.052 \\ 12.793 \\ 30.074 \end{pmatrix}$$

$$F_{Ceq} := \begin{pmatrix} VC1 - VC2 \\ VC2 - VC3 \\ VC3 - VC4 \\ VC4 - VC5 \\ VC5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.57 \\ 7.046 \\ 7.305 \\ 13.232 \\ 29.345 \end{pmatrix}$$

$$F_{Aeq} := \begin{pmatrix} VA1 - VA2 \\ VA2 - VA3 \\ VA3 - VA4 \\ VA4 - VA5 \\ VA5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.195 \\ 0.961 \\ 6.814 \\ 12.826 \\ 56.607 \end{pmatrix}$$

De los resultados anteriores se observa que los valores de las tres fuentes: libro, hoja de cálculo y el programa, son iguales. Sin embargo, la hoja de cálculo tiene la limitación de que se tiene que modificar para cada problema particular, además de su gran extensión, a diferencia del programa que tiene versatilidad para resolver diferentes problemas y presenta los resultados ordenados en tablas y graficas.

Ejemplo 3.

En el siguiente ejemplo se retoma el “13.8.3 Ejemplo: marco de cuatro niveles con un apéndice” del libro (Chopra, 2014), esta estructura tiene el valor numérico de los primeros periodos muy cercanos, se retoma con el fin de mostrar las diferencias entre las combinaciones modales SRSS y CQC

Primero, se ingresan los valores de la masa y rigidez de cada nivel.

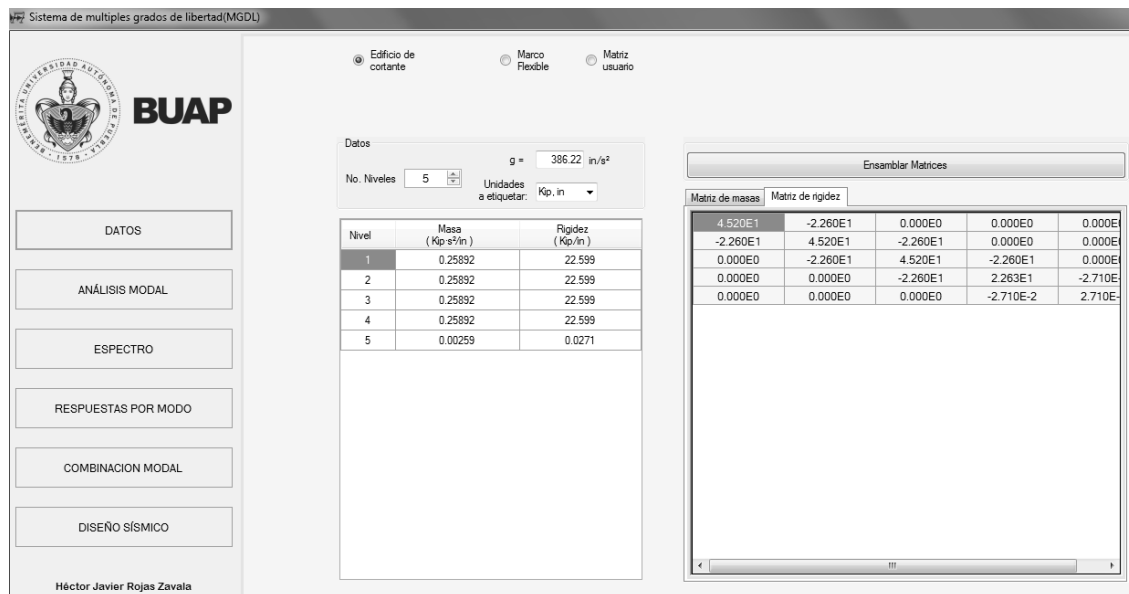


Figura 4.37 Pantalla para el ingreso de datos del Ejemplo 3.

En la pantalla “Análisis modal” se obtiene los valores del periodo de los modos de la estructura. La variación del valor del periodo entre los primeros modos es del 6%.

ω^2	T	ω	f	Γ
Periodos (s/ciclo)				
	1	2.004E0		
	2	1.877E0		
	3	6.724E-1		
	4	4.389E-1		
	5	3.578E-1		

Figura 4.38 Periodos de la estructura del Ejemplo 3.



Se ingresa el espectro para calcular las respuestas de la estructura. El libro trabaja con un espectro de Pseudo-velocidad y el programa utiliza un espectro de Pseudo-aceleración normalizado con respecto a “g” para el sismo “El Centro”.

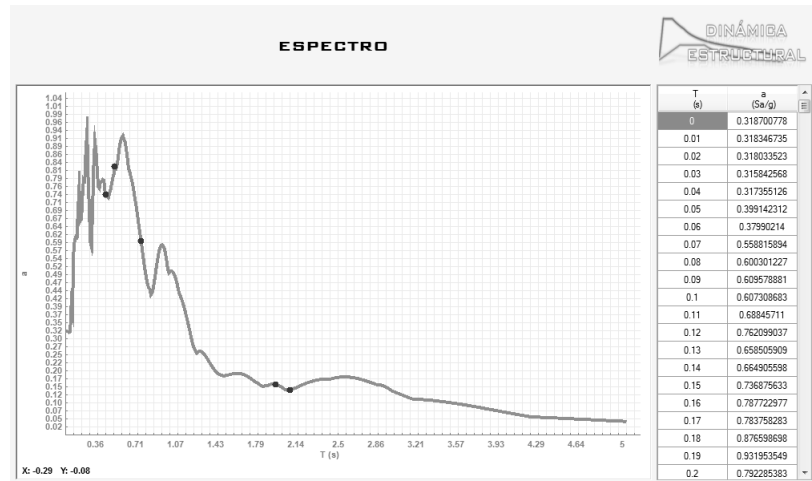


Figura 4.39 Espectro de diseño utilizado en el Ejemplo 3.

