



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Maestría en Ciencias (Física Aplicada)

**Efectos extradimensionales en decaimientos de leptones
con cambio de sabor**

Julio del 2020

Tesis presentada para obtener el grado de Maestría en Ciencias
(Física Aplicada)

Presenta: Eduardo Martínez Vásquez

Director de tesis: Dr. Héctor Novales Sánchez

Índice

Capítulos	Página
1. Introducción	1
2. Teoría	4
2.1. Modelo Estándar	4
2.1.1. El sector Escalar	5
2.1.2. El sector de Yang-Mills	7
2.1.3. El sector de Yukawa	8
2.1.4. El sector de Yukawa de quarks	9
2.1.5. El sector de leptones de Yukawa	11
2.1.6. El sector de corrientes	12
2.1.7. El sector de corrientes de quarks	13
2.1.8. El sector de corrientes leptónicas	13
2.2. Física más allá del Modelo Estándar	14
2.3. Dimensiones extras	17
2.3.1. Compactificación	19
2.3.2. Reducción Dimensional	20
2.3.3. Características generales de teorías de campos en dimensiones extras	20
2.3.4. Lagrangianos para las reglas de Feynman	25
3. Metodología	26
3.1. Decaimiento de $l_\alpha^{(0)} \rightarrow A_\mu^{(0)} l_\beta^{(0)}$	26
3.2. Diagramas de Feynman.	26
3.3. Calculo de la expresión analítica de los diagramas de Feynman	27
3.4. Suma de los diagramas de Feynman	38
3.5. Factores de forma	40
3.6. Amplitud al cuadrado	41
3.7. Implementación del Mecanismo GIM (Glashow–Iliopoulos–Maiani)	43
3.8. Calculo Numérico	44
4. Análisis de resultados	50
5. Conclusiones	53

6. Apéndice	54
6.1. Apéndice A	54
6.1.1. Reglas de Feynman	54
6.2. Apéndice B	57
6.2.1. Tasa de decaimiento	57
6.3. Apéndice C	60
6.3.1. Identidades de Gordon	60
6.4. Apéndice D.	65
6.4.1. Las soluciones de las funciones escalares de Passarino-Veltman	65

Título: Efectos extra dimensionales en decaimientos de leptones con cambio de sabor.

Estudiante: Eduardo Martínez Vásquez.

COMITÉ

Dr. Mario Rodríguez Cahuantzi
FCFM-BUAP
Presidente

Dr. Iraís Bautista Guzmán
IF-BUAP
Secretario

Dr. Carlos Gerardo Honorato Méndez
FCE-BUAP
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
FCFM-BUAP
Asesor

*Confía en el tiempo,
que suele dar dulces
salidas a muchas
amargas dificultades.*

A mis padres y hermanos.

Resumen

En el presente trabajo se calculó las contribuciones de los modos excitados de Kaluza-Klein de norma a orden de un lazo, en la norma unitaria, del decaimiento $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$, en el Modelo Estándar mínimamente extendido en dimensiones extras, el cual permite cambio de sabor leptónico. Los branching ratios calculados, se encuentran desde el orden $\mathcal{O}(10^{-33})$, comparados con las cotas experimentales reportadas, que son desde el orden $\mathcal{O}(10^{-8})$. Es importante mencionar que la expansión en serie de las tasas de decaimiento se hizo a orden $\mathcal{O}(R^2)$.

1. Introducción

El interés por la comprensión de los fenómenos naturales que se originan en la física fundamental ha motivado muchas y diversas investigaciones en los niveles teórico, experimental y fenomenológico. Por ahora, la mejor descripción de la física fundamental con la que contamos es el *Modelo Estándar de las interacciones fundamentales* [1–3], que es una formulación física basada en la teoría cuántica de campos y construida bajo del principio de simetría [4, 5].

La década actual ha traído consigo descubrimientos muy importantes, como la medición, en el año 2012, de una partícula con masa ~ 125 GeV [6, 7], que es consistente con el famoso *bosón de Higgs*, generado como consecuencia de un proceso físico conocido como *rompimiento espontáneo de simetría* [8–10]. Siendo el campo de Higgs una pieza fundamental del Modelo Estándar, encargada de generar las masas de las partículas elementales, esta medición apunta hacia una confirmación más del éxito de dicha teoría. Empero, otro descubrimiento de gran relevancia, comenzado en 1998 y culminado en el mismo 2012, es la confirmación experimental del fenómeno de las *oscilaciones de neutrinos* [11–14], el cual se interpreta convencionalmente como un efecto que ocurre porque las partículas denominadas *neutrinos* tienen masa y se mezclan [5, 15]. La formulación del Modelo Estándar incluye la suposición de que los neutrinos son partículas sin masa, por lo cual la medición de este fenómeno es una prueba contundente de que hay fenómenos de la física fundamental que no son explicados por nuestra mejor teoría. Y no solo eso, pues existen otros fenómenos físicos, observados experimentalmente, que también quedan fuera de los alcances del Modelo Estándar, como son los casos de la *materia oscura* y la *interacción gravitacional*.

Las deficiencias del Modelo Estándar no implican que esta teoría sea incorrecta. En realidad nos enseñan que, si bien este modelo es una buena aproximación a una descripción precisa de la naturaleza dentro cierto rango de escalas de energía, sus alcances están limitados. Un camino, comúnmente seguido, para encontrar pistas de cómo debe de ser una teoría más precisa que el Modelo Estándar consiste en definir *extensiones del Modelo Estándar*. Estas son formulaciones que agregan elementos nuevos a este modelo, dando lugar a nuevos fenómenos físicos, cuya presunta medición apuntaría hacia la existencia de nueva física, no conocida hasta ahora. Otra manera, más ambiciosa, de buscar física fundamental estriba en plantear teorías que van mucho más allá del campo de acción del Modelo Estándar y cuyo desarrollo ha sido motivado, principalmente, por la incorporación de la interacción gravitacional a una descripción cuántica. Por ejemplo, tal es el caso de las formulaciones de la *teoría de cuerdas*. Las versiones originales de la teoría de cuerdas requerían que el espaciotiempo tuviese 26 dimensiones [16], aunque la llamada *teoría M*, propuesta como la teoría fundamental genuina, sólo necesita de 11 dimensiones de espaciotiempo [17]. Así, inicialmente propuesta con el objetivo de describir las interacciones nucleares [18], la teoría de cuerdas

incorporó el ingrediente de las *dimensiones extras*¹ y nos acostumbró a éste.

Actualmente, el uso de las dimensiones extras en el planteamiento de modelos de nueva física ha alcanzado a las extensiones del Modelo Estándar. Hasta ahora no ha habido observación experimental alguna que sugiera que las dimensiones extras realmente existen. Para conciliar este hecho experimental con la contraparte teórica, se argumenta que las dimensiones extras, en vez de extenderse infinitamente, son compactas [20] y que son tan diminutas que, hasta el momento, han quedado fuera del alcance de nuestros mejores dispositivos de medición [21, 22]. El carácter compacto de las dimensiones extras tiene la consecuencia de que, vistas desde la perspectiva de las cuatro dimensiones de espaciotiempo ordinarias, los campos que constituyen a las teorías que involucran a este elemento se desdoblán en un conjunto infinito de campos, mediante series de Fourier multidimensionales. Concretamente, si en un espaciotiempo de $4 + n$ dimensiones $\phi(x, \bar{x})$ representa genéricamente a un campo que depende de las coordenadas x , del espaciotiempo 4-dimensional ordinario, y de las coordenadas de las dimensiones extras, \bar{x} , dicho campo se expresa como

$$\phi(x, \bar{x}) = \phi^{(\underline{0})}(x) f^{(\underline{0})} + \sum_{(\underline{k})} \phi^{(\underline{k})}(x) f^{(\underline{k})}(\bar{x}). \quad (1)$$

Aquí, el conjunto de funciones $\{f^{(\underline{0})}, f^{(\underline{k})}(\bar{x})\}$, usado para la expansión del campo $\phi(x, \bar{x})$, es un *conjunto completo* (una base) y *ortonormal*, donde $f^{(\underline{0})}$ es una función constante y los $f^{(\underline{k})}(\bar{x})$ dependen de las coordenadas \bar{x} , asociadas a las dimensiones extras. El símbolo de suma $\sum_{(\underline{k})} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n}$, usado en la Ec. (1), denota a una multisuma sobre las componentes de los vectores $(\underline{k}) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, donde todos los k_j corren sobre todos los números enteros, con la única restricción de que $(\underline{k}) \neq (\underline{0}) = (0, 0, \dots, 0)$. A los campos $\phi^{(\underline{0})}(x)$ y $\phi^{(\underline{k})}(x)$, definidos en el espaciotiempo 4-dimensional de Minkowski, se les conoce como los *modos de Kaluza-Klein*. Dependiendo de la geometría específica de las dimensiones extras, algunos de los campos extradimensionales $\phi(x, \bar{x})$ tienen un *modo cero de Kaluza-Klein*, $\phi^{(\underline{0})}(x)$, el cual se identifica como un campo en cuatro dimensiones que ya es conocido [23–27]. Por otra parte, los *modos excitados de Kaluza-Klein*, $\phi^{(\underline{k})}(x)$, representan a nuevos grados de libertad que, desde la perspectiva del espacio-tiempo 4-dimensional ordinario, conllevan efectos de las dimensiones extras.

Uno de los modelos de dimensiones extras más estudiados es el de *dimensiones extras universales* [28], que consiste en definir una réplica del Modelo Estándar, pero donde todas las variables dinámicas (los campos) dependen de todas las $4 + n$ coordenadas del espaciotiempo, incluidas aquellas que caracterizan a las dimensiones extras. Es alrededor de esta formulación que se desarrollará el presente trabajo de tesis. Desde el punto de vista del método de los *diagramas de Feynman* [4], una de las características de esta

¹Sin embargo, merece la pena mencionar que las primeras descripciones de dimensiones extras, propuestas décadas antes que la teoría de cuerdas, tuvieron el objetivo de unificar a las interacciones gravitacional y electromagnética [19, 20].

extensión del Modelo Estándar es que, como consecuencia de la conservación del momento en las dimensiones extras, los primeros efectos de las dimensiones extras sobre las observables del Modelo Estándar se generan, cuánticamente, a *orden de un lazo* [28]. Por tal motivo, aquellas observables y procesos físicos que reciben sus primeras contribuciones del Modelo Estándar desde el orden de un lazo son particularmente interesantes para el contexto de las dimensiones extras universales. Es por ello que el presente trabajo de tesis se desarrollará en torno a uno de tales procesos.

Con la discusión anterior en mente, consideramos, en el contexto del Modelo Estándar en $4 + n$ dimensiones extras universales [29], el decaimiento $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$, donde los leptones inicial y final, $l_\alpha^{(0)}$ y $l_\beta^{(0)}$, son diferentes, de manera que este proceso involucra cambio de sabor leptónico. La presencia en el Modelo Estándar de mezclas de quarks en corrientes cargadas, lo que se caracteriza mediante la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, permite la ocurrencia de procesos físicos con cambio de sabor fermiónico, aunque solo en el sector de los quarks. Contrastantemente, el Modelo Estándar no genera mezclas análogas en el sector de los leptones. Al respecto de esto, vale la pena mencionar que esta característica es heredada por la teoría de Kaluza-Klein producida por el Modelo Estándar extradimensional. Con el objetivo de producir este tipo de efectos en el sector de leptones de la teoría de Kaluza-Klein que estudiaremos, vamos a introducir campos neutrinos extradimensionales que se suponen singuletes del grupo de norma del Modelo Estándar extradimensional. En este contexto, los modos ceros de campos neutrinos adquieren sus respectivas masas a través del mecanismo de Higgs, en tanto que sus modos excitados adquieren una contribución por esta misma vía y, también, a través del mecanismo de Kaluza-Klein. Más aún, la teoría de Kaluza-Klein resultante incluye mezclas de leptones en corrientes cargadas a través de la matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. En general, la existencia de mezclas de neutrinos en formulaciones de física más allá del Modelo Estándar abre la puerta a interesantes procesos de decaimiento como son, por ejemplo, $\mu \rightarrow \gamma e$, $\tau \rightarrow \gamma \mu$ y $\tau \rightarrow \gamma e$ [30], $\mu \rightarrow 3e$, $\tau \rightarrow 3e$, $\tau \rightarrow 3\mu$, $\tau \rightarrow e2\mu$ y $\tau \rightarrow \mu2e$ [31], los cuales, además, tienen relevancia experimental [32, 78]. Las mezclas así introducidas en la teoría de Kaluza-Klein aparecen tanto en acoplamientos de modos ceros como en acoplamientos que incluyen a modos excitados. Con estos ingredientes a la mano, se calcularán contribuciones de los modos excitados de Kaluza-Klein al *branching ratio* del proceso de decaimiento $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$. Desde el punto de vista diagramático, este cálculo contempla la suma de diagramas de Feynman, de orden de un lazo, en los que las partículas virtuales son, exclusivamente, modos excitados de Kaluza-Klein.

2. Teoría

2.1. Modelo Estándar

Las observaciones experimentales de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza nos han llevado a concluir que existen, al menos, cuatro interacciones fundamentales diferentes que ocurren entre los elementos que constituyen a la materia. Dichas interacciones son el electromagnetismo, la interacción débil, la interacción fuerte y la gravedad. El Modelo Estándar de las interacciones fundamentales [1–3], es actualmente, la mejor descripción de la naturaleza con que contamos. Esta formulación, que comprende la descripción de las interacciones electromagnética, débil y fuerte, goza de sustento experimental [63], de acuerdo con las mediciones proporcionadas por los dispositivos más avanzados con que contamos en la actualidad, y tiene una estructura matemática elegante, basada en el principio de simetría. Empero, merece la pena mencionar que en nuestros días se entiende que el Modelo Estándar no es la teoría más fundamental y última en el sentido de que se conocen fenómenos físicos que no se explican con esta formulación, como son, por ejemplo, las masas no nulas de neutrinos [11], la materia oscura [64, 65] y, desde luego, la interacción gravitacional. Estos y otros aspectos, de tipos experimental y teórico, que quedan fuera del alcance del Modelo Estándar, son el motor que ha impulsado un sin número de investigaciones que tienen el objetivo de hallar la teoría física más completa.

Las formulaciones modernas de la física de las partículas elementales se definen en el marco de la teoría cuántica de campos [4]. Los dos elementos principales que determinan a una teoría física dada son sus variables dinámicas y sus simetrías [56]. Las variables dinámicas son los campos, dependientes de las coordenadas del espacio-tiempo, que definen a los grados de libertad y que se asocian a las partículas elementales, las cuales se interpretan como cuantos de dichos campos. Por otra parte, las simetrías, definidas como transformaciones que dejan invariante a la acción [66, 67], se caracterizan a través de la teoría de grupos [4, 66]. Hay grupos de simetría diversos que son relevantes en distintas teorías de campos, pero, sin duda, los más importantes son el grupo de espacio-tiempo y los grupos de norma. La simetría de norma, o también invariancia de norma, se refiere transformaciones que relacionan a descripciones de un sistema físico dado que son matemáticamente diferentes, pero que producen los mismos resultados físicos; entonces se puede trabajar en cualquiera de estas normas y la elección de una u otra obedece, en general, solo a motivaciones prácticas. Dicha simetría ocurre en descripciones físicas que involucran a más grados de libertad que aquellos que estrictamente caracterizan a los sistemas correspondientes [68]. La simetría de norma es un concepto profundo e interesante, que forma parte de formulaciones físicas de gran importancia, como es el caso de la teoría electromagnética, donde se distinguen transformaciones de norma que conectan a potenciales electromagnéticos matemáticamente distintos, pero que producen las mismas ecuaciones de Maxwell [4, 66, 69]. La discusión desarrollada a lo largo del presente documento se centra en el Modelo Estándar electrodébil (MEE), que es una subteoría del Modelo Estándar, la cual describe, únicamente,

a las interacciones débil y electromagnética. Del lado de las variables dinámicas, asociadas a los campos, el MEE involucra a 4 campos vectoriales, 4 campos escalares y 12 campos espinores de Dirac. Sobre los grupos de simetría, este modelo se define en el espacio-tiempo de Minkowski, 4-dimensional, y es invariante bajo el grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$, en tanto que la simetría es definida por el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

En el contexto de la teoría de campos clásica, el MME es caracterizado por una acción, S_{SM} , definida por una densidad Lagrangiana, \mathcal{L}_{SM} , como $S_{SM} = \int d^4x \mathcal{L}_{SM}$. A su vez la Lagrangiana \mathcal{L}_{SM} , se escribe como la suma

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_Y \quad (2)$$

donde los términos Lagrangianos $\mathcal{L}_{YM}, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_C$ y \mathcal{L}_Y reciben, respectivamente, los nombres de *sector de Yang-Mills, sector escalar, sector de las corrientes y sector de Yukawa*. Las variables dinámicas que definen el sector de *Yang – Mills* \mathcal{L}_{YM} , son las conexiones de los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, también llamados campos de norma, en tanto al sector *escalar* \mathcal{L}_s involucra a los campos de norma antes citados y a un par de campos escalares complejos, organizados por un doblete de $SU(2)_L$. El sector de las *corrientes* incluye a las conexiones del grupo de norma y a campos de espinores de Dirac, en tanto al sector de *Yukawa* se define en términos de los mismos campos espinoriales y del doblete escalar.

2.1.1. El sector Escalar

En este sector se emplea al mecanismo de Higgs que permite dar masa a los bosones de norma débiles W^\pm, Z y al bosón de Higgs, también determina las interacciones entre estas partículas. El sector de Higgs, o sector escalar, del modelo estándar se escribe como

$$\mathcal{L}^s = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + V(\Phi^\dagger, \Phi), \quad (3)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix},$$

es el doblete de Higgs complejo, el cual tiene hipercarga $Y = +1$, constituido por los campos escalares ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 . La derivada covariante (D_μ) del grupo electrodébil está en representación de dobletes:

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right] \Phi, \quad (4)$$

donde $\tau^a (a = 1, 2, 3)$ representa a las matrices de Pauli, en tanto que $\frac{\tau^a}{2}$ y $\frac{Y}{2}$ son los generadores. Las B_μ y W_μ son las conexiones o campos de norma, asociados con los grupos $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$ respectivamente, g

y g' son las constantes de acoplamiento asociadas a cada grupo. Se define el potencial de Higgs, $V(\Phi^\dagger, \Phi)$ como

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (5)$$

donde λ , presente en los acoplamientos escalares cuárticos, es una constante adimensional y positiva². El mínimo del potencial $V(\Phi^\dagger, \Phi)$ corresponde al vacío, que es el estado de menor energía. Si $\mu^2 > 0$ se tiene el caso de una teoría de escalares masivos con un estado de vacío único. Si $\mu^2 < 0$, se tiene el caso de un vacío degenerado, caracterizado por los puntos de la superficie

$$\Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_1^0|^2 + |\phi_2^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}, \quad (6)$$

donde $\Phi_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle$ es el valor esperado, en el vacío, del doblete de Higgs, el cual rompe espontáneamente a la simetría electrodébil al grupo electromagnético. Debido a que la componente ϕ_a del doblete contiene la información del grupo electromagnético, es necesario que la componente ϕ_b desarrolle el valor esperado del vacío. Esto significa que Φ_0 debe ser invariante bajo el grupo $U_e(1)$, de manera que si $U \in U_e(1)$, entonces $U\Phi_0 = \Phi_0$, lo cual implica que el generador de este grupo, lo aniquila: $Q\Phi_0 = 0$. Sin pérdida de generalidad se puede elegir

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (7)$$

con

$$v = \frac{-\mu^2}{\lambda} (> 0), \quad (8)$$

cualquier otra elección está relacionada con la expresión anterior por medio de una transformación global del grupo electrodébil, como se mencionó anteriormente, cuando la simetría es global, el resultado es la presencia de los bosones de Goldstone. El rompimiento espontáneo de la simetría (RES), aparece como consecuencia de elegir a uno solo del número infinito de vacíos que existen. La teoría debe ser considerada en el entorno del estado de mínima energía, para ello se realiza la translación

$$\Phi \rightarrow \Phi_0 + \Phi = \begin{pmatrix} G_w^+ \\ \frac{v+H+iG_z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

donde G_w^+ y G_z son los pseudobosones de Goldstone asociados con los bosones de norma débiles W^\pm y Z respectivamente. Al sustituir la expresión para Φ en la parte cinética de \mathcal{L}^s , $(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$, se obtiene que

²Que el potencial $V(\Phi^\dagger, \Phi)$ sea una función acotada por un mínimo requiere que λ sea positiva.

los campos eigenestados de norma W_a^μ y B_μ , se relacionan con los eigenestados de masa, W_μ^\pm, Z_μ y A_μ por

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm W_\mu^2), \quad (10)$$

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad (11)$$

$$W_\mu^3 = c_w Z_\mu + s_w A_\mu, \quad (12)$$

$$B_\mu = -s_w Z_\mu + c_w A_\mu, \quad (13)$$

$$M_Z = c_w M_W, \quad (14)$$

$$M_A = 0, \quad (15)$$

donde $s_w = \sin\theta_w$, $c_w = \cos\theta_w$ y θ_w es el ángulo débil definido por $\tan\theta_w = \frac{g'}{g}$. De las expresiones anteriores se puede identificar al campo A_μ con el fotón.