Se obtienen las aceleraciones para cada modo. Los resultados son prácticamente iguales, con la ventaja de que el programa obtiene la ordenada espectral de manera automática a partir de los datos del espectro y los periodos de los modos, mientras que la hoja de cálculo y el libro se obtienen de una lectura manual de las gráficas.

Modo	T_n (s)	D_n (pulg)	A_n/g
1	2.000	5.378	0.1375
2	1.873	5.335	0.1556
3	0.672	2.631	0.5950
4	0.439	1.545	0.8176
5	0.358	0.928	0.7407

Modo	T (s)	a (Sa/g)	Sa (in/s ²)	Desplazamiento (in)
1	2.004E0	1.378E-1	5.321E 1	5.415E 0
2	1.877E0	1.550E-1	5.986E 1	5.343E 0
3	6.724E-1	5.947E-1	2.297E 2	2.630E 0
4	4.389E-1	8.237E-1	3.181E 2	1.553E 0
5	3.578E-1	7.374E-1	2.848E 2	9.237E-1

Figura 4.40 Aceleraciones para cada periodo (Libro y programa)



A continuación, se muestran los resultados de las respuestas en cada combinación.

Combinación Modal

SRSS **CQC** **ABSSUM**

Nivel	Desplazamiento Total (in)	Desplazamiento Relativo (in)	Cortante (Kip)	Fuerzas Laterales (Kip)
1	1.883E0	1.883E0	4.255E1	8.707E0
2	3.208E0	1.498E0	3.385E1	2.244E0
3	4.161E0	1.398E0	3.160E1	5.917E0
4	4.805E0	1.137E0	2.568E1	2.373E1
5	7.210E1	7.207E1	1.953E0	1.953E0

Combinación Modal

SRSS **CQC** **ABSSUM**

Nivel	Desplazamiento Total (in)	Desplazamiento Relativo (in)	Cortante (Kip)	Fuerzas Laterales (Kip)
1	2.344E0	2.344E0	5.296E1	9.465E0
2	4.119E0	1.925E0	4.350E1	6.138E0
3	5.415E0	1.653E0	3.736E1	1.008E1
4	6.208E0	1.207E0	2.728E1	2.621E1
5	3.987E1	3.957E1	1.072E0	1.072E0

Combinación Modal

SRSS **CQC** **ABSSUM**

Nivel	Desplazamiento Total (in)	Desplazamiento Relativo (in)	Cortante (Kip)	Fuerzas Laterales (Kip)
1	3.529E0	3.529E0	7.974E1	2.223E1
2	5.407E0	2.545E0	5.751E1	-3.041E0
3	6.186E0	2.679E0	6.055E1	1.067E1
4	7.763E0	2.207E0	4.988E1	4.709E1
5	1.019E2	1.031E2	2.795E0	2.795E0

Figura 4.41 Tablas de resultados para cada combinación.

	V_b (kips)	V_5 (kips)	Cortante (Kip)	Cortante (Kip)
ABSSUM	79.554	2.797	7.974E1	2.795E0
SRSS	42.428	1.954	4.255E1	1.953E0
CQC	52.774	1.074	5.296E1	1.072E0
Análisis de la historia de la respuesta	56.660	0.997		

Figura 4.42 Comparación de resultados entre el libro y los del programa.

Se observa que los resultados son prácticamente iguales entre los que presenta el libro y los que se obtienen con el programa.



Comparando los valores del cortante en la base con respecto al análisis historia tiempo que presenta el libro, se observa que la regla de combinación CQC obtiene un valor más cercano y que la regla SRSS subestima el valor en un 20%, mientras que la regla ABSUM sobreestima el valor en un 50%.

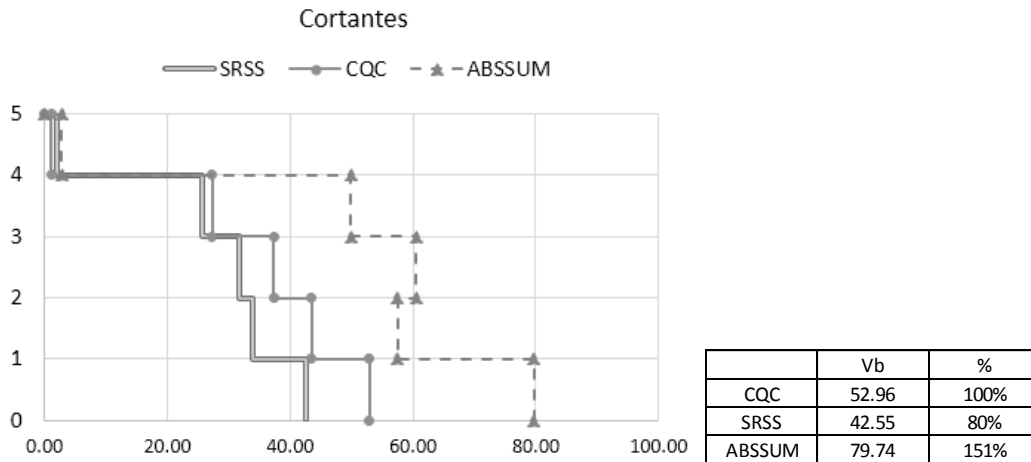


Figura 4.43 Grafica de comparación del cortante calculado con SRSS, CQC y ABSSUM.

Ejemplo 4.

Para validar el cálculo implementado en la opción “Marco Flexible” se retoma el “Ejemplo 6.5” del capítulo 6.3 “Ortogonalidad de los modos” del libro (Hurtado Gómez, 2000). En el cual se realiza el cálculo de un marco de tres niveles.

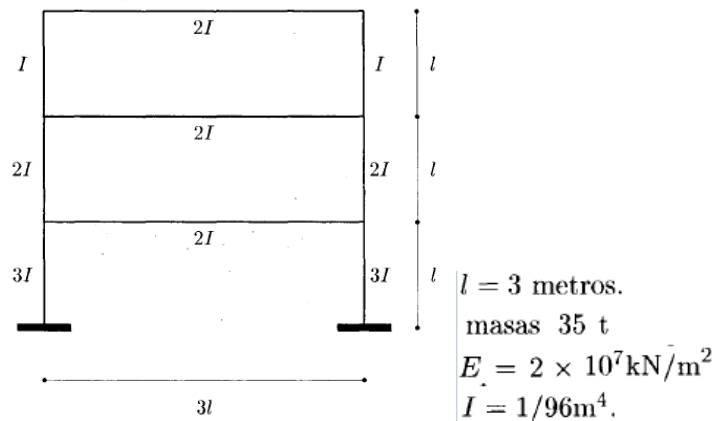


Figura 4.44 Ejemplo 4 de marco flexible del libro (Hurtado Gómez, 2000)



Se ingresan los datos en la pantalla inicial, al seleccionar la opción “Marco flexible se amplía la tabla para poder ingresar los datos.

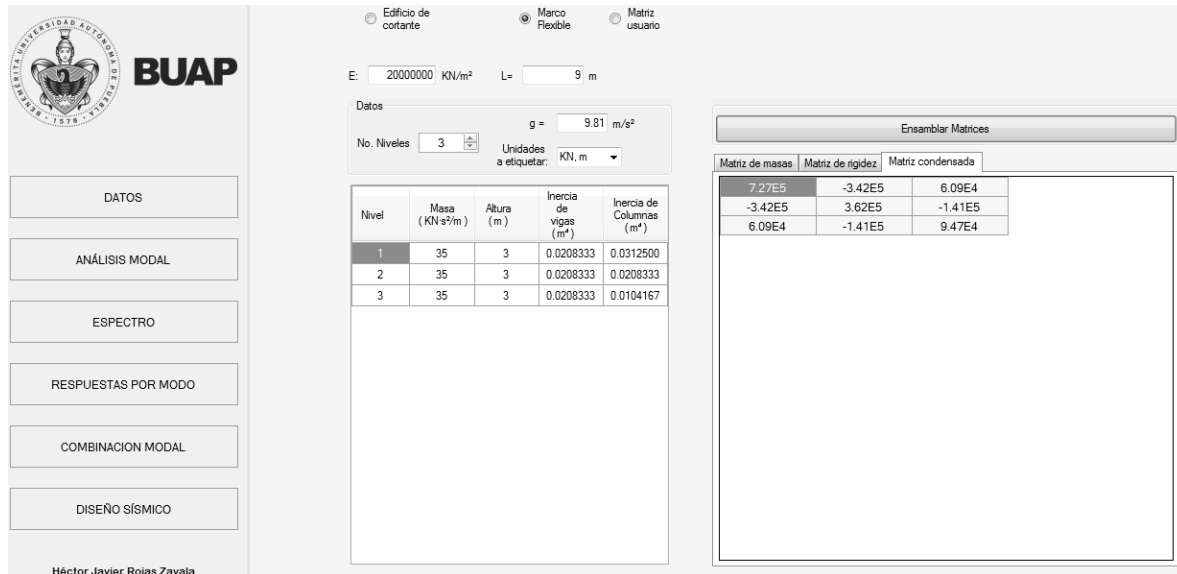


Figura 4.45 Datos de entrada para el Ejemplo 4.

El programa calcula la matriz global de la estructura y además calcula la matriz condensada para desplazamientos laterales, que en este problema al ser de 3 grados de libertad laterales la matriz condensada resultante es de 3X3.

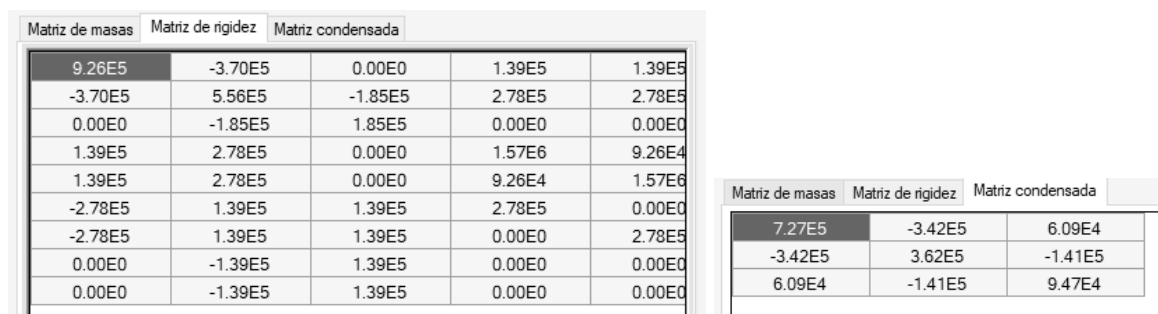


Figura 4.46 Matriz de rigidez global de la estructura y matriz condensada.

El libro presenta los resultados de la matriz modal sin normalizar y la matriz Ω . Para comparar resultados la matriz modal se normaliza, al igual como lo presenta el programa.