2.1.2. El sector de Yang-Mills

Este sector caracteriza la estructura no Abelian del grupo electrodébil. Los invariantes no pueden ser construidos con los campos de norma directamente, sino por medio de los tensores de campo $SU_L(2) \times U_Y(1)$ dados por

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu],$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

donde $W_{\mu\nu} = T^a W_{\mu\nu}^a$. Eliminando los generadores de la primera ecuación, se obtiene el tensor de campo de Yang-Mills

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \quad (16)$$

Bajo el grupo electrodébil, los tensores de campo se transforman en forma covariante:

$$W_{\mu\nu} = U W_{\mu\nu} U^\dagger, \quad U \in SU_L(2)$$

$$B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$$

Con estos objetos covariantes y utilizando la relación $Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ se puede construir el lagrangiano de Yang-Mills, el cual es invariante de norma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{YM} &= -\frac{1}{2} Tr[W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

En términos de los campos eigenestados de masa, el lagrangiano de Yang-Mills toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{YM} = & -\frac{1}{2}\hat{W}_{\mu\nu}^+\hat{W}^{-\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & + F_{\mu\nu}W^{-\mu}W^{+\nu} + igc_w Z_{\mu\nu}W^{-\mu}W^{+\nu} \\ & - 2g^2W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu}(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{+\mu}W^{-\nu}),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\mu\nu}^+ &= \hat{D}_\mu W_\nu^+ - \hat{D}_\nu W_\mu^+, \\ Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu,\end{aligned}$$

con $\hat{D}_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^3$.

2.1.3. El sector de Yukawa

Dentro del ME, los fermiones y sus interacciones se caracterizan mediante los sectores de Yukawa y de Corrientes, los cuales tienen estructura de Lorentz diferente. En el primero, la estructura es de tipo escalar y pseudoescalar. Este sector genera las masas de los fermiones quirales por medio del mecanismo de Higgs y contiene productos de campos eigenestados de norma que vinculan fermiones de diferente helicidad acoplados al doblete de Higgs.

En la teoría electrodébil no se definen los estados de helicidad derecha para los neutrinos, por lo que éstos no pueden tener ninguna contribución física en este sector. El sector de Yukawa corresponde a invariantes electrodébiles de dimensión cuatro que se pueden construir con los dobletes izquierdos de los fermiones, los singletes derechos y el doblete de Higgs. En el caso de los leptones, considerando que no existen los neutrinos derechos ν_i , se tiene el siguiente invariante de Lorentz y electrodébil

$$- Y_{ij}^l \bar{L}_i \Phi l_{Rj} + h.c. \tag{17}$$

donde los coeficientes, Y_{ij}^l , son adimensionales y arbitrarios, se conocen como constantes de Yukawa. Considerando que en el caso de los quarks existen estados derechos para los dos miembros del doblete izquierdo, es necesario considerar otro objeto que transforma covariantemente bajo el grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$,

$$\tilde{\Phi} = -\tau^2 \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \tag{18}$$

el cual tiene hipercarga +1. Por lo tanto se puede formar el siguiente invariante de Lorentz y electrodébil

$$-Y_{ij}^u \bar{Q}_i \tilde{\Phi} u_{Rj} - Y_{ij}^d \bar{Q}_i \tilde{\Phi} d_{Rj} + h.c. \quad (19)$$

La expresión anterior, después del rompimiento espontaneo de la simetría, genera las masas de los fermiones, así como sus interacciones con el bosón de Higgs. El lagrangiano renormalizable más general, se puede descomponer en dos partes independientes

$$\mathcal{L}^Y = \mathcal{L}_q^Y + \mathcal{L}_l^Y, \quad (20)$$

donde \mathcal{L}_q^Y y \mathcal{L}_l^Y son los lagrangianos del sector de quarks y leptones respectivamente.

2.1.4. El sector de Yukawa de quarks

El lagrangiano del sector de quarks de Yukawa está dado por

$$\mathcal{L}_q^Y = -Y_{ij}^u \bar{Q}'_i \tilde{\Phi} u'_{Rj} - Y_{ij}^d \bar{Q}'_i \tilde{\Phi} d'_{Rj} + h.c. \quad (21)$$

donde existe una suma sobre índices de sabor i, j . La prima denota los campos eigenestados de norma. La no conservación del sabor, en el lagrangiano, se debe a que las matrices Y_u y Y_d no están sujetas a ningún tipo de restricción y en particular no son diagonales. Se definen los siguientes vectores en el espacio de sabor

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}, \quad \nu' = \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}. \quad (22)$$

En la norma unitaria, donde los bosones de Goldstone son cero, el doblete de Higgs tiene la forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H^0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

En esta norma y en términos de los vectores U' y D' (22), el lagrangiano de Yukawa para quarks tiene la forma

$$\mathcal{L}_q^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \left[\bar{U}'_L M^u U'_R + \bar{D}'_L M^d D'_R \right] + h.c. \quad (24)$$

donde M_u y M_d son matrices 3×3 cuyas componentes son de la forma

$$M_{ij}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u, \quad M_{ij}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d. \quad (25)$$

Las masas de los quarks se definen diagonalizando la parte cuadrática del lagrangiano, realizando la transformación unitaria

$$U_L = V_L^u U'_L, \quad D_L = V_L^d D'_L, \quad (26)$$

$$U_R = V_R^u U'_R, \quad D_R = V_R^d D'_R. \quad (27)$$

donde las matrices $V_{L,R}^{u,d}$ deben ser unitarias si es que se quiere preservar la estructura canónica de los términos cinéticos que aparecen en el sector de corrientes, por ejemplo

$$\begin{aligned} i\bar{U}'_L \gamma^\mu \partial_\mu U'_L &= i\bar{U}_L V_L^u V_L^{u\dagger} \gamma^\mu \partial_\mu U_L \\ &= i\bar{U}_L \gamma^\mu \partial_\mu U_L, \end{aligned}$$

es decir, la unitariedad de estas matrices de rotación garantiza la existencia de propagadores en su forma canónica en términos de los nuevos campos, el lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L}_q^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \left[\bar{U}_L V_L^u M^u V_L^{u\dagger} U_R + \bar{D}_L V_L^d M^d V_L^{d\dagger} D_R \right] + h.c. \quad (28)$$

Del álgebra lineal existe un teorema el cual dice:

Para cualquier matriz M siempre es posible encontrar dos matrices unitarias A y B , tal que AMB es una matriz real y diagonal .

La demostración del teorema se sigue directamente de la descomposición polar de la matriz M dada por

$$M = HU,$$

donde H es una matriz hermítica y U es unitaria. Dado que toda matriz hermítica puede ser diagonalizada por una matriz unitaria, esto es, $S^\dagger HS$ es diagonal con $S^\dagger = S^{-1}$, tomando $A = S^\dagger$, $B = U^\dagger S$, entonces

$$AMB = (S^\dagger)M(U^\dagger S) = (S^\dagger)HU(U^\dagger S) = S^\dagger HS$$

la cual es una matriz real y diagonal, debido a que los valores de $H = H^\dagger$ son reales.

Debido a que las matrices $V_{L,R}^{u,d}$ son unitarias, el teorema anterior garantiza que las matrices $V_L M V_R^\dagger$ sean reales y diagonales, como lo requiere la definición del término de masa. Se puede ver que las matrices $V_{L,R}$ diagonalizan simultáneamente todo el sector de Yukawa, de manera que

$$\mathcal{L}_q^Y = \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \left[\bar{U}_L \bar{M}^u \bar{U}_R + \bar{D}_L \bar{M}^d \bar{D}_R \right] + h.c. \quad (29)$$

donde las matrices \bar{M}^u y \bar{M}^d están dadas por

$$\bar{M}^u = \begin{pmatrix} M^u & 0 & 0 \\ 0 & M_c & 0 \\ 0 & 0 & M_t \end{pmatrix}, \quad \bar{M}^d = \begin{pmatrix} M^d & 0 & 0 \\ 0 & M_s & 0 \\ 0 & 0 & M_b \end{pmatrix}, \quad (30)$$

El sector de Yukawa en términos de los eigenestados de masa conserva el sabor de quarks, ya que el bosón de Higgs se acopla a pares del mismo tipo de éstos.

2.1.5. El sector de leptones de Yukawa

El lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_l^Y = -Y_{ij}^l \bar{L}_i' \Phi l_{Rj}' + h.c. \quad (31)$$

En la norma unitaria y usando los vectores en el espacio de sabor definidos en la ecuación (22) se tiene

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \bar{E}_L M^l E_R' + h.c. \quad (32)$$

donde se ha definido la matriz M^l como

$$M_{ij}^l = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l.$$

Se puede observar que el neutrino derecho, desde el principio se define que no exista. Por lo que podemos elegir la transformación para el vector $\nu' = (\nu_e', \nu_\mu', \nu_\tau')$ de la manera más conveniente. En analogía con el caso de los quarks, las masas de los leptones se definen diagonalizando la parte cuadrática del lagrangiano, mediante las transformaciones unitarias

$$\begin{aligned} E_L &= V_L^l E_L', \\ E_R &= V_R^l E_R', \end{aligned} \quad (33)$$

donde $V_{L,R}^l$ tienen que ser matrices unitarias para preservar la estructura canónica de los términos cinéticos que aparecen en el sector de corrientes. El lagrangiano en términos de los campos rotados tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \bar{E}_L V_L^l M^l V_R^{l\dagger} E_R + h.c. \quad (34)$$

Las matrices $V_L^l M^l V_R^{l\dagger}$ son reales y diagonales ya que las matrices $V_{R,L}^l$ son unitarias, además diagonalizan simultáneamente todo el sector de Yukawa

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \bar{E}_L \bar{M}^l E_R + h.c. \quad (35)$$

donde la matriz \bar{M}^l está dada por

$$\bar{M}^l = \begin{pmatrix} M^e & 0 & 0 \\ 0 & M_\mu & 0 \\ 0 & 0 & M_\tau \end{pmatrix}. \quad (36)$$

En términos de los eigenestados de masa, tal y como ocurre en el sector de quarks, el sector de Yukawa para leptones conserva el sabor y el bosón de Higgs solo se acopla al mismo leptón cargado.

2.1.6. El sector de corrientes

Este sector se genera al sustituir la derivada ordinaria en la parte cinética de los fermiones quirales por la derivada covariante asociada al grupo electrodébil, lo cual genera términos de interacción caracterizados por las estructuras de Lorentz γ_μ y $\gamma_\mu \gamma_5$. Las interacciones de los fermiones con los bosones de norma, dan lugar a las corrientes cargadas y neutras, en términos de los campos eigenestados de norma, los cuales en el caso de los fermiones serán denotados con una prima. El sector de corrientes conserva el sabor de familias en la base de eigenestados de norma. Esto se debe a la necesidad de definir correctamente a los términos cinéticos, los cuales no pueden involucrar el producto de dos términos de diferentes familias, es decir; la expresión de la forma $i\bar{f}_{Lj}\gamma^\mu\partial_\mu f_{Li}$ con i distinto de j , no tiene interpretación directa en el contexto de campo libre.

El lagrangiano se descompone en dos partes, una que tiene que ver con los quarks únicamente y la otra con los leptones, esto es:

$$\mathcal{L}^c = \mathcal{L}_q^c + \mathcal{L}_l^c, \quad (37)$$

donde \mathcal{L}_q^c y \mathcal{L}_l^c representan los sectores de corrientes de quarks y de leptones respectivamente.

2.1.7. El sector de corrientes de quarks

El lagrangiano correspondiente está dado por

$$\mathcal{L}_q^c = i\bar{Q}'_i \gamma^\mu D_\mu Q'_i + i\bar{u}'_{Ri} \gamma^\mu D_\mu u'_{Ri} + i\bar{d}'_{Ri} \gamma^\mu D_\mu d'_{Ri}, \quad (38)$$

donde existe una suma sobre el índice de sabor i . En la norma unitaria y usando los vectores definidos en el espacio de sabor, dados en la ecuación (22), se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^c = & i\bar{U}'_L \gamma^\mu \partial_\mu U'_L + i\bar{U}'_R \gamma^\mu \partial_\mu U'_R + i\bar{D}'_L \gamma^\mu \partial_\mu D'_L + i\bar{D}'_R \gamma^\mu \partial_\mu D'_R \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W^{-\mu} + h.c. \\ & + \left[g_L^u \bar{U}'_L \gamma_\mu U'_L + g_R^u \bar{U}'_R \gamma_\mu U'_R + g_L^d \bar{D}'_L \gamma_\mu D'_L + g_R^d \bar{D}'_R \gamma_\mu D'_R \right] V^\mu, \end{aligned}$$

con $V = \gamma, Z$ y $J_\mu^+ = \bar{u}'_{Li} \gamma_\mu \tau^+ d'_{Li}$, donde τ^+ , es el operador de subida.

Pasando a eigenestados de masa por medio de matrices de rotación dadas en las ecuaciones (26) y (27), se tienen las siguientes conclusiones:

Las corrientes neutras conservan el sabor, por ejemplo

$$\bar{U}'_L \gamma_\mu U'_L = \bar{U}_L V_L^u \gamma_\mu V_L^{u\dagger} U_L = \bar{U}_L \gamma_\mu U_L, \quad (39)$$

análogamente para los términos

$$\bar{U}'_R \gamma^\mu \partial U'_R, \quad \bar{D}'_L \gamma^\mu D'_L, \quad \bar{D}'_R \gamma^\mu D'_R. \quad (40)$$

Las corrientes cargadas son diferentes ya que involucran quarks de diferentes familias, en este caso

$$J_\mu^+ = \bar{u}'_{Li} \gamma_\mu \tau^+ d'_{Li} = \bar{U}'_L \gamma_\mu D'_L = \bar{U}_L \gamma_\mu \left(V_L^u V_L^{d\dagger} \right) D_L = \bar{U}_L \gamma_\mu K D_L \quad (41)$$

donde $K = V_L^u V_L^{d\dagger}$, es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [79, 80]. Existe en general un efecto observable de violación de sabor fermiónico que se transfiere desde el sector de Yukawa. Se concluye que las corrientes cargadas no preservan el sabor de quarks.

2.1.8. El sector de corrientes leptónicas

El lagrangiano tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}_l^c = i\bar{L}'_i \gamma^\mu D_\mu L'_i + i\bar{l}'_{Ri} \gamma^\mu D_\mu l'_{Ri}. \quad (42)$$

el cual conserva el sabor en términos de los eigenestados de norma. En términos de la norma unitaria y de los vectores en el espacio de sabor definidos en la ecuación (22), el lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l^c = & i\bar{E}'_L \gamma^\mu \partial_\mu E'_L + i\bar{E}'_R \gamma^\mu \partial_\mu E'_R + i\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L \\ & \frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W^{-\mu} + h.c. \\ & + \left[g_L^l \bar{E}'_L \gamma_\mu E'_L + g_R^l \bar{E}'_R \gamma_\mu E'_R + g_L^\nu \bar{\nu}'_L \gamma_\mu \nu'_L \right] V^\mu, \end{aligned} \quad (43)$$

donde $J_\mu^+ = \bar{\nu}'_{Li} \gamma_\mu \tau^+ l'_{Li}$ y $V = \gamma, Z$. Debido a que el neutrino desaparece totalmente del sector leptónico de Yukawa en esta norma, podemos elegir la transformación de estos campos de manera conveniente, en particular, de manera que elimine los efectos de violación de sabor en las corrientes cargadas. Pidiendo que los términos cinéticos deben mantener su forma canónica, las transformaciones deben ser unitarias, así que eligiendo a las matrices de rotación E_L y E_R

$$E_L = V_L^l E'_L, \quad (44)$$

$$E_R = V_R^l E'_R, \quad (45)$$

$$\nu_L = V_L^l \nu'_L, \quad (46)$$

donde se han transformado a los neutrinos con la matriz V_L^l . Con la elección anterior podemos ver que el doblete izquierdo se transforma como

$$L_i = V_{Lij}^l L'_j, \quad (47)$$

donde V_L^l actúa sobre cada componente de L_i . Utilizando la definición de J_μ^+ y las ecuaciones (44), (45), (46) y (47) se tiene

$$J_\mu^+ = \bar{L}'_i \gamma_\mu \tau^+ L'_i = \bar{L}_j \gamma_\mu V_{Lji}^l V_{Lik}^{l\dagger} \tau^+ L_k = \delta_{jk} \bar{L}_j \gamma_\mu \tau^+ L_k = \bar{L}_j \gamma_\mu \tau^+ L_j, \quad (48)$$

es decir no hay cambio de sabor. La ausencia de violación de sabor en el sector leptónico de corrientes no solo se debe a la inexistencia del neutrino derecho, sino que originalmente es invariante de sabor.

2.2. Física más allá del Modelo Estándar

La física de neutrinos ha sido uno de los temas con más relevancia en el universo de las partículas elementales hacia el entendimiento de la naturaleza en su estado fundamental. Su existencia fue propuesta por Wolfgang Pauli [70] a finales de 1930 en lo que llamó un remedio desesperado para salvar el principio

de la conservación de la energía que aparentemente se violaba en los procesos de decaimiento β . En 1932, Chadwick [71] descubrió una partícula neutra, sin embargo era demasiado pesada para corresponder a la partícula predicha por Pauli. Esta partícula no debía tener carga eléctrica, por eso Enrico Fermi [72] la llamó neutrino que quiere decir el pequeño neutral en Italiano y lo incluyó en lo que fue el primer modelo de las interacciones débiles (1934). En el momento de su propuesta, la masa de neutrinos se supuso que era del orden de la masa del electrón e incluso sin masa. Ahora sabemos que los neutrinos tienen masa, aunque se conocen sólo dos pequeños valores de las diferencias de masas cuadráticas [58]. El origen de la pequeña masa del neutrino es aún un misterio. Se cree comúnmente que sus masas son una manifestación de baja energía de la física mas allá del Modelo Estándar, y su pequeñez se debe a la supresión generada por una nueva escala de alta energía, tal vez relacionada a la unificación de fuerzas. Desde la propuesta de Pauli, los neutrinos masivos han sido un tema de intensa investigación experimental y teórica.

Es sabido que en el ME hay tres sabores de neutrinos ligeros acoplados mediante interacciones débiles al bosón de norma Z . Similar al sector de quarks, los eigestados de sabor (o interacción) ν_α , son una combinación lineal de los eigenestados de masa ν_i por medio de la matriz de mezcla 3×3 unitaria, U , usualmente llamada *Matriz PMNS* [73] (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Denotando los eigenestados de sabor y masa respectivamente por

$$\nu_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad \nu_i = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\nu_\alpha = U \nu_i, \tag{49}$$

donde los índices $\alpha = e, \mu, \tau$ y $i = 1, 2, 3$ con

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz PMNS son parámetros fundamentales del sector de sabor leptónico del Modelo Estándar. La condición de unitariedad implica que U puede ser descrita por cuatro variables independientes las cuales son usualmente parametrizadas por [5]

$$U \equiv U(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta), \tag{50}$$

donde θ_{ij} son los ángulos de mezcla entre ν_i y ν_j , y δ es una fase de Dirac que caracteriza posible violación de violación de CP.

Siendo eléctricamente neutros, los neutrinos pueden ser partículas de *Dirac* o *Majorana* [5]. La diferencia esencial de estos dos tipos de neutrinos radica en el número de grados de libertad que caracteriza a cada uno: el neutrino de Dirac masivo requiere de cuatro grados de libertad, mientras que el neutrino de Majorana requiere sólo de dos [5]. Una implicación importante de esto es que en el caso de los neutrinos de Majorana la partícula coincide con la antipartícula, lo que se expresa, matemáticamente, a través de la *condición de Majorana*, $\nu^c = \nu$, donde ν^c es el campo de carga conjugada que le corresponde al campo fermiónico ν . La parametrización de la matriz PMNS es diferente, dependiendo de si los neutrinos son partículas de Majorana o de Dirac.

- Para neutrinos de Dirac, una parametrización conveniente de esta matriz es [5]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

donde $c_{ab} = \cos\theta_{ab}$ y $s_{ab} = \sin\theta_{ab}$. Como se puede apreciar en la ecuación anterior, la matriz PMNS para neutrinos de Dirac se parametriza mediante los tres ángulos de mezcla θ_{12} , θ_{13} y θ_{23} , y una fase compleja, δ , conocida como la fase de Dirac. Los valores de los ángulos de mezcla y la fase de Dirac se encuentran en los rangos [58] $0 \leq \theta_{ab} \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \delta \leq 2\pi$.

- Para los neutrinos de Majorana la situación diferente, ya que la parametrización de U requiere de dos fases complejas adicionales, las cuales reciben el nombre de fases de Majorana. En este contexto, las fases de Majorana se pueden factorizar, de manera que la matriz PMNS se expresa como [5]

$$U = U^D D^M, \quad (52)$$

donde D^M es una matriz diagonal de la forma

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}), \quad (53)$$

con $\lambda_1 = 0$. Por otra parte, la matriz U^D se parametriza como la matriz mostrada en la ecuación (51). Una implicación de la factorización mostrada en la ecuación (53) es que los experimentos que involucran oscilaciones de neutrinos no son sensibles a las masas de Majorana [5]. Las fases complejas son fuente de violación de la simetría discreta CP .