$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0308 & 0.0865 & 0.1419 \\ 0.0886 & 0.1136 & -0.0884 \\ 0.1406 & -0.0905 & 0.0247 \end{pmatrix}$$

Normalizada		
1	1	1
2.88E+00	1.31E+00	-6.23E-01
4.56E+00	-1.05E+00	1.74E-01

Modal	Matriz Ω	Espectral Ω^2	Masa Generalizada	Rigidez Generalizada	ΦN
1		1.00E0	1.00E0	1.00E0	
2		2.88E0	1.31E0	-6.23E-1	
3		4.57E0	-1.05E0	1.74E-1	

Figura 4.47 Comparación de resultados de la matriz modal.

De igual forma al comparar el resultado de la matriz Ω . Se observa que se obtienen los mismos resultados.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 23.1777 & 0 & 0 \\ 0 & 78.1997 & 0 \\ 0 & 0 & 164.8240 \end{pmatrix}$$

Modal	Matriz Ω	Espectral Ω^2	Masa Generalizada	Rigidez Generalizada	ΦN
1		2.32E1	0.00E0	0.00E0	
2		0.00E0	7.82E1	0.00E0	
3		0.00E0	0.00E0	1.65E2	

Figura 4.48 Matriz Ω mostrada en el libro y calculada con el programa.

El libro finaliza el ejemplo hasta este punto, sin embargo, a continuación, se muestran los datos complementarios del análisis modal y se ingresa un espectro de diseño para mostrar la funcionalidad del programa.

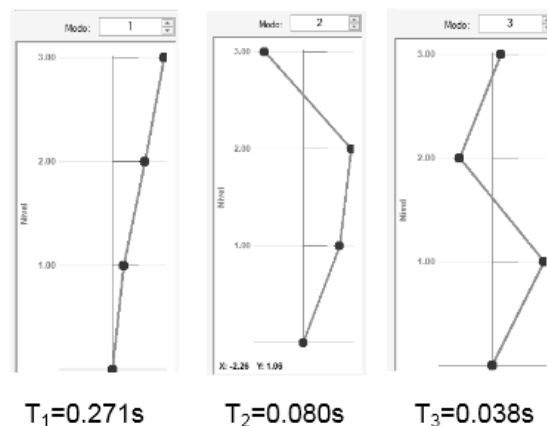


Figura 4.49 Formas modales y periodos de la estructura.

Al ingresar el espectro de diseño el programa realiza el cálculo modal espectral.



Figura 4.50 Espectro de diseño utilizado en el Ejemplo 4.

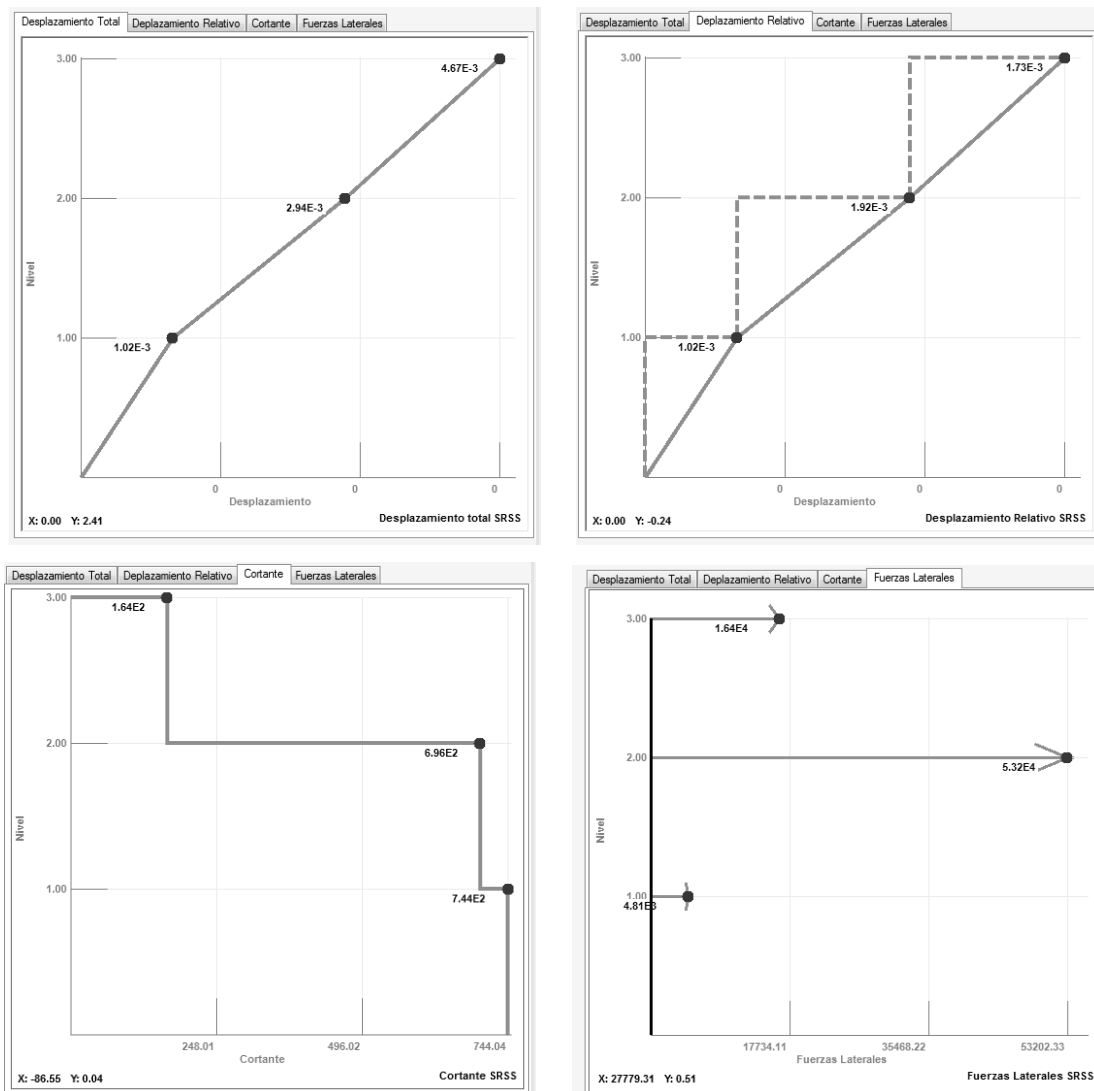


Figura 4.51 Resultados del análisis modal espectral del Ejemplo 4.



Ejemplo 5

Para mostrar el uso de la opción “Matriz usuario”, se retoma el problema 3.5 del capítulo 3 “Dinámica estructural. Varios grados de libertad” del libro (Gómez Chávez, 2007). El problema consiste en analizar un marco de dos crujeías de cuatro niveles.

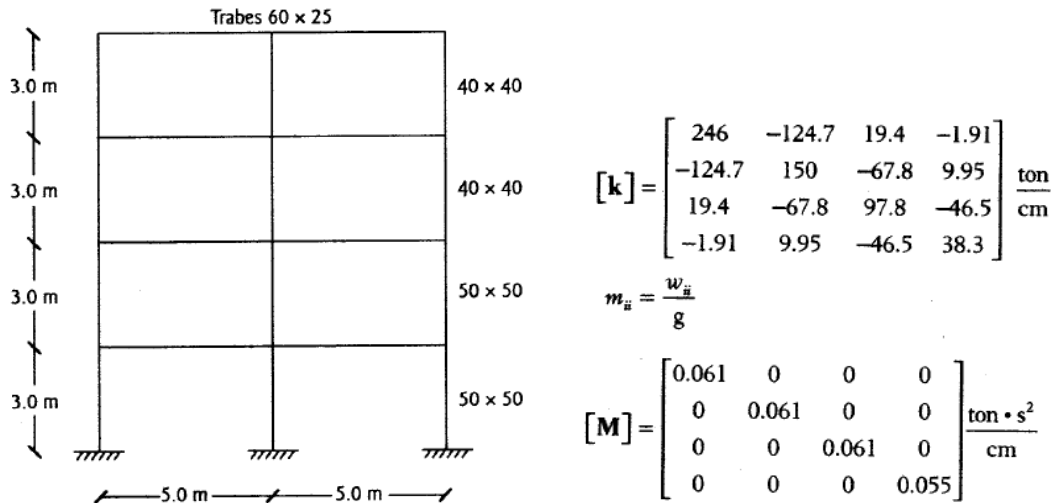


Figura 4.52 Datos del ejemplo 5, retomado del libro (Gómez Chávez, 2007).

Al seleccionar la opción “Matriz usuario” el programa muestra una columna para el ingreso de las masas de cada nivel y una tabla editable en la pestaña “Matriz de rigidez” para el ingreso de datos.



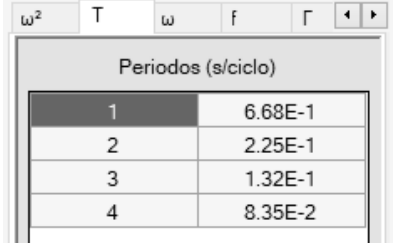
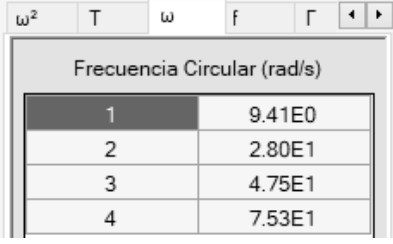
Figura 4.53 Pantalla de ingreso de datos.

Al presionar el botón “Ensamblar Matrices” el programa realiza el análisis modal.

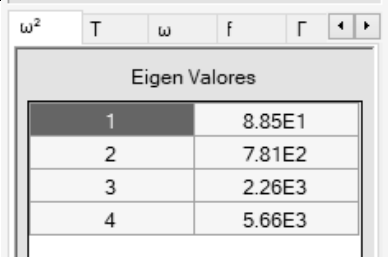
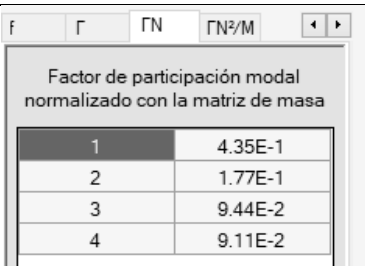


Comparando cada uno de los resultados del programa con los mostrados en el libro se obtiene:

Matriz modal					
Libro					
$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.518 \\ 4.307 \\ 5.3 \end{Bmatrix}$	$\mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.686 \\ 0.478 \\ -1.528 \end{Bmatrix}$	$\mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.60 \\ -1.59 \\ 0.91 \end{Bmatrix}$	$\mathbf{X}_4 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.747 \\ 0.3 \\ -0.0852 \end{Bmatrix}$		
Programa					
Modal	Matriz Ω	Espectral Ω^2	Masa Generalizada	Rigidez Generalizada	ΦN
1		1.00E0	1.00E0	1.00E0	1.00E0
2		2.51E0	1.68E0	6.03E-1	-7.48E-1
3		4.28E0	4.73E-1	-1.60E0	2.99E-1
4		5.26E0	-1.53E0	9.14E-1	-8.51E-2