La oscilación de neutrinos³ [15] es un fenómeno mecánico—cuántico bien establecido, explicado por la teoría cuántica de campos. Pauli primero propuso el neutrino para explicar el espectro continuo de electrones en la desintegración β [70]. En la descripción del ME, los neutrinos carecen de masa y son partículas que interactúan muy débilmente. Sin embargo, para dar una interpretación correcta de los resultados experimentales se estableció que los neutrinos son masivos y los leptones se mezclan [74,75]. La oscilación de neutrinos, implica que los neutrinos pueden cambiar de un sabor a otro, también es una consecuencia de las masas de los neutrinos y la mezcla de leptones. Esto significa que un rayo de neutrinos (producidos a través de decaimientos de interacciones débiles, correspondientes a algún sabor definido) puede espontáneamente cambiar, u oscilar, en neutrinos de diferentes sabores, por ejemplo $\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu$, mientras viajan en el vacío. Las oscilaciones son generadas por la interferencia de diferentes neutrinos masivos, los cuales son producidos y detectados coherentemente por sus muy pequeñas diferencias de masas. Por lo tanto, las oscilaciones de neutrinos indican una incompletitud del ME y abre una ventana para la física más allá de ME.

2.3. Dimensiones extras

La propuesta partía de la relatividad general del propio Einstein, que describe el efecto de la gravedad como curvatura del espacio-tiempo, la diferencia radicaba en que Kaluza había extendido la teoría para examinar las interacciones gravitacionales en un universo vacío, pero con una dimensión espacial adicional a las cuatro del espacio-tiempo de la relatividad de Einstein. Desde la perspectiva convencional, confinados a tres dimensiones espaciales y una temporal (que llamaremos el espacio de Minkowski), la teoría en el espacio completo se proyectaba, en objetos en cuatro dimensiones, cuyo contenido tenía una interpretación muy diferente. La teoría de un universo vacío de cinco dimensiones de Kaluza, al mirarse desde cuatro dimensiones, se convertía en la teoría de un universo ocupado por ondas electromagnéticas. Esta notable unificación de dos fenómenos disímiles recordaba la unificación ocurrida cuando Maxwell mostró que los fenómenos eléctricos y magnéticos eran dos aspectos complementarios de una entidad más fundamental.

En 1926 Oskar Klein combinó las ideas de Kaluza con algunas ideas de la mecánica cuántica y pudo dar una estimación cuantitativa tanto de la cuantización de la carga como de la pequeñez e inobservabilidad práctica de la dimensión adicional. Klein se dedicó a explorar las consecuencias para la teoría cuántica y el electromagnetismo, y en el curso de su investigación topó con una explicación razonable a la invisibilidad perceptual de la hipotética quinta dimensión de Kaluza. Las dimensiones del universo que habitamos, las del espacio de Minkowski, son aparentemente planas e infinitas, en cualquier caso, lo son en una escala vastamente mayor a la escala en la que transcurren nuestras vidas humanas. Lo que Oskar Klein proponía

³Este fenómeno fue propuesto a finales de 1950 por Pontecorvo.

era radicalmente diferente, su solución consistía en considerar una quinta dimensión que no se extendía hacia el infinito en ambas direcciones, sino que estaba enrollada sobre sí misma.

Estas extradimensiones tenían que ser introducidas de modo que tales teorías no contradigan lo que observamos en nuestro espacio 4-dimensional. La mejor manera de hacer esto es asumir que la razón por la cual no podemos observar las dimensiones extras es que contrariamente a las 4 dimensiones espacio-tiempo, las cuales son muy grandes, estas hipotéticas dimensiones extras son finitas, es decir, están compactificadas. Necesitaríamos entonces probar escalas correspondientes al tamaño de las extradimensiones de manera que puedan ser detectadas. Si el tamaño de las extradimensiones son diminutas, entonces se necesita de energías extremadamente altas, debido a las extradimensiones.

¿Que significa compactificar una extradimension? Imagínese que nuestra dimension toma cierta forma compacta, como un círculo, de modo que viajan a lo largo de esta extradimension regresando rápidamente al origen. Así, tomándose la compactificación en un círculo como ejemplo, imaginemos que a cada punto en el espacio, existe un círculo adicional de radio R el cual es ortogonal a todos las dimensiones conocidas

1

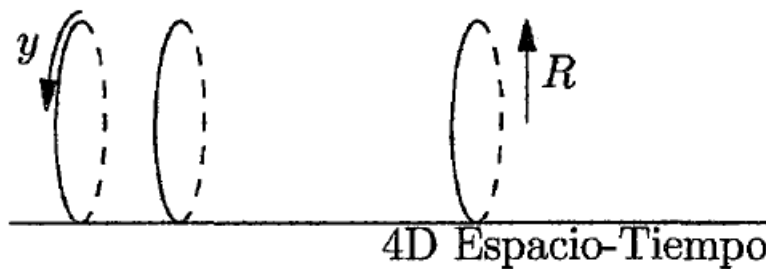


Figura 1: Compactificación en un círculo de radio R .

En este ejemplo, el espacio-tiempo tiene una topología $M^4 \times S_1$ donde M^4 es un espacio 4-dimensional de Minkowski y S_1 es un círculo de radio R . Si este radio es lo suficientemente pequeño que no podemos probar esta estructura en nuestro espacio, la extradimension definida por esta coordenada en esencia sería no observada.

Las teorías de Kaluza y Klein (KK) inicialmente proponían una manera de unificar la teoría de Relatividad General de Einstein con la teoría Electromagnética [39], sugiriendo un dispositivo ingenioso al postular una quinta dimensión espacial, la cual tiene una topología compacta dada por el círculo S_1 . Dada la topología de la variedad compacta, todos los campos son periódicos respecto a la dimensión extra y deberían poderse escribir como una expansión en serie de Fourier, obteniendo una torre infinita de tensores, vectores y modos escalares con masas cuantizadas en unidades de la inversa del radio de S_1 . Sin embargo la teoría fue abandonada debido a problemas de consistencia. Con el paso del tiempo, el procedimiento de KK se implementó a cualquier teoría de campo, diferente a Relatividad General, obteniendo de esta

manera teorías efectivas de Kaluza-Klein. Al aplicar el procedimiento de KK a teorías de norma formuladas en un espacio-tiempo con dimensiones extras universales compactas surgen campos de norma, sin embargo hay modos de Kaluza-Klein que no son campos de norma, llamados excitaciones de KK, dotados de masa en la ausencia de un vacío degenerado, de donde se infiere que el procedimiento de KK es otro mecanismo de generación de masas, alternativo al rompimiento espontáneo de simetría [48–50]. Existen varios modelos con dimensiones extras que surgen de diversas motivaciones físicas [49]. Las dimensiones extras, para que sean detectables, deben ser compactas pero de un tamaño compatible con las energías en consideración. Pueden ser planas o involucrar una métrica extra-dimensional deformada, como los modelos de Randall-Sundrum (RS) [39, 40]. Las dimensiones extras pueden ser accesibles solo por gravedad, como los modelos de Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali (ADD) [37–39], o incorporar campos del ME dentro de las dimensiones adicionales, como los modelos de Dimensiones Extras Universales (DEU) [35]. En particular, los modelos DEU consisten de un espacio-tiempo $4+n$ dimensional con todas las n dimensiones adicionales compactas. En estas teorías, los campos de norma y materia viven igualmente en todas las dimensiones; además, su cuantización requiere que los parámetros de norma estén también definidos en todas las dimensiones [35]. Las características que definen a los modelos DEU son el número de dimensiones extras compactas, su topología y sus tamaños. Las teorías con dimensiones extras se volvieron populares desde que se argumentó [35] que dimensiones extras relativamente grandes podrían manifestarse a la escala de TeVs, lo que las convierte en foco de atención fenomenológica [48]. En efecto, si existen dimensiones extras relativamente grandes, éstas podrían afectar la dinámica de las partículas conocidas, estando, por lo tanto, al alcance de los experimentos que se realizarán en el colisionador LHC.

2.3.1. Compactificación

Consideremos una teoría d -dimensional ($d = 4 + n$), con d extradimensiones y una acción definida como [81]

$$S_d = \int dz^d \mathcal{L}_D[\phi_z] \quad (54)$$

entonces decimos que la teoría esta compactificada sobre $M^4 \times C$, donde M^4 es el espacio de Minkowski y C un espacio compacto si las coordenadas pueden dividirse como $Z^m = (x^u, y^m)$, ($u = 0, 1, 2, 3; m = 1, \dots, d$) y las coordenadas y^m describen a un espacio compacto C . La lagrangiana 4-dimensional es obtenida después de integrar sobre las coordenadas compactas y^m como

$$\mathcal{L} = \int dy^d \mathcal{L}_D[\phi(x^m, y^m)] \quad (55)$$

esta lagrangiana contiene la propagación y las interacciones de todos los campos, masivos y no masivos.

2.3.2. Reducción Dimensional

Para tener una idea de como se llegara a una teoría 4-dimensional a partir de una de mayor dimensión tomemos el caso de que tenemos una lagrangiana 5-dimensional, donde la quinta dimension está compactificada en un círculo de radio a . Sea ϕ un campo escalar para el cual una acción espacio-temporal toma la forma

$$S_{d=5} = \int dx^4 dy (\partial^A \phi \partial_A \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (56)$$

donde A corresponde al espacio-tiempo de Minkowski, con $A = \mu$, y $x^4 = y$, para $A = 4$. Puesto que la quinta dimension es un círculo, ϕ debe de ser periódica a lo largo de la coordenada y , es decir, tendremos que

$$\phi(x^\mu, y) = \phi(x^\mu, y + 2\pi R) \phi^n(x^\mu) \exp^{in \frac{y}{R}} \quad (57)$$

esto quiere decir que el campo se puede expandir en series de Fourier de la siguiente manera

$$\phi(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) \exp^{in \frac{y}{R}} \quad (58)$$

ahora integramos respecto de y para obtener la siguiente acción

$$S = \sum_n \int dx^4 \left[\partial_\mu \phi^n \partial^\mu \phi^n - \left(m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) \phi^n \phi^n \right] \quad (59)$$

que describe una teoría de campos 4-dimensional con un número infinito de campos escalares ϕ^n , los cuales son conocidos como los modos KK de ϕ . La masa de estos campos está dada por la siguiente expresión

$$m_n = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{R^2}} \quad (60)$$

2.3.3. Características generales de teorías de campos en dimensiones extras

Se propone una extensión del ME definiendo una variedad del espacio-tiempo plano es $d = 4 + n$, $\mathcal{M}^d = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^d$, donde \mathcal{M}^4 es el espacio-tiempo de Minkowski 4-dimensional y \mathcal{N}^d una variedad d -dimensional representando una extensión puramente espacial, con d arbitrario.

Como punto de partida, se considera una teoría de campo efectiva [51, 52], la cual es gobernada por los grupos de Poincaré $ISO(1, 3+n)$ y de norma $\mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM} \equiv SU_C(3, \mathcal{M}^d) \times SU_L(2, \mathcal{M}^d) \times U_Y(1, \mathcal{M}^d)$, cuyos parámetros son definidos sobre toda la variedad \mathcal{M}^d . Los campos de materia y de norma de la teoría, denotados colectivamente por $\Phi_A(x, \bar{x})$, con $(x, \bar{x}) \in \mathcal{M}^d$, proporcionan una representación del grupo de Lorentz extendido $SO(1, 3+n)$. Bajo estas consideraciones, la acción de la teoría puede ser escrita como

$$S = \int d^A x d^n \bar{x} \mathcal{L}_{4+n}(\Phi_A(x, \bar{x}), \partial_M \Phi_A(x, \bar{x})) \quad (61)$$

con

$$\mathcal{L}_{n+4} = \mathcal{L}_{4+n}^{SM}(\Phi_A(x, \bar{x}), \partial_M \Phi_A(x, \bar{x})) + \sum_{K,i} \frac{\lambda_{K,i}}{\Lambda^K} \mathcal{O}_i^{K+d}(\Phi_A(x, \bar{x}), \partial_M \Phi_A(x, \bar{x})) \quad (62)$$

donde el primer término corresponde a una extensión directa de la estructura funcional del lagrangiano del ME 4-dimensional a la variedad d -dimensional, el cual no es renormalizable en el sentido de Dyson [53]. Debido a esto no existe criterio para ignorar las invariantes de más altas dimensiones, de ahí toda la razón de incluir el segundo término en la Eq. 62, el cual de hecho, corresponde a una serie infinita, compuesta por operadores invariantes de Lorentz y de norma, \mathcal{O}_i^{K+d} , de dimensión canónica mayor que d , multiplicados por constantes de acoplamiento desconocidos $\lambda_{K,i}/\Lambda^K$, donde Λ es una escala de energía. Bajo estas suposiciones mencionadas y después de hipótesis juiciosas la Eq. 62, nos permite construir una teoría efectiva para el ME extra-dimensional, incluye el ME, más términos que involucran interacciones entre campos del ME y excitaciones de KK, así como interacciones sólo entre campos de KK.

La idea esencial consiste en pasar de la teoría descrita anteriormente, la cual esta gobernada por los grupos extendidos $\{ISO(1, 3+n), \mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}\}$, a una teoría que sea invariante bajo los grupos de simetría estándar $\{ISO(1, 3), \mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}\}$. Para llevar acabo esto es necesario implementar dos transformaciones de punto. En una primera transformación, uno mapea objetos covariantes de $SO(1, 3+n)$ en objetos covariantes de $SO(1, 3)$. Sin embargo, la teoría que resulta de está transformación esta escrita en campos que aun dependen de los puntos de variedad completa, (x, \bar{x}) , por lo que es necesario realizar una segunda transformación que nos permita remover los puntos \bar{x} como índices de conteo de grados de libertad. Dicho de manera equivalente, es necesario eliminar todo papel dinámico del subgrupo $ISO(n)$ de $ISO(1, 3+n)$, ya que deseamos arribar a una teoría en la que las únicas simetrías exactas sean dictadas por los grupos estándar $\{ISO(1, 3+n), \mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}\}$. Dado que los mapeos que se implementan son invertibles, lo que en realidad se está haciendo es ocultar la simetría $\{ISO(1, 3+n), \mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}\}$ en la simetría $\{ISO(1, 3), \mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}\}$. Pero esto es lo que permite dotar con masa a los campos de norma, ya que bajo la perspectiva del grupo $\{ISO(1, 3), \mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}\}$ aparecen como representaciones tensoriales de $\mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}$, es decir como campos de materia. Aunque el ocultamiento de la simetría es común en el mecanismo de Higgs, en nuestro caso no existe rompimiento de simetría espontaneo de la simetría ya que $\mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}$ y $\mathcal{G}(\mathcal{M}^4)_{SM}$ son idénticos como grupos de Lie (tiene el mismo número de generadores), pero difieren como grupos de norma debido a que tienen diferentes variedades de soporte. En nuestro caso, el mecanismo que dota de masa a los campos de norma tiene que ver con un segundo mapeo, dado por una serie de Fourier multidimensional, el cual, en esencia, es un mapeo de grupo de las traslaciones extendido $T(1, 3+n)$ al grupo de las traslaciones

estándar $T(1, 3)$. Las masas de Kaluza-Klein surgen de la actuación de las derivadas con respecto a las dimensiones extras, lo cual tiene que ver con los generadores del subgrupo de las traslaciones $T(n)$.

Ahora pasemos a describir brevemente el primero de los mapeos. En el caso donde $\Phi_A(x, \bar{x})$, representa un campo escalar $\Phi(x, \bar{x})$, también es un escalar con respecto $SO(1, 3)$, si $\Phi(x, \bar{x})$ representa una componente de un campo vectorial de $S = (1, 3 + n)$, este puede ser renombrado como $\mathcal{A}_M(x, \bar{x}) (M = 0, 1, 2, \dots, 3; 5, \dots, d \equiv \mu; \bar{\mu})$, el cual es mapeado a dos objetos diferentes de un campo vectorial de componentes \mathcal{A}_μ y n campos escalares, denotados por $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$ para el caso de un espinor $\Phi(x, \bar{x})$ (de $2^{d/2} = 2^{\frac{4+n}{2}}$, componentes con d par) de $SO(1, 3 + n)$ puede ser desdoblado en $2^{\frac{n}{2}}$ espinores de (4-componentes) de $SO(1, 3)$. En general la transformación del conjunto de objetos $\{\varphi_\alpha\}$, de la misma cardinalidad, bien definidos con respecto a $SO(1, 3)$, es una transformación de punto que puede ser elevada a una transformación canónica en el formalismo de Hamiltoniano [54, 55]. Esta transformación es importante, ya que al cuantizar el sistema es necesario tener objetos bien definidos respecto a las simetrías espacio-temporales estándar. Bajo este mapeo el lagrangiano 62 es ahora una función de los campos covariantes de $ISO(1, 3)$, $\{\varphi_\alpha\}$, el cual podemos escribir simbólicamente como

$$\mathcal{L}_{4+n} = \mathcal{L}_{4+n}^{SM}(\varphi_\alpha, \partial_\mu \varphi_\alpha, \partial_{\bar{\mu}} \varphi_\alpha) + \sum_{K,i} \frac{\lambda_{K,i}}{\Lambda^K} \mathcal{O}_i^{k+d}(\varphi_\alpha, \partial_\mu \varphi_\alpha, \partial_{\bar{\mu}} \varphi_\alpha) \quad (63)$$

La teoría definida por 63 es todavía invariante bajo el grupo de norma $\mathcal{G}(\mathcal{M}^d)_{SM}$ y es manifiestamente invariante bajo $SO(1, 3)$. Aunque la simetría de $ISO(1, 3 + n)$, todavía esta presente, ya no es manifiesta, es oculta [55].

Para implementar un segundo mapeo, uno necesita asumir que la variedad \mathcal{N}^n es compacta e introducir una geometría específica. De forma general se asume \mathcal{N}^n es dada por n copias del orbifold S_1/Z_2 , donde, en general uno puede introducir diferentes radios R_i para cada copia. Entonces uno puede asumir que los campos $\{\varphi_\alpha(x, \bar{x})\}$, son periódicos en las dimensiones extras espaciales, permitiendo realizar un mapeo canónico [54], que asegura desde el punto de vista clásico, la equivalencia de teorías antes y después de la compactificación. Este mapeo es una expansión en serie de Fourier de los campos básicos, cuyos coeficientes dependen únicamente de x , $\{\phi_\alpha^{(0, \dots, 0)}(x), \phi_\alpha^{(m_1, 0, \dots, 0)}(x), \dots, \phi_\alpha^{(m_1, \dots, m_n)}(x)\} \equiv \{\phi_\alpha^{(0)}, \phi_\alpha^{(\underline{m})}\}$, con $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Donde el índice de Fourier colectivo (\underline{m}) , significa alguna combinación de $(\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_n)$, con $m_i \in \mathbb{N}$ y la opción de $(0, \dots, 0) \equiv (0)$, modo cero, es excluido considerando únicamente los modos excitados de KK. Nos referimos a cada tipo de coeficientes, como una torre de excitaciones de KK de un campo correspondiente, bajo este lenguaje especial, algún campo φ_α tiene asociado $2^n - 1$ torres de excitaciones de KK $\phi_\alpha^{(\underline{m})}$ y un modo cero $\phi_\alpha^{(0)}$.

Con el fin de recuperar el ME en el límite cuando $R_i \rightarrow 0$, es necesario definir una paridad sobre cada campo. Los campos básicos que podrán tener el modo cero de KK, $\phi_\alpha^{(0)}$, en la expansión, los identificaremos como los campos del ME 4-dimensional, es decir, la teoría de bajas energías. De esta forma, el conjunto

de campos $\{\varphi_\alpha\}$ es dividido en campos pares $\{\varphi_\alpha^E\}$ e impares $\{\varphi_{\alpha'}^O\}$, tal que su expansión de Fourier es escrita de manera sucinta como

$$\varphi_\alpha^E(x, \bar{x}) = \phi_\alpha^{(0)}(x) f_E^{(0)} + \sum_{(\underline{m})} \phi_\alpha^{(\underline{m})}(x) f_E^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) \quad (64)$$

$$\varphi_{\alpha'}^O(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} \phi_{\alpha'}^{(\underline{m})}(x) f_O^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) \quad (65)$$

donde el símbolo de $\sum_{(\underline{m})}$ resume un total de $2^n - 1$ series diferentes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sum_{(\underline{m})} \phi^{(\underline{m})}(x) f_{E,O}^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \phi^{(m_1, 0, \dots, 0)}(x) f_{E,O}^{(m_1, 0, \dots, 0)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) + \sum_{m_2=1}^{\infty} \phi^{(0, m_2, 0, \dots, 0)}(x) f_{E,O}^{(0, m_2, 0, \dots, 0)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) \\ &+ \dots + \sum_{m_1, m_2}^{\infty} \phi^{(m_1, m_2, 0, \dots, 0)}(x) f_{E,O}^{m_1, m_2, 0, \dots, 0}(\bar{p} \cdot \bar{x}) + \dots \\ &+ \sum_{m_1, \dots, m_n=1}^{\infty} \phi^{(m_1, \dots, m_n)}(x) f_{E,O}^{(m_1, \dots, m_n)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) \quad (66) \end{aligned}$$

La masa de una partícula que se propaga en la variedad $4+n$ -dimensional es $P_M P^M = m_{\phi^{(\underline{m})}}^2$, con momento $P^M = \{p^\mu, p^{\bar{\mu}}\}$, donde, de las relaciones $\partial_{\bar{\mu}} f_{E,O}^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \pm p_{\bar{\mu}} f_{E,O}^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x})$, el momento correspondiente a las dimensiones extras, $p^{\bar{\mu}}$, se discretiza de manera natural, ya que este depende del modo de KK (\underline{m}) . Desde la perspectiva de $SO(1, 3)$, se tiene $p_\mu p^\mu = -p_{\bar{\mu}} p^{\bar{\mu}} + m_{\phi^{(\underline{m})}}^2$, consecuentemente las excitaciones de KK surgen con masa igual⁴

$$m_{\phi^{(\underline{m})}}^2 = m_{(\underline{m})}^2 + m_{\phi^{(0)}}^2; \quad -p_{\bar{\mu}} p^{\bar{\mu}} \equiv m_{(\underline{m})}^2 \quad (67)$$

De los puntos anteriores, puede verse que este proceso de compactificación induce un mecanismo de *tipo Higgs* [54], donde la escala de compactificación, $m_{(\underline{m})}$, contribuye a las masas de las excitaciones de KK exclusivamente en la forma de 67. El mapeo de 6465, conduce a un sistema físico cuyos grados de libertad, $\{\phi_\alpha^{(0)}(x), \phi_\alpha^{(\underline{m})}(x), \phi_{\alpha'}^{(\underline{m})}(x)\}$, ya no necesitan de índices continuos \bar{x} .

Después de asumir la paridad sobre los parámetros de norma $\alpha(x, \bar{x})$, (similar a 65), las transformaciones de norma asociados con $\mathcal{G}(\mathcal{M}^d)$ se descomponen en dos tipos de transformaciones de norma independientes, un grupo de transformaciones de norma esta definido por parámetros $\alpha^{(0)}(x)$, el modo cero de KK, el cual corresponde a la Transformación de Norma Estándar (TNE) del ME en \mathcal{M}^4 , describiendo al grupo de norma $\mathcal{G}(\mathcal{M}^4)_{SM} = SU(3, \mathcal{M}^4) \times SU(2, \mathcal{M}^4) \times U(1, \mathcal{M}^4)$. Los otros tipos de transformaciones de norma están determinados por los parámetros $\alpha^{(\underline{m})}(x)$, las cuales llamamos Transformaciones de Norma No Estándar (TNNE), las cuales no forman un álgebra cerrada de Lie. Como se ha demostrado en [54, 55], la existencia

⁴Usamos la métrica con signatura negativa: $g_{MN} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$

de estos dos tipos de simetrías es común al fenómeno de ocultamiento de una simetría. Para cuantizar la teoría, es necesario tener en cuenta ambos tipos de transformaciones de norma [55].

Después de sustituir la expansión de Fourier e integrar las dimensiones extras compactas a la acción 61, uno tiene una teoría efectiva en la que las simetrías estándar $\{SO(1, 3), \mathcal{G}(\mathcal{M}^4)_{SM}\}$, son manifiestas, esto es

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}^{D=4} + \mathcal{L}_{eff}^{D>4} \quad (68)$$

donde $\mathcal{L}_{eff}^{D=4}$, viene directamente de \mathcal{L}_{eff}^{SM} en la ecuación 63 y contiene solo interacciones renormalizables descritas por

$$\mathcal{L}_{eff}^{D=4} = \mathcal{L}^{SM} \left(\phi_\alpha^{(0)}, \partial_\mu \phi_\alpha^{(0)} \right) + \sum_{(m)} \mathcal{L}^{(m)} \left(\phi_\alpha^{(0)}, \partial_\mu \phi_\alpha^{(0)}; \phi_\alpha^{(n)}, \partial_\mu \phi_\alpha^{(n)} \right) \quad (69)$$

siendo \mathcal{L}^{SM} el lagrangiano del ME. El segundo término corresponde a una serie infinita que contiene acoplamientos entre campos del ME y excitaciones de KK, así como interacciones únicamente entre excitaciones de KK. Este lagrangiano depende de la escala de compactificación vía las masas de los campos de excitaciones de KK, (m) , asociados a las partículas conocidas, pero no depende de la escala de Λ , además se espera que $v < m_{(m)} < \Lambda$, con v la escala de Fermi. También debido a la presencia de los campos de excitaciones de KK, el lagrangiano de 69, además de las divergencias que surgen de la teoría cuántica de campos asociado con los efectos de distancias cortas, contiene divergencias que surgen de considerar contribuciones virtuales de número infinito de partículas, a saber, las excitaciones de KK.

El término $\mathcal{L}_{eff}^{D>4}$ en 68 contiene solo términos no renormalizables, los cuales dependen explícitamente (y posiblemente implícitamente a través de los coeficientes desconocidos) de la escala de la nueva física Λ . Tal lagrangiano está descrito por

$$\mathcal{L}_{eff}^{D>4} = \sum_{K,i} \frac{\alpha K, i}{\Lambda^K} \mathcal{O}_i^{(K+4)} \left(\phi_\alpha^{(0)}, \partial_\mu \phi_\alpha^{(0)} \right) + \sum_{K,i} \frac{\beta K, i}{\Lambda^K} \sum_{(m)} \mathcal{O}_i^{(k+4)(m)} \left(\phi_\alpha^{(0)}, \partial_\mu \phi_\alpha^{(0)}; \phi_\alpha^{(n)}, \partial_\mu \phi_\alpha^{(n)} \right) \quad (70)$$

donde el primer término depende únicamente de los modos cero, esto es, de las partículas de ME, mientras que el segundo término depende también de las excitaciones de KK. Este lagrangiano depende de las tres escalas: v, R^{-1} (R tamaño de la variedad compacta o escala de energía de compactificación) y Λ .

Es el lagrangiano $\mathcal{L}_{eff}^{D=4}$, el cual contiene términos de dimensión canónica $D = 4$ y es derivado de la extensión directa de ME como sigue

$$\mathcal{L}_{eff}^{D=4} = \int d^n \bar{x} \mathcal{L}_{(4+n)}^{SM} \quad (71)$$

donde

$$\mathcal{L}_{(4+n)}^{SM} = \mathcal{L}_{(4+n)}^{YM} + \mathcal{L}_{(4+n)}^H + \mathcal{L}_{(4+n)}^C + \mathcal{L}_{(4+n)}^Y \quad (72)$$

con $\mathcal{L}_{(4+n)}^{YM}$, $\mathcal{L}_{(4+n)}^H$, $\mathcal{L}_{(4+n)}^C$, $\mathcal{L}_{(4+n)}^Y$ denotan, la generalización directa $(4+n)$ -dimensional de los sectores de Yang-Mills, Higgs, Corrientes y Yukawa tal como los conocemos en ME ⁵.

2.3.4. Lagrangianos para las reglas de Feynman

Los lagrangianos de donde se deducen las reglas de Feynman, son los siguientes ⁶

$$\mathcal{L}_{A^{(0)}\ell_\alpha^{(k)}\ell_\alpha^{(k)}} = eN_\ell A_\mu^{(0)} \left[\bar{\ell}_{1,\alpha}^{(k)} \gamma^\mu \ell_{1,\alpha}^{(k)} + \bar{\ell}_{2,\alpha} \gamma^\mu \ell_{2,\alpha}^{(k)} \right] \quad (73)$$

$$\mathcal{L}_{A^{(0)}\nu_j^{(k)}\nu_j^{(k)}} = eN_\nu A_\mu^{(0)} \left[\bar{\nu}_{1,\alpha}^{(k)} \gamma^\mu \nu_{1,j}^{(k)} + \bar{\nu}_{2,j} \gamma^\mu \nu_{2,j}^{(k)} \right] \quad (74)$$

$$\mathcal{L}_{\nu_j^{(0)}\ell_\alpha^{(k)}W^{(k)}} = \frac{gU_{\alpha j}}{\sqrt{2}} W_\mu^{(k)} + \bar{\nu}_l^{(0)} \gamma^\mu P_L \left[\sin\theta_{\ell_\alpha^{(k)}} \ell_{1,\alpha}^{(k)} - \cos\theta_{\ell_\alpha^{(k)}} \ell_{2,\alpha}^{(k)} \right] + H.c. \quad (75)$$

$$\mathcal{L}_{\ell_\beta^{(k)}\nu_l^{(k)}W^{(k)}} = \frac{gU_{\beta j}^*}{\sqrt{2}} W_\mu^{(k)} + \bar{\ell}_\beta^{(0)} \gamma^\mu P_L \left[\sin\theta_{\nu_j^{(k)}} \nu_{1,j}^{(k)} - \cos\theta_{\nu_j^{(k)}} \nu_{2,j}^{(k)} \right] + H.c. \quad (76)$$

⁵Para mayor detalles sobre el Modelo Estándar mínimamente extendido en dimensiones extras, se recomienda revisar [5, 54, 55, 57].

⁶Las reglas de Feynman se encuentran en el apéndice A.

3. Metodología

3.1. Decaimiento de $l_\alpha^{(0)} \rightarrow A_\mu^{(0)} l_\beta^{(0)}$.

El decaimiento que se estudiará, es de un leptón cargado que decae a otro leptón cargado y un fotón $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$. que puede representarse como 2

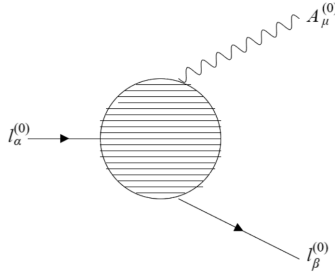


Figura 2: Representación gráfica del decaimiento estudiado.

3.2. Diagramas de Feynman.

Los diagramas de Feynman son formas gráficas para representar las interacciones. Cada punto en el que las líneas se unen se llama vértice, y en cada vértice se puede examinar las leyes de conservación que rigen las interacciones de partículas. Cada vértice debe conservar la carga y el momento.

Los diagramas desarrollados por Feynman para describir las interacciones en la electrodinámica cuántica (QED), han encontrado uso en la descripción de una variedad de interacciones de partículas.

Los diagramas de Feynman que contribuyen a a la amplitud de probabilidad son los siguientes:

- 1) Modos de Klauza-Klein de norma.
- 2) Pseudo-bosones de Goldstone.
- 3) Modos de Klauza-Klein escalares.

En nuestro caso nos centraremos en los modos excitados de Kauza-Klein de norma, de modo que los diagramas de Feynman son los siguientes.

Para poder calcular las expresiones analíticas de nuestros diagramas de Feynman y la amplitud de probabilidad, es necesario conocer las reglas de los propagadores y los vértices ⁷.

⁷Las reglas de Feynman para los propagadores y vértices se encuentran en el apéndice A.

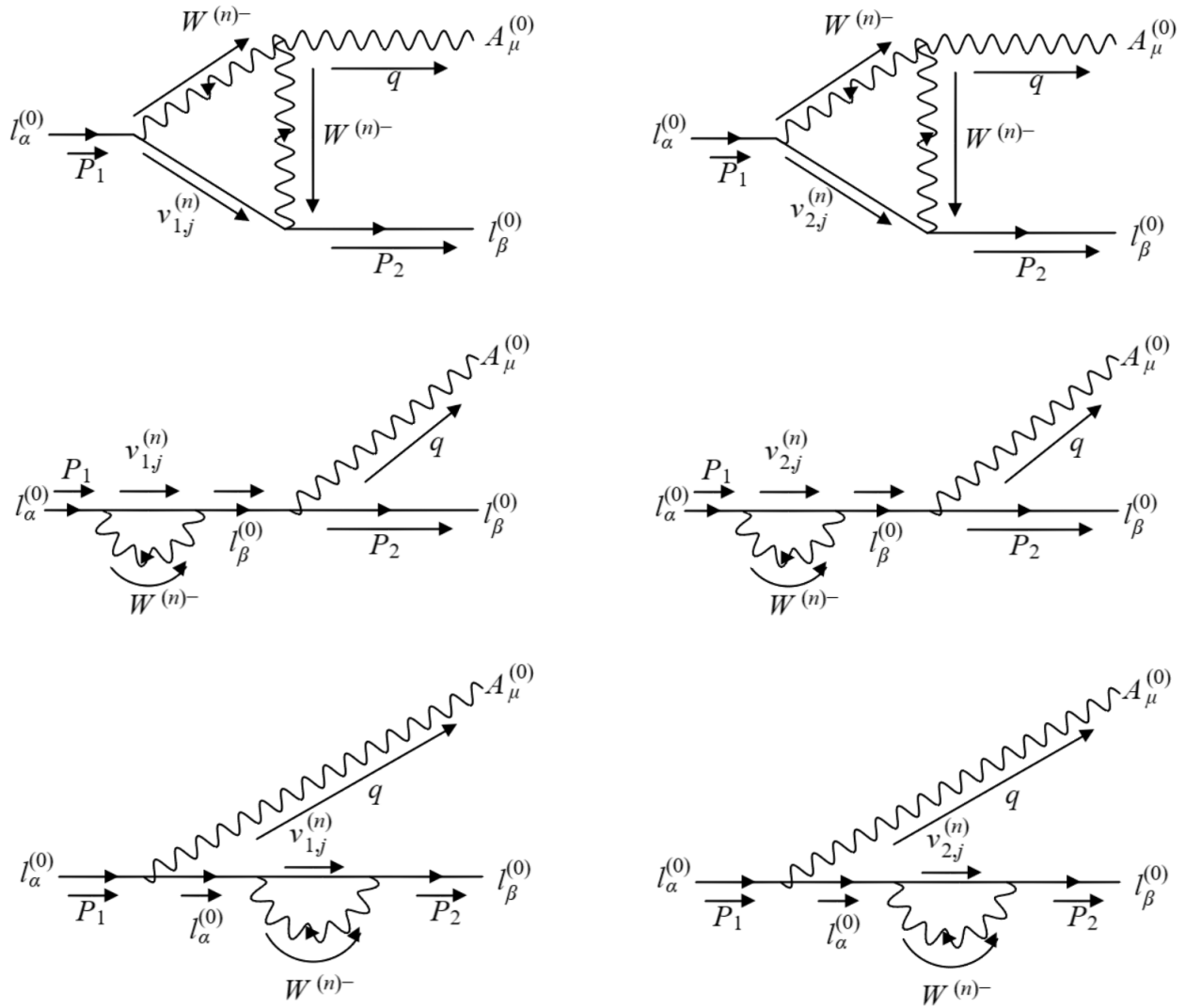


Figura 3: Diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud.

3.3. Cálculo de la expresión analítica de los diagramas de Feynman

1. Planteamiento de las expresiones analíticas correspondientes a los diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud del proceso $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$.
2. Este cálculo contiene elementos que dependen de la norma, pero, estando este vértice definido *en la capa de masa*, se usará la *norma unitaria* [29, 34, 35].

Se procedió a calcular las expresiones analíticas de la siguiente manera, para cada uno de los diagramas de Feynman:

- Primero se calcula la expresión analítica para cada diagrama de Feynman.
- Tomando que la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$.
- Se suman los diagramas de Feynman.

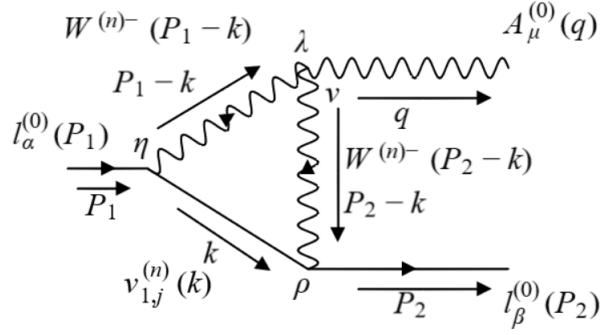


Figura 4: Diagrama de Feynman I.

Usando las reglas de Feynman podemos escribir la forma analítica del primer diagrama de Feynman 4, en la cual se está integrando sobre el lazo k , donde tenemos dos líneas externas, la primera corresponde a una matriz renglón $\bar{U}(P_1, m_{l_\beta^{(0)}})$, la segunda corresponde a una matriz columna $U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}})$, los demás términos corresponden a los propagadores del bosón, del campo del neutrino y el campo del leptón y los vértices

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\beta \zeta_1^{j(n)} U_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \frac{ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j \gamma \rho} P_L \frac{i(\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}})}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \frac{ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\
&\quad \times \frac{-i}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - (1 - \xi) \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\quad \times \frac{-i}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\lambda\eta} - (1 - \xi) \frac{(P_1 - k)^\lambda (P_1 - k)^\eta}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\quad \times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \quad (77)
\end{aligned}$$

de la forma analítica del primer diagrama de Feynman, podemos factorizar las constantes, donde e es la carga eléctrica elemental, g es la constante de acoplamiento de los grupos $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y la función $\sin^2(\theta_{n\nu_j})$, que depende del angulo de mezcla de los neutrinos

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\beta \zeta_1^{j(n)} U_\beta &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j \gamma \rho} P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\
&\quad \times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\lambda\eta} - \frac{(P_1 - k)^\lambda (P_1 - k)^\eta}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_1 - k)^\lambda (P_1 - k)^\eta}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\quad \times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \quad (78)
\end{aligned}$$

para poder calcular en la norma unitaria es importante poder describir el propagador del bosón $W^{(n)}$, para no tener divergencias a la hora de tomar el límite, para ello factorizamos ξ del numerador en el propagador del bosón

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\beta \zeta_1^{j(n)} U_\beta &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\rho P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\
&\times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{\xi - m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\times \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{\xi - m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \quad (79)
\end{aligned}$$

tomando la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$, tendremos términos que no van a contribuir al propagador del bosón, de manera que la forma analítica para el primer diagrama es la siguiente

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\beta \zeta_1^{j(n)} U_\beta &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\rho P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\
&\times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \\
&\times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \quad (80)
\end{aligned}$$

Dado que los dos primeros diagramas de Feynman son muy parecidos, la única diferencia es que tenemos un neutrino $\nu_{2,j}^{(n)}$, el razonamiento será el mismo. Usando las reglas de Feynman podemos escribir la forma

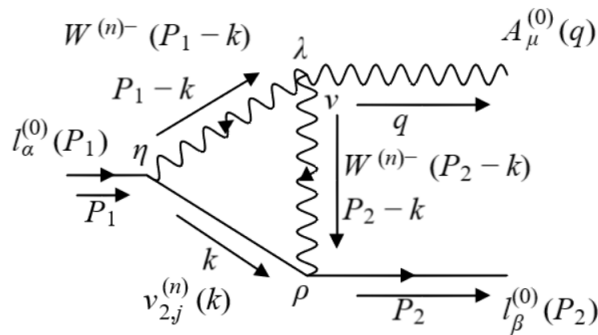


Figura 5: Diagrama de Feynman II.

analítica para el segundo diagrama de Feynman 5, en la cual se esta integrando sobre el lazo k , donde

tenemos dos líneas externas, la primera corresponde a una matriz renglón $\bar{U}(P_1, m_{l_\beta^{(0)}})$, la segunda corresponde a una matriz columna $U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}})$, los demás términos corresponden a los propagadores del bosón, del campo del neutrino y el campo del leptón y los vértices

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_2 U_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \frac{-ig \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j \gamma \rho} P_L \frac{i \left(\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}} \right)}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \frac{-ig \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j \gamma \eta}^* P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\ &\quad \times \frac{-i}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - (1 - \xi) \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\quad \times \frac{-i}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\lambda\eta} - (1 - \xi) \frac{(P_1 - k)^\lambda (P_1 - k)^\eta}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\quad \times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (81)$$

de la forma analítica del segundo diagrama de Feynman, podemos factorizar las constantes y la función $\cos^2(\theta_{n\nu_j})$, que depende del angulo de mezcla de los neutrinos

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_2^{j(n)} U_\beta &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j \gamma \rho} P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j \gamma \eta}^* P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\ &\quad \times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\lambda\eta} - \frac{(P_2 - k)^\lambda (P_2 - k)^\eta}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_2 - k)^\lambda (P_2 - k)^\eta}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\quad \times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (82)$$

pará poder calcular en la norma unitaria es importante poder describir el propagador del bosón $W^{(n)}$, para no tener divergencias a la hora de tomar el límite, para ello factorizamos ξ del numerador en el propagador del bosón

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_2^{j(n)} U_\beta &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j \gamma \rho} P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j \gamma \eta}^* P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\ &\quad \times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{\xi - m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{\xi - m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\quad \times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (83)$$

tomando la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$, tendremos términos que no van a contribuir al propagador del bosón, de manera que la forma analítica para el segundo diagrama es la siguiente

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_2^{j(n)} U_\beta &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\rho P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\ &\times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (84)$$

Dado que los dos primeros diagramas de Feynman, son muy parecidos, podemos sumar las expresiones analíticas de $\zeta_1^{j(n)}$ y $\zeta_2^{j(n)}$, que corresponden a $\Lambda_1^{j(n)}$, es importante notar que lo único que cambia son las funciones $\sin^2(\theta_{n\nu_j})$ por el $\cos^2(\theta_{n\nu_j})$, por ello podremos factorizar estos términos