Periodo						
Libro	Programa					
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">T(s)</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0.66</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0.22</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0.13</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0.08</td></tr> </table>	T(s)	0.66	0.22	0.13	0.08	
T(s)						
0.66						
0.22						
0.13						
0.08						
Frecuencia circular						
Libro	Programa					
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">ω (rad/s)</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9.434</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">27.97</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">47.13</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">75</td></tr> </table>	ω (rad/s)	9.434	27.97	47.13	75	
ω (rad/s)						
9.434						
27.97						
47.13						
75						



Eigenvalores						
Libro	Programa					
<table border="1"><thead><tr><th>ω^2</th></tr></thead><tbody><tr><td>89.04</td></tr><tr><td>782.5</td></tr><tr><td>2221.4</td></tr><tr><td>5635.9</td></tr></tbody></table>	ω^2	89.04	782.5	2221.4	5635.9	
ω^2						
89.04						
782.5						
2221.4						
5635.9						
Factor de participación						
Libro	Programa					
$\gamma_1 = 0.435$ $\gamma_2 = 0.177$ $\gamma_3 = 0.095$ $\gamma_4 = 0.091$						

La variación de los resultados se debe a la pérdida por precisión numérica, la cual es diferente entre el libro y el programa, sin embargo, la variación se encuentra por debajo del 2% por lo que los resultados se pueden considerar iguales.



CONCLUSIONES

Se desarrolló un software enfocado al tema de la dinámica de estructuras, con el fin de ser utilizado como apoyo en el aula. La estructura de la interfaz gráfica y los temas incluidos se adaptaron a las características que debe tener un software educativo.

A lo largo del desarrollo del presente trabajo se integraron nuevos conocimientos de diferentes áreas y se reafirmaron los conocimientos adquiridos en la Maestría. La integración de todos estos conocimientos represento un reto que se resolvió satisfactoriamente, lo cual se ve reflejado en el producto final.

Los temas incluidos en el presente trabajo fueron desarrollados con base al curso de “Dinámica Estructural” impartido por el M.I. Martin Castillo Flores en la Facultad de Ingeniería de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Sin embargo, la variedad de las funciones incluidas en el programa permite que este pueda ser utilizado en otros cursos de dinámica de estructuras.

Con el fin de evaluar la validez de los resultados del programa, se resolvieron varios ejemplos retomados de libros especializados. Con base en los resultados obtenidos en el proceso de validación, se considera que los cálculos del programa son correctos, el cual era uno de los objetivos planteados al inicio del presente trabajo.

El programa se desarrolló como una herramienta de apoyo para el alumno, con el fin de incentivar su interés y dedicación en el área de la dinámica de estructuras. El alumno debe entender que los programas de computadora no sustituyen el ingenio de la mente humana, por lo que el uso adecuado de estos es responsabilidad absoluta por parte del usuario.

RECOMENDACIONES

Debido al avance de la tecnología en la época actual es necesario incluir con mayor incidencia el uso del software educativo en el aula, con el fin de aprovechar los beneficios que ofrecen estas herramientas a los alumnos.

Con el objetivo de mejorar el programa desarrollado en el presente trabajo, se debe realizar una recopilación de experiencias y opiniones por parte de alumnos que utilicen el programa durante sus cursos de dinámica de estructuras.

Existen varios temas tratados en un curso de dinámica de estructuras que no están incluidas en el programa desarrollado, es recomendable incluirlos en versiones futuras del programa con el fin de incrementar la capacidad del software.

Es recomendable incluir el aprendizaje de un lenguaje de programación por parte de los alumnos de posgrado, debido a que ayuda a una mayor comprensión de los temas tratados en el aula, además, de que facilita la resolución de varias tareas numéricas y cíclicas, las cuales se presentan frecuentemente en el área de las ingenierías.

BIBLIOGRAFÍA

- Aguiar Falconi, R., 2012. *Dinámica de estructuras*. Segunda ed. Ecuador: Centro de investigaciones científicas.
- Bell, D. & Parr, M., 2010. *C# para estudiantes*. Primera ed. México: Pearson Educación.
- B. F., 2008. *Software educativo*. EE.UU: McGraw Hill.
- Cabero Almenara, J., 2007. *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*. Madrid: McGraw Hill.
- Castillo Flores, M., 2017. *Apuntes del curso "Dinamica"*. Puebla, Puebla: BUAP.
- Ceballos Sierra, F. J., 2013. *Enciclopedia de Microsoft Visual C#*. Cuarta ed. México: RA-MA.
- Chopra, A. K., 2014. *Dinámica de estructuras*. Cuarta ed. México: Pearson Educación.
- Galvis, Á., 1994. *Ingeniería de software educativo*. Bogotá: Ediciones Uniandes.
- García Vidal, G., 2000. *La multimedia aplicada a la actividad lúdica como estrategia en la enseñanza-aprendizaje del Idioma inglés*. Bogotá: Universidad Lasalle.
- Gómez Chávez, S. I., 2007. *Análisis Sísmico Moderno. Ética aplicada*. Primera ed. México: Trillas.
- Hinojoza Gabriel, O., 2009. *Software para la enseñanza de la dinámica estructural*. Ciudad de México: UNAM.
- Hurtado Gómez, J. E., 2000. *Introducción a la dinámica de estructuras*. Primera ed. Manizales: Centro de Publicaciones Universidad Nacional de Colombia.
- Juganaru Mathieu, M., 2014. *Introducción a la programación*. Primera ed. México: Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V.
- M. Deitel, H. & J. Deitel, P., 2007. *Cómo programar en C#*. Segunda ed. México: Pearson Educación.

Meli, R. & Bazán, E., 2008. *Diseño sísmico de edificios*. Primera ed. México: Limusa.

Miguel Tejada, A., 2011. *Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

Paz, M., 1992. *Dinámica estructural. Teoría y cálculo*. Primera ed. Barcelona: Reverté, S.A..