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \Lambda_1^{j(n)} U_\alpha &= \bar{U}_\beta \zeta_1^{j(n)} U_\alpha + \bar{U}_\beta \zeta_2^{j(n)} U_\alpha = -\left(\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} + \frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} \right) e \\ &\int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\rho P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\ &\times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (85)$$

usando la identidad de $\cos^2 \theta_{n\nu_j} + \sin^2 \theta_{n\nu_j} = 1$, que corresponden a la suma de $\zeta_1^{j(n)}$ y $\zeta_2^{j(n)}$, podemos obtener finalmente $\Lambda_1^{j(n)}$

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \Lambda_1^{j(n)} U_\alpha &= \frac{g^2 e}{2} \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\rho P_L \frac{\not{k} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \\ &\times \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\nu} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\nu}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \\ &\times ie [g_{\lambda\mu} (P_{2\nu} - 2P_{1\nu} + k_\nu) + g_{\lambda\nu} (-2k_\mu + P_{1\mu} + P_{2\mu}) + g_{\nu\mu} (-2P_{2\lambda} + k_\lambda + P_{1\lambda})] \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (86)$$

Para los siguientes pares de diagramas de Feynman, que corresponden a $\zeta_3^{j(n)}$ y $\zeta_4^{j(n)}$, el razonamiento es idéntico, ocupamos las reglas de Feynman para poder encontrar las expresiones analíticas. La forma analítica para el tercer diagrama de Feynman 6, en la cual se está integrando sobre el lazo k , donde tenemos dos líneas externas, la primera corresponde a una matriz renglón $\bar{U}(P_1, m_{l_\beta^{(0)}})$, la segunda corresponde a una matriz columna $U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}})$, los demás términos corresponden a los propagadores del bosón, del campo

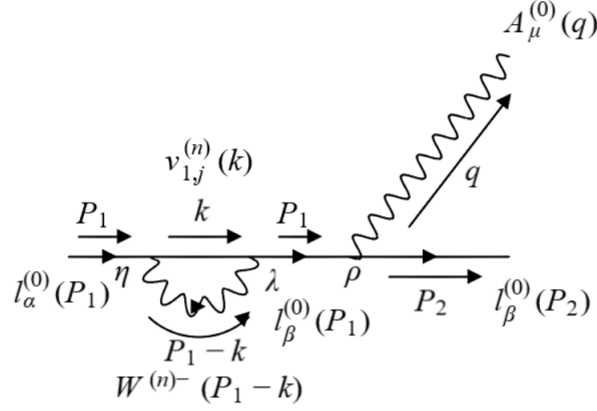


Figura 6: Diagrama de Feynman III.

del neutrino y el campo del leptón y las reglas de los vértices

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_3^{j(n)} U_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) (-i) e \gamma_\mu \frac{i \left(\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}} \right)}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \frac{-ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{i \left(\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}} \right)}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\times \frac{-ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{-i}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\lambda\eta} - (1 - \xi) \frac{(P_1 - k)^\lambda (P_1 - k)^\eta}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \quad (87) \end{aligned}$$

de la forma analítica del tercer diagrama de Feynman, podemos factorizar las constantes y la función $\sin^2(\theta_{n\nu_j})$, que depende del angulo de mezcla de los neutrinos

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_3^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \quad (88) \end{aligned}$$

para poder calcular en la norma unitaria es importante poder describir el propagador del bosón $W^{(n)}$, para no tener divergencias a la hora de tomar el límite, para ello factorizamos ξ del numerador en el propagador

del bosón

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\beta} \zeta_3^{j(n)} U_{\alpha} &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_{\beta}^{(0)}}) \gamma_{\mu} \frac{\not{P}_1 + m_{l_{\beta}^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_{\beta}^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_{\lambda} P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_{\eta} P_L U(P_1, m_{l_{\alpha}^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^{\eta} (P_1 - k)^{\lambda}}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_1 - k)^{\eta} (P - 1 - k)^{\lambda}}{\frac{(P_1 - k)^2}{\xi} - m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (89)$$

tomando la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$, tendremos términos que no van a contribuir al propagador del bosón, cuando tomemos el límite, de manera que la forma analítica para el tercer diagrama es la siguiente

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\beta} \zeta_3^{j(n)} U_{\alpha} &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_{\beta}^{(0)}}) \gamma_{\mu} \frac{\not{P}_1 + m_{l_{\beta}^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_{\beta}^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_{\lambda} P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_{\eta} P_L U(P_1, m_{l_{\alpha}^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^{\eta} (P - 1 - k)^{\lambda}}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (90)$$

El razonamiento es el mismo, la expresión analítica para el cuarto diagrama de Feynman7, tendremos

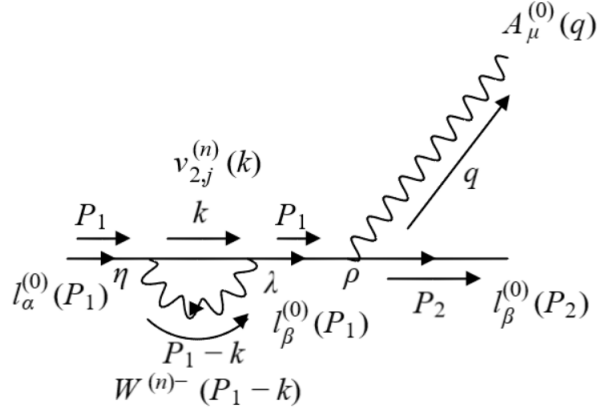


Figura 7: Diagrama de Feynman IV.

la integral sobre el lazo k , consideramos de la misma forma que tenemos dos líneas externas la primera corresponde a una matriz renglón $\bar{U}(P_1, m_{l_{\beta}^{(0)}})$, la segunda corresponde a una matriz columna $U(P_1, m_{l_{\alpha}^{(0)}})$, los demás términos corresponden a los propagadores del bosón, del campo del neutrino y el campo del

leptón y las reglas de los vértices

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_4^{j(n)} U_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) (-i) e \gamma_\mu \frac{i \left(\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}} \right)}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \frac{i g \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{i \left(\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}} \right)}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\times \frac{i g \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{-i}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\lambda\eta} - (1 - \xi) \frac{(P_1 - k)^\lambda (P_1 - k)^\eta}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (91)$$

de la forma analítica del cuarto diagrama de Feynman, podemos factorizar las constantes y la función $\cos^2(\theta_{n\nu_j})$, que depende del angulo de mezcla de los neutrinos

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_4^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (92)$$

para poder calcular en la norma unitaria es importante poder describir el propagador del bosón $W^{(n)}$, para no tener divergencias a la hora de tomar el límite, para ello factorizamos ξ del numerador en el propagador del bosón

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_4^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{\frac{(P_1 - k)^2}{\xi} - m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (93)$$

tomando la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$, tendremos términos que no van a contribuir al propagador del bosón, cuando tomemos el límite, de manera que la forma analítica para el cuarto diagrama es la siguiente

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_4^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (94)$$

Dado que los segundos pares diagramas de Feynman, son muy parecidos, podemos sumar las expresiones analíticas de $\zeta_3^{j(n)}$ y $\zeta_4^{j(n)}$, que corresponden a $\Lambda_2^{j(n)}$, es importante notar que lo único que cambia son las

funciones $\sin^2(\theta_{\nu j})$ por el $\cos^2(\theta_{\nu j})$, de forma parecida a los primeros pares de diagramas de Feynman

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \Lambda_2^{j(n)} U_\alpha &= \bar{U}_\beta \zeta_3^{j(n)} U_\alpha + \bar{U}_\beta \zeta_4^{j(n)} U_\alpha = - \left(\frac{g^2 \sin^2(\theta_{\nu j})}{2} + \frac{g^2 \cos^2(\theta_{\nu j})}{2} \right) e \\ &\int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (95)$$

usando la identidad de $\cos^2 \theta_{\nu j} + \sin^2 \theta_{\nu j} = 1$, que corresponden a la suma de $\zeta_3^{j(n)}$ y $\zeta_4^{j(n)}$, podemos obtener finalmente $\Lambda_2^{j(n)}$

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \Lambda_2^{j(n)} U_\alpha &= \frac{-g^2 e}{2} \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_1^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \\ &\cdot U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_1 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\eta\lambda} - \frac{(P_1 - k)^\eta (P_1 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (96)$$

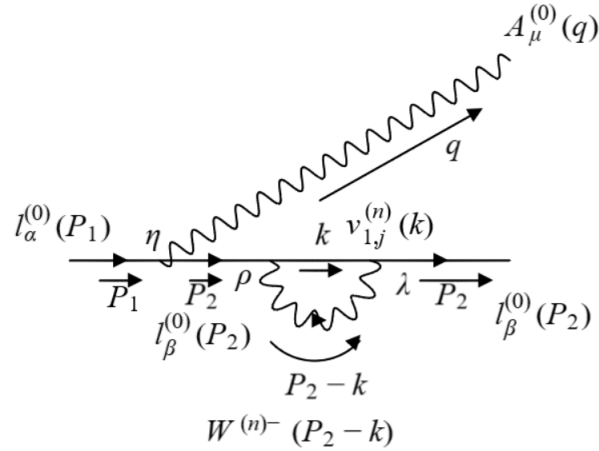


Figura 8: Diagrama de Feynman V.

De forma parecida para los anteriores diagramas de Feynman, se realiza el mismo procedimiento para obtener $\Lambda_3^{j(n)}$. Utilizamos nuevamente las reglas de Feynman para poder escribir la forma analítica del quinto diagrama 8, tendremos la integral sobre el lazo k , de la misma forma tendremos dos líneas externas la primera corresponde a una matriz renglón $\bar{U}(P_1, m_{l_\beta^{(0)}})$, la segunda corresponde a una matriz columna $U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}})$, los demás términos corresponden a los propagadores del bosón, del campo del neutrino y el

campo del leptón y las reglas de los vértices

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_5^{j(n)} U_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \frac{ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j \gamma \lambda} P_L \frac{i \left(\mathcal{K} + m_{\nu_j^{(n)}} \right)}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \frac{ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j \gamma \rho}^* P_L \frac{i \left(\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}} \right)}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \times (-i) e \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{-i}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - (1 - \xi) \frac{(P_1 - k)^\rho (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (97)$$

de la forma analítica del cuarto diagrama de Feynman, podemos factorizar las constantes y la función $\sin^2(\theta_{n\nu_j})$, que depende del angulo de mezcla de los neutrinos

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_5^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j \gamma \lambda} P_L \frac{\mathcal{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j \gamma \rho}^* P_L \frac{\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (98)$$

para poder calcular en la norma unitaria es importante poder describir el propagador del bosón $W^{(n)}$, para no tener divergencias a la hora de tomar el límite, para ello factorizamos ξ del numerador en el propagador del bosón

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_5^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j \gamma \lambda} P_L \frac{\mathcal{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j \gamma \rho}^* P_L \frac{\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{\xi - m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (99)$$

tomando la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$, tendremos términos que no van a contribuir al propagador del bosón, cuando tomemos el límite, la forma analítica para el quinto diagrama es la siguiente

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_5^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \sin^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j \gamma \lambda} P_L \frac{\mathcal{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j \gamma \rho}^* P_L \frac{\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (100)$$

Utilizamos nuevamente las reglas de Feynman para poder escribir la forma analítica del quinto diagrama 9, tendremos la integral sobre el lazo k , de la misma forma tendremos dos líneas externas la primera corresponde a una matriz renglón $\bar{U}(P_1, m_{l_\beta^{(0)}})$, la segunda corresponde a una matriz columna $U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}})$, los demás términos corresponden a los propagadores del bosón, del campo del neutrino y el campo del

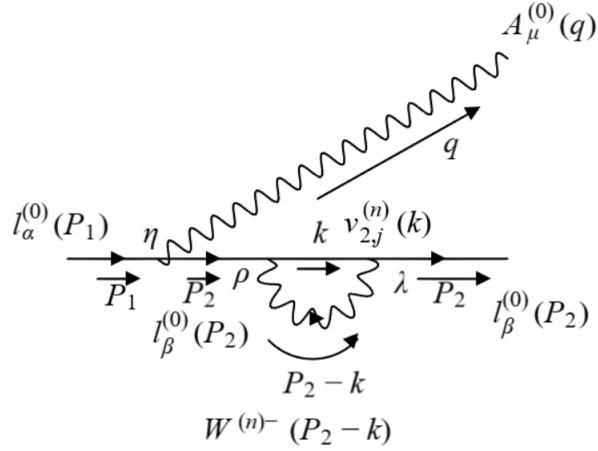


Figura 9: Diagrama de Feynman VI.

leptón y las reglas de los vértices

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_6^{j(n)} U_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) \frac{-ig \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{i(\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}})}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \frac{-ig \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\rho P_L \frac{i(\not{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}})}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \times (-i) e \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{-i}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - (1 - \xi) \frac{(P_1 - k)^\rho (P_1 - k)^\lambda}{(P_1 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (101)$$

de la forma analítica del cuarto diagrama de Feynman, podemos factorizar las constantes y la función $\cos^2(\theta_{n\nu_j})$, que depende del ángulo de mezcla de los neutrinos

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_6^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j}^* \gamma_\rho P_L \frac{\not{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{\xi (P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (102)$$

para poder calcular en la norma unitaria es importante poder describir el propagador del bosón $W^{(n)}$, para no tener divergencias a la hora de tomar el límite, para ello factorizamos ξ del numerador en el propagador del bosón

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_6^{j(n)} U_\alpha &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\not{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j}^* \gamma_\rho P_L \frac{\not{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\quad \cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{(P_2 - k)^2 - \xi m_{W^{(n)}}^2} + \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{\xi - m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (103)$$

tomando la norma unitaria $\xi \rightarrow \infty$, tendremos términos que no van a contribuir al propagador del bosón,

cuando tomemos el límite, la forma analítica para el sexto diagrama es la siguiente

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \zeta_6^{j(\underline{n})} U_\alpha &= -\frac{g^2 \cos^2(\theta_{n\nu_j})}{2} e \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\cancel{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j}^* \gamma_\rho P_L \frac{\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (104)$$

Dado que los terceros pares diagramas de Feynman, son muy parecidos, podemos sumar las expresiones analíticas de $\zeta_5^{j(\underline{n})}$ y $\zeta_6^{j(\underline{n})}$, que corresponden a $\Lambda_2^{j(\underline{n})}$, es importante notar que lo único que cambia son las funciones $\sin^2(\theta_{n\nu_j})$ por el $\cos^2(\theta_{n\nu_j})$, de forma parecida a los primeros pares de diagramas de Feynman

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \Lambda_3^{j(\underline{n})} U_\alpha &= \bar{U}_\beta \zeta_5 U_\alpha + \bar{U}_\beta \zeta_6 U_\alpha = -\left(\frac{g^2 \sin(\theta_{n\nu_j})}{2} + \frac{g^2 \cos(\theta_{n\nu_j})}{2} \right) e \\ &\int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\cancel{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j}^* \gamma_\rho P_L \frac{\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (105)$$

usando la identidad de $\cos^2 \theta_{n\nu_j} + \sin^2 \theta_{n\nu_j} = 1$, que corresponden a la suma de $\zeta_3^{j(\underline{n})}$ y $\zeta_4^{j(\underline{n})}$, podemos obtener finalmente $\Lambda_2^{j(\underline{n})}$

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta \Lambda_3^{j(\underline{n})} U_\alpha &= \frac{-g^2 e}{2} \int \frac{d^4 k}{2\pi} \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}}) U_{\beta j} \gamma_\lambda P_L \frac{\cancel{K} + m_{\nu_j^{(n)}}}{k^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} U_{\beta j}^* \gamma_\rho P_L \frac{\cancel{P}_2 + m_{l_\beta^{(0)}}}{P_2^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \\ &\cdot \gamma_\mu U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}}) \frac{1}{(P_2 - k)^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{(P_2 - k)^\rho (P_2 - k)^\lambda}{m_{W^{(n)}}^2} \right) \epsilon_s^{\mu*}(q) \end{aligned} \quad (106)$$

3.4. Suma de los diagramas de Feynman

De forma general se tiene que la amplitud \mathcal{M} es la suma de los diagramas de Feynman, la cual lo podemos reducir en la suma de $\Lambda_1^{j(\underline{n})}, \Lambda_2^{j(\underline{n})}, \Lambda_3^{j(\underline{n})}$, donde $\zeta_1^{j(\underline{n})}, \dots, \zeta_6^{j(\underline{n})}$, viene dado por la expresiones analíticas de nuestros diagramas de Feynman, como se muestra a continuación

$$\Gamma_\mu^{j(\underline{n})} = \zeta_1^{j(\underline{n})} + \zeta_2^{j(\underline{n})} + \zeta_3^{j(\underline{n})} + \zeta_4^{j(\underline{n})} + \zeta_5^{j(\underline{n})} + \zeta_6^{j(\underline{n})} \quad (107)$$

$$\Gamma_\mu^{j(\underline{n})} = \Lambda_1^{j(\underline{n})} + \Lambda_2^{j(\underline{n})} + \Lambda_3^{j(\underline{n})} \quad (108)$$

Es importante recordar que factorizamos por la izquierda \bar{U}_β y por la derecha U_α ⁸, la forma general de nuestra amplitud tiene la siguiente forma

$$\bar{U}_\beta \Gamma_\mu^{j(n)} U_\alpha \epsilon^{\mu*}(q) \quad (109)$$

La estructura de $\Gamma_\mu^{j(n)}$, viene dada por la Eq. 110, la cual está en términos de $P_{1\mu}$, $P_{2\mu}$ y las matrices $\gamma_\mu, \gamma_6, \gamma_7$ y las constantes $a_1^{j(n)}, \dots, a_6^{j(n)}$, usando $q^\nu = (P_1 - P_2)^\nu$ y tomando la relación de los momentos, se puede escribir la Eq. 113, en términos de $P_{1\mu}$

$$\Gamma_\mu^{j(n)} = a_1^{j(n)} P_{1\mu} + a_2^{j(n)} P_{2\mu} + a_3^{j(n)} P_{1\mu} \gamma_7 + a_4^{j(n)} P_{2\mu} \gamma_7 + a_5^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_6 + a_6^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_7 \quad (110)$$

$$\epsilon^\mu(q) q_\mu = 0 \Rightarrow \epsilon^\mu(q) (P_1 - P_2)_\mu = \epsilon^\mu(q) (P_{1\mu} - P_{2\mu}) \Rightarrow \epsilon^\mu(q) P_{1\mu} = \epsilon^\mu(q) P_{2\mu} \quad (111)$$

de la cual podemos concluir la forma en que se relacionan el momento $P_{1\mu}$ con el momento $P_{2\mu}$

$$P_{1\mu} = P_{2\mu} \quad (112)$$

$$\Gamma_\mu^{j(n)} = a_1^{j(n)} P_{1\mu} + a_2^{j(n)} P_{1\mu} + a_3^{j(n)} P_{1\mu} \gamma_7 + a_4^{j(n)} P_{1\mu} \gamma_7 + a_5^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_6 + a_6^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_7 \quad (113)$$

Podemos factorizar términos, de la expresión anterior, de tal forma que nos queda la Eq. 114 y definiendo como $b_1^{j(n)} = a_1^{j(n)} + a_2^{j(n)}$; $b_2^{j(n)} = a_3^{j(n)} + a_4^{j(n)}$; $b_3^{j(n)} = a_5^{j(n)}$; $b_4^{j(n)} = a_6^{j(n)}$, podemos escribir $\Gamma_\mu^{j(n)}$, como la Eq. 115

$$\Gamma_\mu^{j(n)} = \left(a_1^{j(n)} + a_2^{j(n)} \right) P_{1\mu} \gamma_6 + \left(a_3^{j(n)} + a_4^{j(n)} \right) P_{1\mu} \gamma_7 + a_5^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_6 + a_6^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_7 \quad (114)$$

$$\Gamma_\mu^{j(n)} = b_1^{j(n)} P_{1\mu} \gamma_6 + b_2^{j(n)} P_{1\mu} \gamma_7 + b_3^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_6 + b_4^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_7 \quad (115)$$

Recordar que la forma de las matrices γ_6 y γ_7 , son las matrices P_R y P_L , usando estas relaciones la estructura $\Gamma_\mu^{j(n)}$ viene dada por la Eq. 117

$$\gamma_6 = P_R = \frac{\mathbb{I}_4 + \gamma_5}{2} \quad \gamma_7 = P_L = \frac{\mathbb{I}_4 - \gamma_5}{2} \quad (116)$$

$$\Gamma_\mu^j = \frac{b_1^{j(n)}}{2} P_{1\mu} \mathbb{I}_4 + \frac{b_1^{j(n)}}{2} P_{1\mu} \gamma_5 + \frac{b_2^{j(n)}}{2} P_{1\mu} \mathbb{I}_4 - \frac{b_2^{j(n)}}{2} P_{1\mu} \gamma_5 + \frac{b_3^{j(n)}}{2} \gamma_\mu \mathbb{I}_4 + \frac{b_3^{j(n)}}{2} \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{b_4^{j(n)}}{2} \gamma_\mu \mathbb{I}_4 - \frac{b_4^{j(n)}}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \quad (117)$$

⁸Para simplificar la notación, usaremos que $\bar{U}_\beta = \bar{U}(P_2, m_{l_\beta^{(0)}})$ y $U_\alpha = U(P_1, m_{l_\alpha^{(0)}})$

Usando las identidades de Gordon 118 y 119, podemos escribir $\Gamma_\mu^{j(n)}$, en términos de las masas y constantes $b_1^{j(n)}, \dots, b_4^{j(n)}$

$$\bar{U}_\beta(P_2)P_{1\mu}U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{2} \left(m_{u_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) U_\alpha(P_1) \quad (118)$$

$$\bar{U}_\beta(P_2)P_{1\mu}\gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{2} \left(m_{u_\beta^{(0)}} - m_{U_\alpha^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{j(n)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(b_1^{j(n)} + b_2^{j(n)} \right) \left(m_{u_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) + b_3^{j(n)} + b_4^{j(n)} \right) \gamma_\mu \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(b_1^{j(n)} - b_2^{j(n)} \right) \left(m_{u_\beta^{(0)}} - m_{U_\alpha^{(0)}} \right) + b_3^{j(n)} - b_4^{j(n)} \right) \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{4} \left(\left(b_1^{j(n)} + b_2^{j(n)} \right) i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(\left(b_1^{j(n)} - b_2^{j(n)} \right) i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \right) \end{aligned} \quad (120)$$

3.5. Factores de forma

Los factores de forma se definen a partir de la Eq.3.4, de forma que los factores de forma se definen:

$$f_1^{j(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(b_1^{j(n)} + b_2^{j(n)} \right) \left(m_{u_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) + b_3^{j(n)} + b_4^{j(n)} \right) \quad (121)$$

$$f_2^{j(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(b_1^{j(n)} - b_2^{j(n)} \right) \left(m_{u_\beta^{(0)}} - m_{U_\alpha^{(0)}} \right) + b_3^{j(n)} - b_4^{j(n)} \right) \quad (122)$$

$$f_3^{j(n)} = \frac{1}{4} \left(b_1^{j(n)} + b_2^{j(n)} \right) \quad (123)$$

$$f_4^{j(n)} = \frac{1}{4} \left(b_1^{j(n)} - b_2^{j(n)} \right) \quad (124)$$

De forma que podemos escribir Γ_μ^j , de una forma más compacta

$$\Gamma_\mu^{j(n)} = f_1^{j(n)} \gamma_\mu + f_2^{j(n)} \gamma_\mu \gamma_5 + f_3^{j(n)} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu + f_4^{j(n)} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \quad (125)$$

con $\bar{U}_\beta(P_2)$ y $U_\alpha(P_1)$, son espinores que satisfacen la ecuación de Dirac, los factores de forma $f_i^{j(n)}$ en general, son cantidades complejas que dependen de las masas de los leptones $l_\alpha^{(0)}, l_\beta^{(0)}$, el boson $W_n^{(0)}$, las masas de los neutrinos $m_{\nu_j^{(n)}}$ y las funciones Passarino-Veltman B_0 y C_0 , dadas por ⁹

$$B_0(0, m_0, m_1) \quad (126)$$

$$B_0(p_1^2, m_0, m_2) \quad (127)$$

$$C_0(m_1^2, m_2^2, 0, m^2, m_b^2, m^2) \quad (128)$$

⁹Las soluciones a las funciones escalares de Passarino-Veltman, se encuentran resueltas en el apéndice D.

3.6. Amplitud al cuadrado

Para el calculo de la tasa de decaimiento es necesario calcular la amplitud al cuadrado $|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s_1} \sum_{s_2} \mathcal{M} \mathcal{M}^*$, donde \mathcal{M} tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \frac{-g^2 e}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \bar{U}_{\beta}(P_2, S_2) \Gamma_{\mu}^{j(\underline{n})} U_{\alpha}(P_1, S_1) e^{\mu*}(q, s) \right) \quad (129)$$

definimos Γ_{μ} , donde $\sum_{j=1}^3$ se refiere a los diferentes sabores de neutrinos y $\sum_{n=1}^{\infty}$, se refiere a los modos de Kaluza-Klein

$$\Gamma_{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \Gamma_{\mu}^{j(\underline{n})} \quad (130)$$

partiendo de $\Gamma_{\mu}^{j(\underline{n})}$, el cual tiene la siguiente forma:

$$\Gamma_{\mu}^{j(\underline{n})} = f_1^{j(\underline{n})} \gamma_{\mu} + f_2^{j(\underline{n})} \gamma_{\mu} \gamma_5 + f_3^{j(\underline{n})} i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} + f_4^{j(\underline{n})} i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} \gamma_5 \quad (131)$$

escribiendo las sumas sobre $j, (\underline{n})$ de manera explicita tenemos

$$\Gamma_{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \left(f_1^{j(\underline{n})} \gamma_{\mu} + f_2^{j(\underline{n})} \gamma_{\mu} \gamma_5 + f_3^{j(\underline{n})} i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} + f_4^{j(\underline{n})} i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} \gamma_5 \right) \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_1^{j(\underline{n})} \right) \gamma_{\mu} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_2^{j(\underline{n})} \right) \gamma_{\mu} \gamma_5 \\ &+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_3^{j(\underline{n})} \right) i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_4^{j(\underline{n})} \right) i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} \gamma_5 \end{aligned} \quad (133)$$

definimos f_1, f_2, f_3, f_4 como

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_1^{j(\underline{n})} \quad (134)$$

$$f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_2^{j(\underline{n})} \quad (135)$$

$$f_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_3^{j(\underline{n})} \quad (136)$$

$$f_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_4^{j(\underline{n})} \quad (137)$$

de forma que Γ_μ , queda en términos de los factores de forma, sin desatender que estos depende de las $\sum_{j=1}^3$ de los diferentes sabores de neutrinos y $\sum_{n=1}^\infty$ los modos de Kaluza-Klein

$$\Gamma_\mu = f_1\gamma_\mu + f_2\gamma_\mu\gamma_5 + f_3i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + f_4i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 \quad (138)$$

de manera que la amplitud de forma general \mathcal{M} queda descrita con la Eq. 139, escribiendo Γ_μ en términos de los factores de forma tenemos la Eq. 140

$$\mathcal{M} = \frac{-g^2e}{2}\bar{U}_\beta(P_2, S_2)\Gamma_\mu U_\alpha(P_1, S_1)\epsilon^{\mu*}(q) \quad (139)$$

$$\mathcal{M} = \frac{-g^2e}{2}\bar{U}_\beta(P_2, S_2)(f_1\gamma_\mu + f_2\gamma_\mu\gamma_5 + f_3i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + f_4i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5)U_\alpha(P_1, S_1)\epsilon^{\mu*}(q) \quad (140)$$

lo que es importante es la amplitud al cuadrado $|\mathcal{M}|^2$, para ello debemos calcular primero el complejo conjugado de la amplitud \mathcal{M}^*

$$\mathcal{M}^* = \frac{-g^2e}{2}\bar{U}_\alpha(P_1, S_1)(f_1\gamma_\rho + f_2\gamma_\rho\gamma_5 - f_3i\sigma_{\rho\alpha}q^\alpha + f_4i\sigma_{\rho\alpha}q^\alpha\gamma_5)U_\beta(P_2, S_2)\epsilon^\rho(q) \quad (141)$$

la amplitud al cuadrado tiene la forma de Eq.142 , usando las relaciones de Dirac podemos escribir la amplitud al cuadrado $|\mathcal{M}|^2$, como la Eq. 146

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{-g^2e}{2} \sum_s \sum_{s_1} \sum_{s_2} \bar{U}_\beta(P_2, S_2)(f_1\gamma_\mu + f_2\gamma_\mu\gamma_5 + f_3i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + f_4i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5)U_\alpha(P_1, S_1)\epsilon^{\mu*}(q) \right) \left(\frac{-g^2e}{2} \bar{U}_\alpha(P_1, S_1)(f_1\gamma_\rho + f_2\gamma_\rho\gamma_5 + f_3i\sigma_{\rho\alpha}q^\alpha + f_4i\sigma_{\rho\alpha}q^\alpha\gamma_5)U_\beta(P_2, S_2)\epsilon^\rho(q) \right) \quad (142)$$

$$\sum_{s_1} U^s(p)\bar{U}^s(P) = \gamma P + m = \not{P} + m \quad (143)$$

$$\sum_{s_2} U^s(p)\bar{U}^s(P) = \gamma P + m = \not{P} + m \quad (144)$$

$$\sum_s \epsilon^{\mu*}(s)\epsilon^\rho(s) = -g^{\mu\rho} \quad (145)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4e^2}{4} \text{tr}\{(-g^{\mu\rho})(f_1\gamma_\mu + f_2\gamma_\mu\gamma_5 + f_3i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + f_4i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5)(\not{P}_1 + m_\alpha) \times (f_1\gamma_\rho + f_2\gamma_\rho\gamma_5 - f_3i\sigma_{\rho\alpha}q^\alpha + f_4i\sigma_{\rho\alpha}q^\alpha\gamma_5)(\not{P}_2 + m_\beta)\} \quad (146)$$

calculando la traza en el programa Wolfram Mathematica, obtenemos la siguiente relación, en donde los factores de forma $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 e^2}{2} \left(|f_3|^2 + |f_4|^2 \right) (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 \quad (147)$$

3.7. Implementación del Mecanismo GIM (Glashow–Iliopoulos–Maiani)

La amplitud al cuadrado $|\mathcal{M}|^2$, viene dado en términos de los factores de forma por la Eq. 147 , es importante recordar que la forma de nuestra amplitud es

$$\bar{U}_\beta(P_2) \Gamma_\mu U_\alpha(p_1) \epsilon^{\mu*} \quad (148)$$

escribiendo todo en términos de Γ_μ , dado por la Eq 130 y tomando que los factores de forma $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$

$$\bar{U}_\beta(P_2) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \Gamma_\mu^{j(n)} \right) U_\alpha(P_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_\beta(P_2) \left(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{3,j(n)} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu + U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{4,j(n)} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) \epsilon_\mu^* \quad (149)$$

donde el índice $j = 1, 2, 3$, etiqueta a los diferentes neutrinos y el índice (n) los modos de Kaluza-Klein , distribuimos la suma para obtener

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{3,j} + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{4,j} \right) U_\alpha(P_1) \epsilon_\mu^* \quad (150)$$

de la Eq.150 definimos

$$f_{\beta\alpha}^3 = \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{3,j} \quad (151)$$

$$f_{\beta\alpha}^4 = \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{4,j} \quad (152)$$

con lo cual

$$\sum_{j=1}^3 \bar{U}_\beta(P_2) \Gamma_\mu^j U_\alpha(P_1) \epsilon_\mu^* = \bar{U}_\beta(P_2) (f_{\beta\alpha}^3 \sigma_{\mu\nu} q^\nu + f_{\beta\alpha}^4 \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5) U_\alpha(P_1) \epsilon_\mu^* \quad (153)$$

a continuación implementamos el mecanismo GIM, para lo cual nos fijamos en

$$f_{\beta\alpha}^3 = \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* f_{\beta\alpha}^{3,j} = U_{\beta 1} U_{\alpha 1}^* f_{\beta\alpha}^{3,1} + U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* f_{\beta\alpha}^{3,2} + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* f_{\beta\alpha}^{3,3} \quad (154)$$

la matriz U , con entradas $U_{\alpha j}$ y $U_{\beta j}$ y de tamaño de 3×3 , es unitaria, lo cual significa que satisface

$$UU^\dagger = \mathbb{I}_3 \Rightarrow \left(UU^\dagger \right)_{\beta\alpha} = (\mathbb{I}_3)_{\beta\alpha} \Rightarrow \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} U_{\alpha j}^* = \delta_{\beta\alpha} \quad (155)$$

lo cual en forma más explicita se expresa como

$$\delta_{\beta\alpha} = U_{\beta 1} U_{\alpha 1}^* + U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \quad (156)$$

consideramos el caso en que $\beta \neq \alpha$, el cual es el que nos interesa, de modo que $\delta_{\beta\alpha} = 0$, con lo cual

$$0 = U_{\beta 1} U_{\alpha 1}^* + U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \quad (157)$$

$$\Rightarrow U_{\beta 1} U_{\alpha 1}^* = -U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* - U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \quad (158)$$

vamos usar está expresión en nuestro cálculo

$$f_{\beta\alpha}^3 = \left((-U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* - U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^*) f_{\beta\alpha}^3 + U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* f_{\beta\alpha}^{3,2} + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* f_{\beta\alpha}^{3,3} \right) \quad (159)$$

$$f_{\beta\alpha}^3 = U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* \left(f_{\beta\alpha}^{3,2} - f_{\beta\alpha}^{3,1} \right) + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \left(f_{\beta\alpha}^{3,3} - f_{\beta\alpha}^{3,1} \right) \quad (160)$$

de forma análoga, se puede probar que

$$f_{\beta\alpha}^4 = U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* \left(f_{\beta\alpha}^{4,2} - f_{\beta\alpha}^{4,1} \right) + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \left(f_{\beta\alpha}^{4,3} - f_{\beta\alpha}^{4,1} \right) \quad (161)$$

3.8. Calculo Numérico

El calculo numérico se hizo en el programa *Wolfram Mathematica*, utilizando la paquetería *FeynCal*, para ello se tomaron resultados del PDG [58]. A continuación se explica brevemente lo que se realizó:

- Se escribieron las expresiones analíticas para los diagramas de Feynman, la cuales vienen dadas por las expresiones $\Lambda_1^{j(n)}, \Lambda_2^{j(n)}, \Lambda_3^{j(n)}$. A la cual se le aplica la siguiente condición en los momentos

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \quad (162)$$

tomando la convención del valor de las unidades naturales $c = 1$

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \Rightarrow E_{\vec{p}}^2 = m^2 + \vec{p}^2 \Rightarrow E_{\vec{p}}^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (163)$$

con $E_{\vec{p}} = p^0$ y $\vec{p}^2 = p^1 p^1 + p^2 p^2 + p^3 p^3$, usando estas relaciones tenemos

$$p^0 p^0 - p^1 p^1 - p^2 p^2 - p^3 p^3 = m^2 \Rightarrow p^0 p_0 + p^1 p_1 + p^2 p_2 + p^3 p_3 = m^2 \quad (164)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 \Rightarrow p^2 = m^2 \quad (165)$$

de lo cual obtenemos las relaciones de los momentos en términos de las masas y de cómo se relacionan los momentos, siguiendo el mismo razonamiento podemos escribir, como se relacionan el producto de los momentos $P_1 \cdot P_2$

$$p_1^2 = m_{l_\alpha}^2 \quad p_2^2 = m_{l_\beta}^2 \quad q^2 = 0 \quad P_1 \cdot P_2 = \frac{m_{l_\alpha}^2 + m_{l_\beta}^2}{2} \quad (166)$$

$$P_{2\mu} = P_{1\mu} \quad (167)$$

se utiliza las condiciones de los momentos 166,167 en las expresiones analíticas de los diagramas de Feynman, las cuales no tienen divergencias ultravioleta, se verifico que no existieran divergencias en nuestras amplitudes a la hora de implementar nuestras expresiones analíticas ¹⁰ y se aplica la sub-rutina *Pave*.¹¹

- Se suman las expresiones analíticas de los diagramas $\Gamma_\mu^{j(n)} = \Lambda_1^{j(n)} + \Lambda_2^{j(n)} + \Lambda_3^{j(n)}$, en las cuales se definen los factores de forma, una vez realizado esto se demuestra que $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$, el resultado solo depende de f_3 y f_4 , las cuales dependen de las funciones escalares de Passarino-Veltman y las masas de los leptones $l_\alpha^{(0)}, l_\beta^{(0)}$, el boson $W^{(n)}$ y las masas de los neutrinos $m_{\nu_j^{(n)}}$.
- Se solucionan las funciones de Passarino-Veltman ¹² en las cuales se implementa el mecanismo en que se generan estas masas al compactificar la dimensión extra, para el bosón y los neutrinos

$$m_{W^{(n)}} = \sqrt{m_{W^{(0)}}^2 + \frac{n^2}{R^2}} \quad m_{\nu_j^{(n)}} = \sqrt{m_{\nu_j^{(0)}}^2 + \frac{n^2}{R^2}} \quad (168)$$

- Se implementa el mecanismo GIM

$$f_{\beta\alpha}^3 = U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* \left(f_{\beta\alpha}^{3,2} - f_{\beta\alpha}^{3,1} \right) + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \left(f_{\beta\alpha}^{3,3} - f_{\beta\alpha}^{3,1} \right) \quad (169)$$

$$f_{\beta\alpha}^4 = U_{\beta 2} U_{\alpha 2}^* \left(f_{\beta\alpha}^{4,2} - f_{\beta\alpha}^{4,1} \right) + U_{\beta 3} U_{\alpha 3}^* \left(f_{\beta\alpha}^{4,3} - f_{\beta\alpha}^{4,1} \right) \quad (170)$$

¹⁰Las divergencias que son significativas son las divergencias ultravioletas (*UV*). Una divergencia ultravioleta puede describirse como una que es resultado de la región de la integración donde las partículas del ciclo tienen un momento y una energía muy demasiado grandes.

¹¹La sub-rutina *Pave*, son funciones ecalares de Passarino-Veltman.

¹²Para ver las soluciones de Passarino-Veltman, revisar el apéndice C

- Se calcula la tasa de decaimiento que viene dada por la ecuación¹³

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi} \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{m_\alpha^3} \quad (171)$$

es importante recordar que la amplitud viene dada por la Eq.147, lo cual hace que la tasa de decaimiento quede en términos de f_3, f_4

$$\Gamma = \frac{g^4 e^2 \left(|f_3|^2 + |f_4|^2 \right) \left(m_\alpha^2 - m_\beta^2 \right)^3}{32\pi m_\alpha^3} \quad (172)$$

La expansión en serie de potencias para que se encontró para los factores de forma $f_{\alpha\beta}^3$ y $f_{\alpha\beta}^4$, después de implementar el mecanismo GIM

$$f_{\alpha\beta}^3 = \frac{\pi R^2}{6} \left(\frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_1}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} + m_{l_\beta}^{(0)} \right)} - \frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_2}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} + m_{l_\beta}^{(0)} \right)} + \frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_1}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} + m_{l_\beta}^{(0)} \right)} - \frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_3}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} + m_{l_\beta}^{(0)} \right)} \right) \quad (173)$$

$$f_{\alpha\beta}^4 = \frac{\pi R^2}{6} \left(\frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_1}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} - m_{l_\beta}^{(0)} \right)} - \frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_2}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} - m_{l_\beta}^{(0)} \right)} + \frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_1}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} - m_{l_\beta}^{(0)} \right)} - \frac{e^2 g^4 U_{\alpha,2}^* U_{\beta 2} m_{\nu_3}^2}{2 \left(m_{l_\alpha}^{(0)} - m_{l_\beta}^{(0)} \right)} \right) \quad (174)$$

La expansión en serie de potencias que se encontró para la tasa de decaimiento, se tomo a orden $\mathcal{O}(R^2)$, para poder facilitar los cálculos, es importante mencionar que lo ideal seria quedarnos a orden $\mathcal{O}(R^4)$ o incluso a orden $\mathcal{O}(R^6)$, ya que hay contribuciones de la masa de los bosones $W^{(n)}$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{1152 m_{l_\alpha}^{(0)}} \right) \left(\pi^3 \left(m_{l_\alpha}^2 - m_{l_\beta}^2 \right)^3 \left(\left| m_{l_\beta}^{(0)} \right|^2 + \left| m_{l_\alpha}^{(0)} \right|^2 \right) \right. \\ \left. \left| \frac{e^4 g^8 \left(U_{\beta 2} U_{\alpha 2} \left(m_{\nu_1}^{(0)} - m_{\nu_2}^{(0)} \right) \left(m_{\nu_1}^{(0)} + m_{\nu_2}^{(0)} \right) + U_{\beta 3} U_{\alpha 3} \left(m_{\nu_1}^{(0)} - m_{\nu_3}^{(0)} \right) \left(m_{\nu_1}^{(0)} + m_{\nu_3}^{(0)} \right) \right)^2 R^4}{\left(m_{l_\beta}^2 - m_{l_\alpha}^2 \right)^2} \right| \right) \quad (175)$$

- Los posibles decaimientos están restringidos a $m_{l_\alpha}^{(0)} > m_{l_\beta}^{(0)}$, esto hace que solo tengamos tres casos

¹³Para más detalles sobre como se calcula la formula de la tasa de decaimiento ver el Apéndice C.

posibles ¹⁴

$$\tau \rightarrow e\gamma \quad (176)$$

$$\tau \rightarrow \mu\gamma \quad (177)$$

$$\mu \rightarrow e\gamma \quad (178)$$

- Los valores que se tomaron para las masas de los leptones, el boson $m_{W^{(0)}}$, la matriz PMNS y la masa del neutrino medido en el experimento KATRIN [58, 76, 77].

$$\begin{aligned} m_e &= 0,5109989461 \pm 0,0000000031 MeV \\ m_\mu &= 105,6583745 \pm 0,0000024 MeV \\ m_\tau &= 1776,86 \pm 0,12 MeV \\ m_{W^{(0)}} &= 80,379 \pm 0,012 GeV \end{aligned} \quad (179)$$

parameter	best fit value $\pm 1\sigma$	3σ range
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.012}_{-0.012}$	(0.270, 0.344)
θ_{12} (degrees)	$33.48^{+0.77}_{-0.74}$	(31.30, 35.90)
$\sin^2 \theta_{23}$	$[0.451^{+0.001}_{-0.001}]$ or $0.577^{+0.027}_{-0.035}$	(0.385, 0.644)
θ_{23} (degrees)	$[42.2^{+0.1}_{-0.1}]$ or $49.4^{+1.6}_{-2.0}$	(38.4, 53.3)
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.0219^{+0.0010}_{-0.0011}$	(0.0188, 0.0251)
θ_{13} (degrees)	$8.52^{+0.20}_{-0.21}$	(7.87, 9.11)
δ_{CP} (degrees)	251^{+67}_{-59}	(0, 360)
$\Delta m_{21}^2 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$	$7.50^{+0.19}_{-0.17}$	(7.03, 8.09)
(normal) $\Delta m_{31}^2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	$+2.458^{+0.046}_{-0.047}$	(+2.325, +2.599)
(inverted) $\Delta m_{32}^2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	$-2.448^{+0.047}_{-0.047}$	(-2.590, -2.307)

Figura 10: Los valores de la matriz PMNS, se tomaron del artículo *Neutrino Mass Hierarchy* [76].

a partir de los valores proporcionados por la tabla 10, tenemos la diferencia de las masas cuadráticas para los neutrinos Δm_{31}^2 y Δm_{21}^2 , lo cual nos proporciona dos esquemas para las mediciones positivas de las oscilaciones de neutrinos, los cuales implican neutrinos masivos, éstos producen información precisa solo de las diferencias de masas cuadráticas Δm_{jk}^2 , pero no los valores absolutos de las masas de los neutrinos excepto que m_k^2 o m_j^2 sean valores mucho mas grandes que $|\Delta m_{jk}^2|$.