Piaget, J., 2003. *Aprendizaje y desarrollo*. México: UNAM.

Ramírez, J. M., Valencia De oro, A. L., Gómez, D. & Thomson, P., 2010. Aplicación interactiva para la educación en dinámica estructural. *Dyna*, Issue 165, pp. 72-73.

Rosenblueth, E., 1951. *A Basis for Aseismic Design, Ph. D. thesis*. Urbana, IL, USA: University of Illinois at Urbana-Champaign.

Sevari, K., 2018. The Effectiveness of Math Educational Software. *Psychology and Behavioral Science*.

Urbina, E., 2009. *Software educativo*. México: Norma.

ANEXO
DEMOSTRACIONES

A.1. DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (2.3)

Partiendo de la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.3)$$

La solución general de la ecuación es:

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad (A.1.1)$$

Derivando 2 veces la ecuación anterior:

$$\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad (A.1.2)$$

$$\ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (A.1.3)$$

Sustituyendo (A.1.2) y (A.1.3) en (2.3) se obtiene:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 \quad (A.1.4)$$

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + k) = 0 \quad (A.1.5)$$

Para que se cumpla la ecuación (A.1.5) es necesario que:

$$e^{\lambda t} = 0$$

o bien que: $(m\lambda^2 + k) = 0$ única solución

Considerando la ecuación:

$$(m\lambda^2 + k) = 0 \quad (A.1.6)$$

Despejando a λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (A.1.7)$$

Se puede considerar que “ ω ” es igual a la ecuación (ver demostración A.2):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (A.1.8)$$

Sustituyendo en (A.1.17) obtenemos:

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega i \quad (\text{A.1.9})$$

Por lo que:

$$\lambda_1 = + \omega i \quad (\text{A.1.10})$$

$$\lambda_2 = - \omega i \quad (\text{A.1.11})$$

Las raíces corresponden al caso de complejos conjugados:

$$\lambda = \alpha + \beta i \quad (\text{A.1.12})$$

$$\lambda = \alpha - \beta i \quad (\text{A.1.13})$$

Donde $\alpha = 0$ y $\beta = \omega$. La solución para este caso es:

$$u(t) = \zeta_1 e^{(\alpha + \beta i)t} + \zeta_2 e^{(\alpha - \beta i)t} \quad (\text{A.1.14})$$

Sustituyendo (A.1.10) y (A.1.11):

$$u(t) = \zeta_1 e^{\omega i t} + \zeta_2 e^{-\omega i t} \quad (\text{A.1.15})$$

Utilizando la identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Considerando $\theta = \omega t$. Aplicando a la ecuación (A.1.15)

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (\text{A.1.16})$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (\text{A.1.17})$$

Sustituyendo (A.1.16) y (A.1.17) en (A.1.15):

$$u(t) = \zeta_1 [\cos \omega t + i \sin \omega t] + \zeta_2 [\cos \omega t - i \sin \omega t] \quad (\text{A.1.18})$$

$$u(t) = (\zeta_1 + \zeta_2) \cos \omega t + (\zeta_1 - \zeta_2) i \sin \omega t \quad (\text{A.1.19})$$

Si ζ_1 y ζ_2 son complejos y conjugados se tiene:

$$\zeta_1 = a + ib$$

$$\zeta_2 = a - ib$$

Entonces:

$$(\zeta_1 + \zeta_2) = 2a$$

$$(\zeta_1 - \zeta_2) = 2bi$$

Sustituyendo en (A.1.19):

$$u(t) = 2a \cos \omega t + 2b i i \sin \omega t \quad (\text{A.1.20})$$

$$u(t) = 2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t \quad (\text{A.1.21})$$

Considerando:

$$2a = A$$

$$-2b = B$$

Finalmente, la solución general de la ecuación (2.3) puede escribirse como (respuesta dinámica en términos de desplazamiento):

$$u(t) = A \cos \omega(t) + B \sin \omega(t) \quad (\text{A.1.22})$$

Donde A y B son constantes que se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema.

A.2. DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (A.1.8)

Una partícula se mueve a lo largo del eje u , tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento $u(t)$ desde la posición de equilibrio, varía en el tiempo de acuerdo con la relación:

$$u(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{A.2.1})$$

La relación matemática entre la frecuencia angular “ ω ” y la constante elástica del resorte “ k ” es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.2.2})$$

Se puede demostrar por el siguiente camino:

Se obtiene la ecuación de la velocidad derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$\dot{u}(t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{A.2.3})$$

Volviendo a derivar se obtiene la ecuación de la aceleración:

$$\ddot{u}(t) = -\mathcal{A}\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{A.2.4})$$

Sustituyendo (A.2.1) en (A.2.4) queda:

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) \quad (\text{A.2.5})$$

Recordando que la aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación. La fuerza resultante puede escribirse, por la 2ª ley de Newton:

$$F = m a = m(-\omega^2 u(t)) \quad (\text{A.2.6})$$

En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza elástica y el peso, es una fuerza de recuperación que se rige por la expresión:

$$F = -k u(t) \quad (\text{A.2.7})$$

Igualando las ecuaciones (A.2.6) y (A.2.7) :

$$-k u(t) = m(-\omega^2 u(t))$$

$$k = m\omega^2 \tag{A.2.8}$$

Finalmente, despejando a ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A.3. DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (2.12)