Esquema normal $m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}$:

¹⁴Tomando la notación del PDG $A_\mu^{(0)} \rightarrow \gamma$, el cual representa el fotón saliente.

$$\begin{aligned}
m_{\nu_3} &= 1,1eV \\
m_{\nu_2} &= 1,09889eV \\
m_{\nu_1} &= 1,09885eV
\end{aligned} \tag{180}$$

Esquema invertido $m_{\nu_2} > m_{\nu_1} > m_{\nu_3}$:

$$\begin{aligned}
m_{\nu_3} &= 1,1eV \\
m_{\nu_2} &= 1,10116eV \\
m_{\nu_1} &= 1,10112eV
\end{aligned} \tag{181}$$

- Si alguna partícula dada puede decaer en diferentes estados finales (diferentes partículas finales), el *Branching ratio* nos dice qué proporción de esos decaimientos tendrán un estado final específico. Es determinado por la tasa de decaimiento

$$Br = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}} = \Gamma_i \tau \tag{182}$$

donde τ , es el tiempo de vida, que decrece exponencialmente con el tiempo, donde la vida media de la partícula es el recíproco de la tasa de decaimiento total

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}} \tag{183}$$

tomando que la vida media para el $\tau =$ y el μ , son las siguientes

$$\begin{aligned}
\tau_\tau &= (290,3 \pm 0,5) \times 10^{-15} \\
\tau_\mu &= (2,1969811 \pm 0,0000022) \times 10^{-6} s
\end{aligned} \tag{184}$$

Utilizando todos los valores antes mencionados y sustituyéndolos en la tasa de decaimiento (171), se calculan los *Branching ratios* (182) para cada decaimiento posible, que son del orden:

Esquema normal:

$$Br(\tau \rightarrow e\gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-36}), \quad (185)$$

$$Br(\tau \rightarrow \mu\gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-35}), \quad (186)$$

$$Br(\mu \rightarrow e\gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-33}). \quad (187)$$

Esquema invertido:

$$Br(\tau \rightarrow e\gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-37}), \quad (188)$$

$$Br(\tau \rightarrow \mu\gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-35}), \quad (189)$$

$$Br(\mu \rightarrow e\gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-33}). \quad (190)$$

En el experimento MEG [78], el braching ratio para el decaimiento $\mu \rightarrow e, \gamma$

$$Br(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-13}). \quad (191)$$

las cotas reportadas por el PDG [58], para los tres posibles decaimientos son

$$Br(\tau^- \rightarrow e^- \gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-8}), \quad (192)$$

$$Br(\tau^- \rightarrow \mu^- \gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-8}), \quad (193)$$

$$Br(\mu^- \rightarrow e^- \gamma) \sim \mathcal{O}(10^{-13}). \quad (194)$$

la contribución de los modos excitados de Kaluza-Klein de norma a orden de un lazo, en la norma unitaria, para los braching ratios Br obtenidos en este trabajo, se encuentran por debajo de las cotas experimentales.

4. Análisis de resultados

A continuación se muestran las gráficas de los braching ratios para los diferentes decaimientos teniendo en cuenta que la masa inicial debe ser mayor que la masa saliente $m_{l_\alpha^{(0)}} > m_{l_\beta^{(0)}}$.

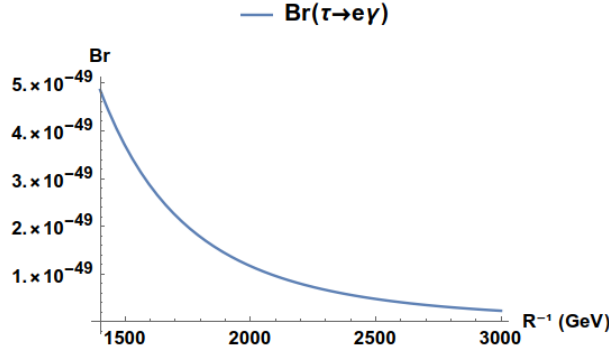


Figura 11: El Braching ratio en el esquema normal, para el decaimiento $\tau \rightarrow e\gamma$.

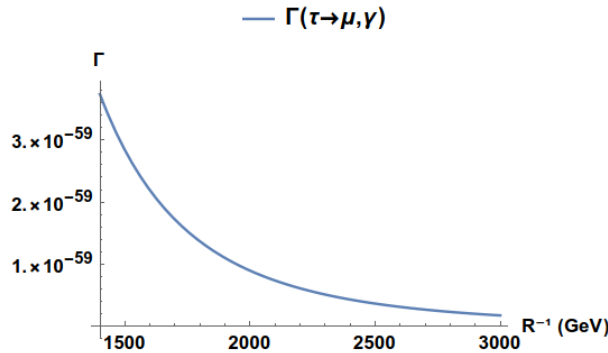


Figura 12: El Braching ratio en el esquema normal, para el decaimiento $\tau \rightarrow \mu\gamma$.

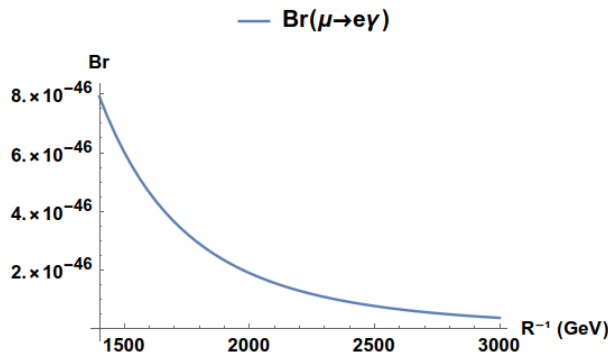


Figura 13: El Braching ratio en el esquema normal, para el decaimiento $\mu \rightarrow e\gamma$.

Las gráficas para los braching ratios para el esquema de la masa de los neutrinos invertido, tomando que R^{-1} se encuentra $1400\text{GeV} < R^{-1} < 3000\text{GeV}$. Como se puede observar en las gráficas 11,12,13, 14,15,16, no importa si se elige el esquema normal o invertido de la masa de los neutrinos, debido a que la masa de los neutrinos es pequeña, está no causa variaciones significativas en las tasas de decaimiento y por ende en

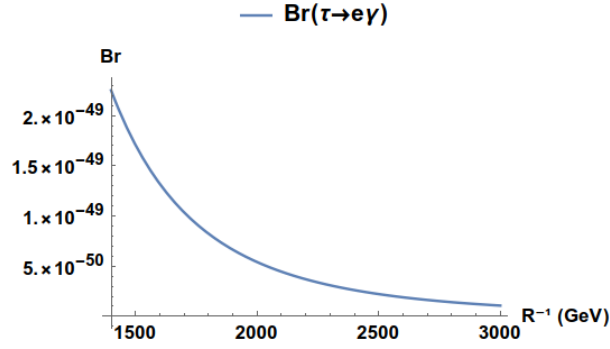


Figura 14: El Braching ratio en el esquema invertido, para el decaimiento $\mu \rightarrow e\gamma$.

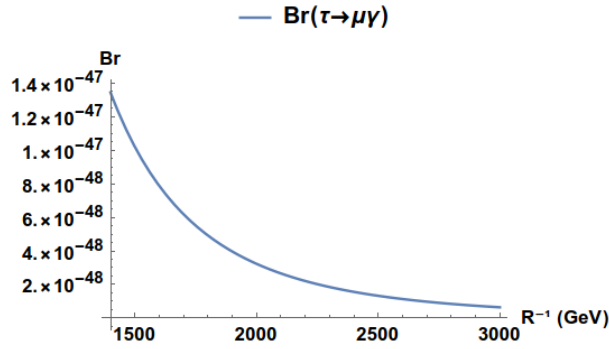


Figura 15: El Braching ratio en el esquema invertido, para el decaimiento $\mu \rightarrow e\gamma$.

los braching ratios, se puede observar que los ordenes de los braching ratios para ambos esquemas son casi idénticos. De acuerdo a los límites del LHC en el modelo de dimensión extra universal mínima (MUED) de los datos del LHC Run 1 y los límites más estrictos en el espacio de parámetros MUED se puede tomar desde $R^{-1} \approx 1400 GeV$ [82].

Como se puede observar en la gráfica 17, el braching ratio de $\mu \rightarrow e\gamma$ es mayor que los braching ratios para los otros decaimientos $\tau \rightarrow \mu\gamma$ y $\tau \rightarrow e\gamma$, se puede observar que es mayor su vida media del μ que del τ , y recordar que el braching ratio 182 es proporcional a la vida media de las partículas. De la

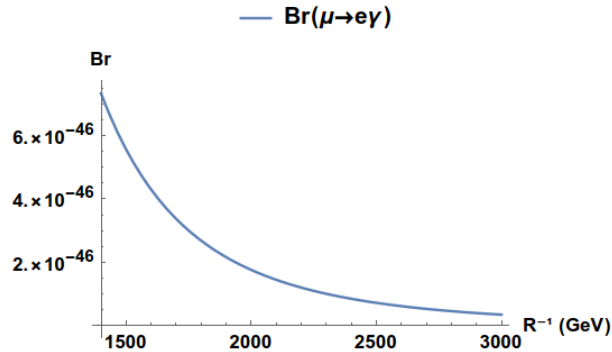


Figura 16: El Braching ratio en el esquema invertido, para el decaimiento $\mu \rightarrow e\gamma$.

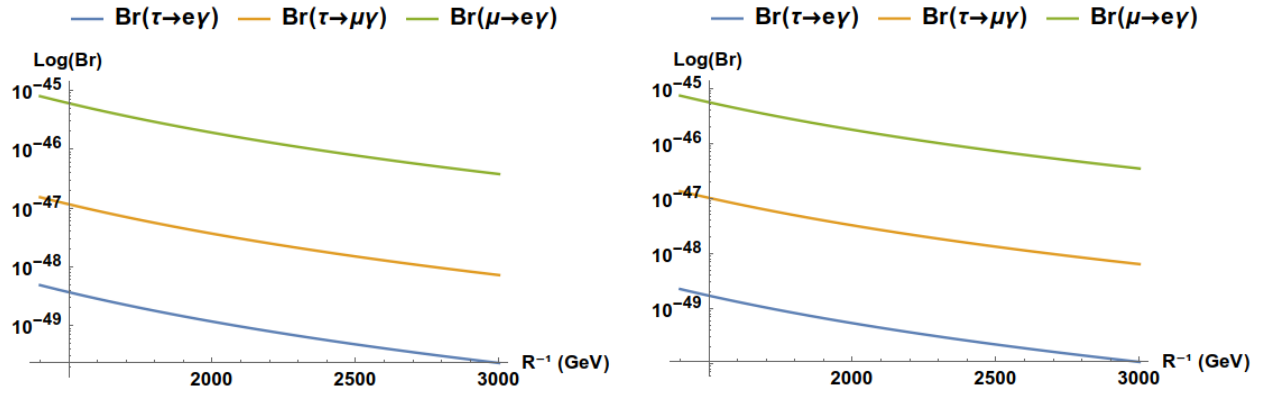


Figura 17: Las gráficas para los braching ratios tomando para el esquema de la masa de los neutrinos invertido, tomando que R^{-1} se encuentra $1400\text{GeV} < R^{-1} < 3000\text{GeV}$.

misma forma si tomamos la escala logarítmica para los braching ratios, para los diferentes decaimientos, no importa cual esquema tomemos, no existe una variación significativa en las gráficas 17, esto debido a que las masas de los neutrinos es demasiada pequeña en comparación a la masa de los leptones cargados y la masa del bosón.

5. Conclusiones

En este trabajo se calcularon las contribuciones de los modos excitados de Kaluza-Klein de norma, a orden de un lazo. El cálculo se desarrolló en el contexto del Modelo Estándar mínimamente extendido en dimensiones extras, este modelo permite que los neutrinos sean masivos y exista cambio de sabor leptónico, estos efectos no se encuentran descritos en el Modelo Estándar, por ello es que se buscan extensiones al ME, que describan este tipo de efectos, entre otros más. Es importante mencionar que faltaron calcular las contribuciones de los modos excitados de Kaluza-Klein escalares, en cambio dado que elegimos la norma unitaria, no existe la contribución de los Pseudo-bosones de Goldstone.

También cabe señalar que no importa si se trabaja en el esquema normal o invertido, de la masa de los neutrinos, debido a que la diferencia cuadrática de las masas Δm_{31}^2 y Δm_{21}^2 , es demasiado pequeña en comparación con la masa de los leptones cargados y del bosón.

Es importante hacer hincapié que dentro las expresiones analíticas de los diagramas de Feynman, no se encontraron divergencias ultravioletas. También cabe mencionar, que con ayuda de la unitariedad de las matrices $U_{\beta j}$ y $U_{\alpha j}^*$, se pudo eliminar los términos que no contribuyen a la amplitud total.

Cabe resaltar que las soluciones analíticas de las funciones de Passarino-Veltman, B_0 y C_0 , las cuales se desarrollaron en serie de Taylor se hizo a orden $\mathcal{O}(R^2)$ para poder facilitar el cálculo numérico en el programa de Wolfram Mathematica, de igual forma es importante mencionar que la expansión en series de las tasas de decaimiento, para poder obtener los branching ratios se hizo a orden $\mathcal{O}(R^2)$. Para mayor detalle sobre las reglas de Feynman, la tasa de decaimiento y las identidades de Gordon utilizadas, se recomienda revisar los apéndices.

Finalmente los branching ratios para un leptón cargado que decae a otro leptón cargado y a un fotón $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$, están dentro de las cotas reportadas experimentalmente. El *Branching ratio* para el decaimiento $\mu \rightarrow e\gamma$, que son del orden $\mathcal{O}(10^{-33})$, para ambos esquemas, se encuentra alejado de la cota experimental reportada por el *Particle Data Group*, que son del orden $\mathcal{O}(10^{-13})$, para el caso del decaimiento $\tau \rightarrow \mu\gamma$ el *Branching ratio* es del orden $\mathcal{O}(10^{-35})$, para ambos esquemas, de la misma forma se encuentra alejado de la cota experimental reportada por *Particle Data Group*, que son del orden $\mathcal{O}(10^{-8})$, finalmente para el decaimiento $\tau \rightarrow e\gamma$, la cota encontrada es del orden $\mathcal{O}(10^{-36})$, para el esquema normal, en el caso del esquema invertido es del orden $\mathcal{O}(10^{-37})$, ambos esquemas se encuentran alejados de la cota experimental reportada por *Particle Data Group*, que es del orden $\mathcal{O}(10^{-8})$.

6. Apéndice

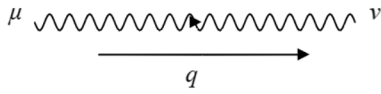
6.1. Apéndice A

6.1.1. Reglas de Feynman

Las líneas interiores son llamadas propagadores y se interpretan como partículas virtuales que no pueden ser observadas.

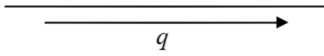
Propagadores:

1) Bosón $W_\mu^{(n)}$



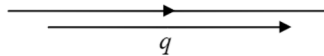
$$= \frac{-i}{q^2 - m_{W^{(n)}}^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \xi m_{w^{(n)}}^2} \right) \quad (195)$$

2) Campo de neutrino $\nu_{1,j}^{(n)}$



$$= \frac{i(q + m_{\nu_j^{(n)}})}{q^2 - m_{\nu_j^{(n)}}^2} \quad (196)$$

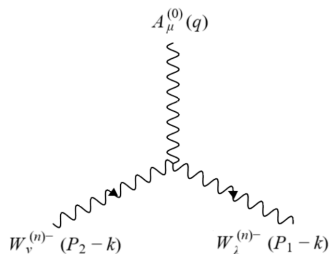
3) Campo de leptón $l_\beta^{(0)}$



$$= \frac{i(q + m_{l_\beta^{(0)}})}{q^2 - m_{l_\beta^{(0)}}^2} \quad (197)$$

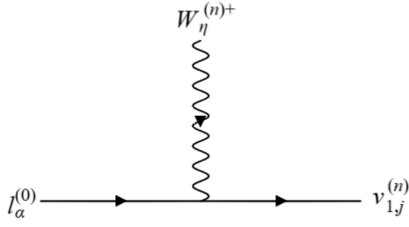
Vértices:

1) Regla para el vértice



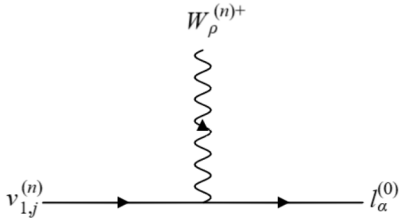
$$= ie[2g_{\lambda\mu}(P_{2\nu} - P_{1\nu}) - 2g_{\nu\mu}(P_{2\lambda} - P_{1\lambda}) - g_{\lambda\nu}(2k_\mu - P_{1\mu}) - P_{2\mu}] \quad (198)$$

2) Regla para el vértice



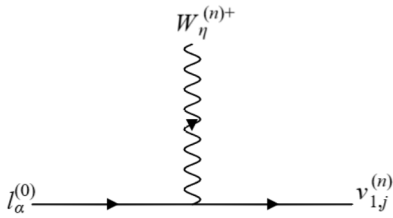
$$= \frac{ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L \quad (199)$$

3) Regla para el vértice



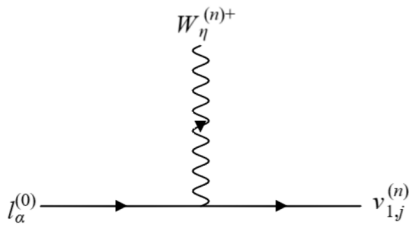
$$= \frac{ig \sin(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j} \gamma_\rho P_L \quad (200)$$

4) Regla para el vértice



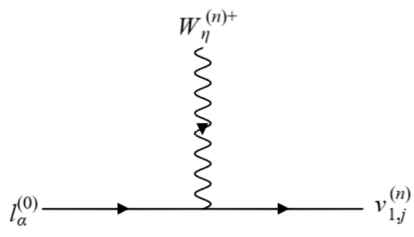
$$= \frac{-ig \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\eta P_L \quad (201)$$

5) Regla para el vértice



$$= \frac{-ig \cos(\theta_{n\nu_j})}{\sqrt{2}} U_{\alpha j} \gamma_\rho P_L \quad (202)$$

6) Regla para el vértice



$$= -ie\gamma_\mu \quad (203)$$

6.2. Apéndice B

6.2.1. Tasa de decaimiento

De forma general se considera un proceso de decaimiento $1 \rightarrow n$ con $|1\rangle = |\vec{P}_1\rangle$ y $|f\rangle = |\vec{P}_{f_1} \dots \vec{P}_{f_n}\rangle$, donde $P_1 \dots P_{f_n}$, son el momento inicial y final respectivamente. La tasa de decaimiento diferencial viene dado por la siguiente expresión, de forma general:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{(\delta^4(\sum_k P_{f_k} - P_1))}{2m_1} \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{P}_{f_k}}{(2\pi)^3 2E_{f_k}} |\mathcal{M}|^2 \quad (204)$$

Donde $d\Gamma$ es la tasa de decaimiento diferencial de la partícula 1. La tasa de decaimiento total de decaimiento, se obtiene integrando sobre el espacio fase de las partículas finales.

$$\Sigma = \prod_l S_l \int d\Gamma \quad (205)$$

donde $S_{-1}/i!$ es el factor de combinatoria que se utiliza para contar los estados finales indistinguibles de l partículas del mismo tipo.