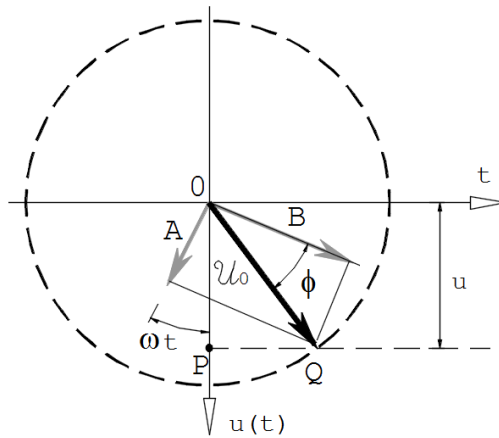
Partiendo de la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.3)$$

Cuya solución general es:

$$u(t) = A \cos \omega(t) + B \sin \omega(t) \quad (\text{Desplazamiento})$$

Se observa que la ecuación expresa que el desplazamiento $u = \mathbf{OP}$ es la suma de las componentes de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente, de magnitud A y B , dirigidos como se muestra en la figura:



Cuando t varía, ambos vectores giran en el sentido de las manecillas del reloj; también se nota que la magnitud de su resultante OQ es igual al desplazamiento máximo U_0 .

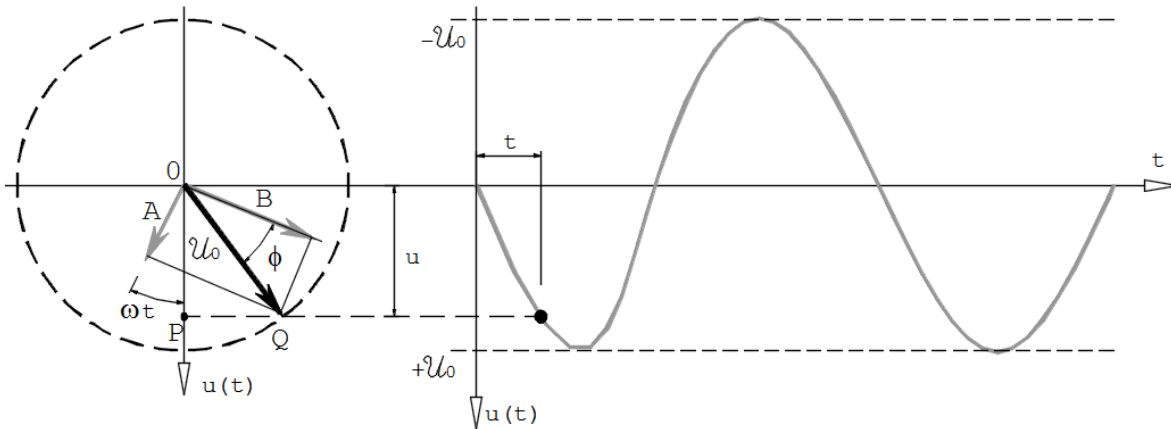
El desplazamiento de P a lo largo del eje $u(t)$ puede obtenerse de esta manera: proyectando sobre este eje el movimiento de un punto Q que describe un círculo auxiliar de radio U_0 con una velocidad angular constante ω . Al denotar por ϕ el ángulo formado por los vectores OQ y A , se escribe:

$$OP = OQ \sin(\omega t + \phi) \quad (A.3.1)$$

Donde:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (A.3.2)$$

La curva desplazamiento-tiempo se representa por medio de una curva senoidal; el valor máximo u_0 del desplazamiento se denomina la amplitud de la vibración, y el ángulo ϕ que define la posición inicial de Q en el círculo se llama ángulo de fase:



Por el teorema de Pitágoras el valor de la amplitud queda expresado por:

$$u_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (\text{A.3.3})$$

Y por trigonometría el ángulo de fase se obtiene por:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \quad (\text{A.3.4})$$

A.4. DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (2.19)

Partiendo de la “Ecuación de movimiento para vibración libre con amortiguamiento”.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) es una ecuación diferencial lineal, de coeficientes constantes de 2° orden y homogéneo.

Su solución general está dada por:

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad (A.4.1)$$

Derivando 2 veces la ecuación anterior:

$$\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad (A.4.2)$$

$$\ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (A.4.3)$$

Sustituyendo en (2.19) se obtiene:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 \quad (A.4.4)$$

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad (A.4.5)$$

Para que se cumpla la ecuación (A.4.5) es necesario que:

$$e^{\lambda t} = 0$$

$$\text{o bien que:} \quad (m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad \text{única solución}$$

Considerando la ecuación:

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad (A.4.6)$$

Despejando a λ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (A.4.7)$$

Realizando algunas operaciones algebraicas la ecuación (A.4.7) se puede reescribir como:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (\text{A.4.8})$$

Se puede demostrar que, si la cantidad bajo el radical es menor que cero, la estructura es subamortiguada; así mismo, si la cantidad es igual a cero, la estructura es críticamente amortiguada.

Entonces sí:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (\text{A.4.9})$$

Considerando $c = c_{cr}$ reescribiendo:

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (\text{A.4.10})$$

Recordando que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ tenemos que:

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0 \quad (\text{A.4.11})$$

Despejando c_{cr} :

$$c_{cr} = 2m\omega \quad (\text{A.4.12})$$

Si $\zeta = \frac{c}{c_{cr}}$ se tiene:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \quad (\text{A.4.13})$$

Sustituyendo (A.4.13) en (A.4.8):

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm \sqrt{(\zeta\omega)^2 - \frac{k}{m}} \quad (\text{A.4.14})$$

Recordando que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ tenemos que:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (\text{A.4.15})$$

Todas las estructuras civiles vibran, es decir todas tienen $\zeta < 1$. Por lo tanto, la ecuación (A.4.15) siempre resultara en un numero complejo conjugado.

Reescribiendo:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{-1(1 - \zeta^2)} \quad (\text{A.4.16})$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega i\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{A.4.17})$$