De acuerdo con el decaimiento que se está estudiando, $l_\alpha^{(0)} \rightarrow \gamma^{(0)} l_\beta^{(0)}$, se tiene un proceso del tipo $1 \rightarrow 2$, con $|1\rangle = |\vec{P}_1\rangle$ y $|f\rangle = |\vec{P}_2, \vec{P}_3\rangle$, donde $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, son los momentos de los leptones $l_\alpha^{(0)}, l_\beta^{(0)}$ y el fotón $A_\mu^{(0)}$, respectivamente. Para nuestro caso, la tasa de decaimiento diferencial tiene la siguiente forma

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(P_3 + P_2 - P_1)}{2m_\alpha} \frac{d^3 \vec{P}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \vec{P}_2}{(2\pi)^3 2E_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (206)$$

Se procede a integrar la tasa de decaimiento diferencial, de tal forma que obtenemos

$$\Gamma = \int d\Gamma = \int (2\pi)^4 \frac{\delta^4(P_3 + P_2 - P_1)}{2m_\alpha} \frac{d^3 \vec{P}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \vec{P}_2}{(2\pi)^3 2E_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (207)$$

Sacando afuera de la integral las constantes y la amplitud que no depende de la integración, tenemos lo siguiente

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{P}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \vec{P}_2}{2E_2} \frac{\delta^4(P_3 + P_2 - P_1)}{2m_\alpha} \quad (208)$$

Reduciendo y separando la $\delta^4(P_3 + P_2 - P_1) = \delta(\vec{P}_3 + \vec{P}_2 - \vec{P}_1) \delta(P_3^0 + P_2^0 - P_1^0)$, tendríamos la siguiente expresión.

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \int \frac{d^3 \vec{P}_3}{E_3} \int \frac{d^3 \vec{P}_2}{E_2} \delta(\vec{P}_3 + \vec{P}_2 - \vec{P}_1) \delta(P_3^0 + P_2^0 - P_1^0) \quad (209)$$

Usando las siguientes relaciones y que la partícula 1, parte del reposo $\vec{P}_1 = 0$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \vec{P}_3 \\ P_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{P}_3 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ P_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ P_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ E_1 \end{pmatrix} \quad (210)$$

Las relaciones de la masa de nuestras partículas son las siguientes

$$l_\alpha^{(0)} \rightarrow m_\alpha \quad l_\beta^{(0)} \rightarrow m_\beta \quad A_\mu^{(0)} \rightarrow m_\mu = 0 \quad (211)$$

La energía relativista de nuestras partículas sería la siguiente

$$E_3 = \vec{P}_3 \quad E_2 = \sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2} \quad E_1 = m_\alpha \quad (212)$$

Haciendo los cambios pertinentes, la integral se reduce a lo siguiente

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \int \frac{d^3 \vec{P}_3}{E_3} \int \frac{d^3 \vec{P}_2}{\sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2}} \delta^3(\vec{P}_3 - (-\vec{P}_2)) \delta\left(E_3 + \sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2} - m_\alpha\right) \quad (213)$$

Cancelamos la integral de $\int d^3 \vec{P}_2$, con la $\delta^3(\vec{P}_3 - (-\vec{P}_2))$, de tal forma que la integral que nos queda por resolver es la siguiente

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \int \frac{d^3 \vec{P}_3}{E_3} \frac{\delta\left(E_3 + \sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2} - m_\alpha\right)}{\sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2}} \quad (214)$$

Para poder calcular la integral de una manera mas fácil, hacemos un cambio a coordenadas esféricas de tal forma, de tal forma que tendríamos lo siguiente $d^3 \vec{P}_3 = \vec{P}_3^2 \sin \theta d\vec{P}_3 d\theta d\phi = \sin \theta d\theta d\phi \vec{P}_3^2 d\vec{P}_3 = d\Omega \vec{P}_3^2 d\vec{P}_3$, de tal forma que la integral nos queda de la siguiente forma

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \int d\Omega \int \frac{d\vec{p}_3 \vec{P}_3^2}{E_3} \frac{\delta\left(E_3 + \sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2} - m_\alpha\right)}{\sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2}} \quad (215)$$

La integral de $\int d\Omega = 4\pi$ y hacemos el siguiente cambio de variable $E_3^2 = \vec{P}_3^2 \Rightarrow E_3 dE_3 = \vec{P}_3 d\vec{P}_3$ De forma de que la integral, que queda por integrar es la siguiente

$$\Gamma = \frac{4\pi |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \int dE_3 E_3 \frac{\delta\left(E_3 + \sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2} - m_\alpha\right)}{\sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2}} \quad (216)$$

Usamos las siguiente propiedad de la función delta para integrar

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{|f'(a_j)|} \quad (217)$$

Entonces nuestra $f(E_3) = \left(E_3 + \sqrt{\vec{P}_2^2 + m_\beta^2} - m_\alpha\right)$, con $x = E_3$. Encontramos donde $f(a_j) = 0$

$$a_1 = \frac{m_\alpha^2 + -m_\beta^2}{2m_\alpha} \quad (218)$$

la derivada de $f'(E_3)$, es la siguiente

$$f'(E_3) = 1 + \frac{E_3}{\sqrt{E_3^2 + m_\beta^2}} \quad (219)$$

Con $a_1 = E_3 = \frac{m_\alpha^2 + -m_\beta^2}{2m_\alpha}$, tenemos que $f'(E_3)$, es

$$|f'(a_1)| = \left| \frac{2m_\alpha^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} \right| \quad (220)$$

Entonces nuestra función delta, queda de la siguiente forma

$$\sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{|f'(a_j)|} = \frac{\delta\left(E_3 - \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}\right)}{\frac{2m_\alpha^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2}} \quad (221)$$

De forma que nuestra integral queda de la siguiente forma

$$\Gamma = \frac{4\pi|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \int \frac{dE_3 E_3}{\sqrt{E_3^2 + m_\beta^2}} \frac{\delta\left(E_3 - \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}\right)}{\frac{2m_\alpha^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2}} \quad (222)$$

Resolviendo la integral y haciendo el álgebra pertinente, tenemos lo siguiente

$$\Gamma = \frac{4\pi|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{2m_\alpha^2} \quad (223)$$

Reducimos las masas, de tal forma que tenemos

$$\Gamma = \frac{4\pi|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_\alpha} \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{2m_\alpha^2} \quad (224)$$

Finalmente la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi} \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{m_\alpha^3} \quad (225)$$

6.3. Apéndice C

6.3.1. Identidades de Gordon

Identidades de Gordon, útiles par nuestro calculo.

$$\bar{U}_\beta(P_2) P_{1\mu} U_\alpha(P_2) = \bar{U}_\beta \left(\frac{1}{2} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) U_\alpha(P_1) \quad (226)$$

Para demostrar la identidad de Gordon se parte de la siguiente ecuación, con $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$:

$$\bar{U}_\beta(P_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu U_\alpha(P_2) \quad (227)$$

Se multiplica la ecuación por $\frac{i}{2}$ y se desarrolla el conmutador

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu U_\alpha(P_2) = \bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \left(\frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) q^\nu U_\alpha(P_2) \quad (228)$$

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) q^\nu U_\alpha(P_2) = \underbrace{\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu U_\alpha(P_2)}_{\text{parte I}} - \underbrace{\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu U_\alpha(P_2)}_{\text{parte II}} \quad (229)$$

Solucionamos primero la parte I:

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu U_\alpha(P_2) = \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu (P_1 - P_2)^\nu U_\alpha(P_2) \quad (230)$$

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu P_1^\nu U_\alpha(P_2) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu P_2^\nu U_\alpha(P_2) \quad (231)$$

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_1^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu U_\alpha(P_2) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu P_2^\nu \gamma_\mu U_\alpha(P_2) \quad (232)$$

Utilizamos la siguientes relaciones de las matrices de Dirac y la ecuación de Dirac:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \cdot I_4$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = 2g_{\mu\nu} \cdot I_4 - \gamma_\nu \gamma_\mu$$

$$\bar{U}_\beta(P_2) \not{P}_2 = m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \quad (233)$$

$$\not{P}_1 U_\alpha(P_1) = m_{U_\alpha^{(0)}} U_\alpha(P_1)$$

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_1^\nu (2g_{\mu\nu} \cdot I_4 - \gamma_\mu \gamma_\nu) U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \not{P}_2 \gamma_\mu U_\alpha(P_1) \quad (234)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{2}{4} g_{\mu\nu} P_1^\nu U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_1^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu U_\alpha(P_1) \quad (235)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu P_1^\nu U_\alpha(P_1) \quad (236)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \not{P}_1 U_\alpha(P_1) \quad (237)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) - \frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} U_\alpha(P_1) \quad (238)$$

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu U_\alpha(P_2) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} U_\alpha(P_1) \quad (239)$$

Solucionamos la parte II:

$$= -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu U_\alpha(P_1) = -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu (P_1 - P_2)^\nu U_\alpha(P_1) \quad (240)$$

$$= -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu P_1^\nu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu P_2^\nu U_\alpha(P_1) \quad (241)$$

$$- \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \not{P}_1 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu U_\alpha(P_1) \quad (242)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu (2g_{\mu\nu} \cdot I_4 - \gamma_\nu \gamma_\mu) U_\alpha(P_1) \quad (243)$$

Usando las relaciones de las matrices de Dirac y la ecuación de Dirac:

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{2}{4} g_{\mu\nu} P_2^\nu U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu U_\alpha(P_1) \quad (244)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \not{P}_2 \gamma_\mu U_\alpha(P_1) \quad (245)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) - \frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} U_\alpha(P_1) \quad (246)$$

$$- \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} U_\alpha(P_1) \quad (247)$$

Se suman la parte I y II:

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu U_\alpha(P_2) + -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu U_\alpha(P_1) \quad (248)$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu U_\alpha(P_1) &= \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} U_\alpha(P_1) \\
&\quad + \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} U_\alpha(P_1)
\end{aligned} \tag{249}$$

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{2} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} U_\alpha(P_1) \tag{250}$$

Utilizamos la siguiente relación de los momentos:

$$P_{1\mu} = P_{2\mu}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu U_\alpha(P_1) &= \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{2} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \right) U_\alpha(P_1) \\
&\quad + \bar{U}_\beta(P_2) P_{1\mu} U_\alpha(P_1)
\end{aligned} \tag{251}$$

Despejamos $P_{1\mu}$, para obtener la identidad de Gordon:

$$\bar{U}_\beta(P_2) P_{1\mu} U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(-\frac{1}{2} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} + m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) U_\alpha(P_1) \tag{252}$$

Segunda identidad de Gordon.

$$\bar{U}_\beta(P_2) P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_2) = \bar{U}_\beta \left(\frac{1}{2} \left(m_{U_\beta^{(0)}} - m_{U_\alpha^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) \quad (253)$$

Para demostrar la identidad de Gordon se parte de la siguiente ecuación, con $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$:

$$\bar{U}_\beta(P_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (254)$$

Multiplicamos por $\frac{i}{2}$ y desarrollamos el conmutador:

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \left(\frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (255)$$

$$= -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \underbrace{-\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1)}_{\text{parte I}} + \underbrace{\bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1)}_{\text{parte II}} \quad (256)$$

Solucionamos la parte I:

$$-\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = -\bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_\nu (P_1 - P_2)^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (257)$$

$$= -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu P_1^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu + \gamma_\nu P_2^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (258)$$

$$= -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 P_1^\nu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (259)$$

Usando las relaciones de las matrices de Dirac y la ecuación de Dirac, podemos escribir lo siguiente:

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu P_1^\nu U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu (2g_{\mu\nu} \cdot I_4 - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (260)$$

$$= \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_5 \not{P}_1 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{2}{4} g_{\mu\nu} P_2^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (261)$$

$$= \frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu P_2^\nu \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (262)$$

$$= \frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \not{P}_2 \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (263)$$

$$= \frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) - \frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (264)$$

$$-\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(\left(\frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \gamma_5 - m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (265)$$

Solución de la parte II:

$$\bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu (P_1 - P_2)^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (266)$$

$$= \bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu P_1^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu P_2^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (267)$$

$$= -\bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu P_1^\nu \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} P_2^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (268)$$

Usando las relaciones de las matrices de Dirac y la ecuación de Dirac, podemos escribir lo siguiente:

$$= -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \not{P}_2 \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_1^\nu (2g_{\mu\nu} \cdot I_4 - \gamma_\mu \gamma_\nu) \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (269)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{2}{4} g_{\mu\nu} P_1^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) - \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 P_1^\nu U_\alpha(P_1) \quad (270)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu P_1^\nu U_\alpha(P_1) \quad (271)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_5 \not{P}_1 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (272)$$

$$= -\frac{1}{4} m_{U_\beta^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \frac{1}{4} m_{U_\alpha^{(0)}} \bar{U}_\beta(P_2) \gamma_\mu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (273)$$

$$\bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} - m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (274)$$

Se suman la parte I y II:

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = -\bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\alpha(P_2) \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (275)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} \gamma_5 - m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{2} P_{2\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \\ &\quad + \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{4} \left(m_{U_\alpha^{(0)}} - m_{U_\beta^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) \frac{1}{4} P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \end{aligned} \quad (276)$$

Usando la siguiente relación de los momentos podemos escribir la segunda identidad de Gordon $P_{1\mu} = P_{2\mu}$

$$\bar{U}_\beta(P_2) \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{2} \left(m_{U_\beta^{(0)}} - m_{U_\alpha^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) + \bar{U}_\beta(P_2) P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) \quad (277)$$

Despejamos $P_{1\mu}$, para obtener la identidad de Gordon:

$$\bar{U}_\beta(P_2) P_{1\mu} \gamma_5 U_\alpha(P_1) = \bar{U}_\beta(P_2) \left(\frac{1}{2} \left(m_{U_\beta^{(0)}} - m_{U_\alpha^{(0)}} \right) \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \right) U_\alpha(P_1) \quad (278)$$

6.4. Apéndice D.

6.4.1. Las soluciones de las funciones escalares de Passarino-Veltman

La función B_0

La función de dos puntos, comúnmente denotada como B_0 , se define como

$$B_0 = (p_1, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - m_0^2 + i\epsilon] [(k + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]} \quad (279)$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$ es una cantidad positiva. Dentro del marco de la regularización dimensional, esta integral ha sido planteada en D dimensiones. En este contexto, el parámetro μ , con unidades de masa, se ha introducido para corregir las unidades de la integral sobre el D -momento k .

Solución analítica

Consideremos la identidad

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (280)$$

tomando

$$A = k^2 - m_0^2 + i\epsilon \quad (281)$$

$$B = (k + p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon \quad (282)$$

en está se ha implementado el resultado en la definición de la función B_0 , dada en la Ec. 279, se encuentra que

$$B_0(p_1, m_0, m_1) \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \int_0^1 dx \frac{1}{[(k + (1-x)p_1)^2 - R]^2} \quad (283)$$

donde

$$R = (x-1)xp_1^2 + xm_0^2 + (1-x)m_1^2 - i\epsilon \quad (284)$$

En el siguiente paso, utilizamos el cambio de variable $k = q - (1-x)p_1$, cuyo Jacobiano es $+1$. Esto simplifica el denominador del integrando de esta función escalar, el cual se expresa como $[(k + (1-x)p_1)^2 - R]^2 \rightarrow (q^2 - R)^2$. Luego se utiliza la solución general

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(2-\Delta)^n} = \frac{(-1)^{n_i} \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{D}{2}} \quad (285)$$

y las expansiones en serie de potencias

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \gamma_E + \mathcal{O}(\alpha) \quad (286)$$

$$X^{-\alpha} = 1 - \alpha \log X + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (287)$$

que satisfacen si $\alpha < 1$. Esto nos permite separar la parte divergente

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{\alpha} - \gamma_E + \log 4\pi \quad (288)$$

y así expresar la función B_0 como

$$B_0(p_1, m_0, m_1) = \Delta_\alpha - \log\left(\frac{m_0 m_1}{\mu^2}\right) - \int_0^1 dx \log\left[\frac{x^2 p_1^2 + x(m_0^2 - m_1^2 - p_1^2) + m_1^2 - i\epsilon}{m_0 m_1}\right] \quad (289)$$

El argumento del logaritmo en el integrando no es otra cosa que un polinomio de grado 2, así que, por el teorema fundamental del álgebra, podemos expresar a éste como un producto de polinomios lineales, para lo que necesitamos hallar las raíces de dicho polinomio. Hay dos casos, los cuales definen a dos distintos conjuntos de raíces:

- Se satisface la condición $p_1^2 < (m_0 - m_1)^2$, a lo que corresponde las raíces

$$x_\pm = \frac{p_1^2 + m_1^2 - m_0^2}{2p_1^2} \pm \frac{\sqrt{[(m_0 - m_1)^2 - p_1^2][(m_0 + m_1)^2 - p_1^2]}}{2p_1^2} \pm i\epsilon \quad (290)$$

- Se satisface la condición $p_2^2 > (m_0 - m_1)^2$, para lo que tenemos

$$x_\pm = \frac{p_1^2 + m_1^2 - m_0^2}{2p_1^2} \pm \frac{\sqrt{[p_1^2 - (m_0 - m_1)^2][p_1^2 - (m_0 + m_1)^2]}}{2p_1^2} \pm i\epsilon \quad (291)$$

- Se satisface la condición $(m_0 - m_1)^2 < p_1^2 < (m_0 + m_1)^2$

$$x_\pm = \frac{p_1^2 + m_1^2 - m_0^2}{2p_1^2} \pm \frac{\sqrt{[p_1^2 - (m_0 - m_1)^2][(m_0 + m_1)^2 - p_1^2]}}{2p_1^2} \pm i\epsilon \quad (292)$$

Notemos que en ambos casos, $\text{sgn}\mathfrak{I}(x_+) \neq \text{sgn}\mathfrak{I}(x_-)$. Restringiendo nuestro análisis al conjunto de números complejos que se encuentran en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se puede verificar, por inspección, que para dos números complejos, z_1 y z_2 , se satisface la propiedad

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + \eta(z_1, z_2) \quad (293)$$

con la función $\eta(z_1, z_2)$ definida como

$$\eta(z_1, z_2) = 2\pi i [\theta(-\mathfrak{I}(z_1))\theta(-\mathfrak{I}(z_2))\theta(\mathfrak{I}(z_1 z_2)) - \theta(\mathfrak{I}(z_1))\theta(\mathfrak{I}(z_2))\theta(-\mathfrak{I}(z_1 z_2))] \quad (294)$$

puesto que $\text{sgn}\mathfrak{I}(x_+) \neq \text{sgn}\mathfrak{I}(x_-)$ resulta que $\text{sgn}\mathfrak{I}(x - x_+) \neq \text{sgn}\mathfrak{I}(x - x_-)$, para $x \in [0, 1]$. De acuerdo

con la propiedad dada en la Ec. 289, esto implica que el logaritmo en el integrando de la Ec.293, se puede expresar como la suma de logaritmos

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{x^2 - p_1^2 + x(m_0^2 - m_1^2 - p_1^2) + m_1^2 - i\epsilon}{m_0 m_1} \right] &= \log \left[\frac{p_1^2}{m_0 m_1} (x - x_+)(x - x_-) \right] \\ &= \log \left(\frac{p_1^2}{m_0 m_1} + \log(x - x_+) + \log(x - x_-) \right) \end{aligned} \quad (295)$$

Las integrales de los logaritmos resultantes del paso anterior se pueden resolver, dando como resultado

$$B_0(p_1, m_0, m_1) = \Delta_\alpha + 2 - \log \left(\frac{p_1^2}{\mu^2} \right) + x_+ \log \left(\frac{x_+ - 1}{x_+} \right) + x_- \log \left(\frac{x_+ - 1}{x_-} \right) - \log [(1 - x_+)(1 - x_-)] \quad (296)$$

Puesto que ya hemos resuelto todas las integrales, nos deshacemos del factor ϵ tomando $\epsilon \rightarrow 0$.

Análisis para los diferentes casos

A continuación exploramos diferentes casos, distinguidos uno de los otros por las relaciones que se satisfacen entre p_1^2 y $(m_0 - m_1)$, y entre p_1^2 y $(m_0 + m_1)^2$. Para ello, serán útiles las definiciones

$$\hat{S}_\pm = \sqrt{(\sqrt{x_0} \pm \sqrt{x_1})^2 - x_{p_1}} \quad (297)$$

$$\tilde{S}_\pm = \sqrt{x_{p_1} - (\sqrt{x_0} \pm \sqrt{x_1})^2} \quad (298)$$

dadas en términos de las razones $x_0 = m_0^2/M^2$, $x_1 = m_1^2/M^2$ y $x_{p_1} = p_1^2/M^2$, siendo M alguna masa de o escala de energía que se toma como referencia. Adicionalmente suponemos $m_0 \neq 0, m_1 \neq 0, p_1^2 \neq 0$.

- $p_1^2 < (m_0 - m_1)^2$. i esta condición se cumple, la función B_0 se puede escribir como

$$\begin{aligned} B_0(P_1, m_0, m_1) &= \Delta_\alpha - \log \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) - \frac{x_0}{x_0 - x_1} \log x_0 + \frac{x_1}{x_0 - x_1} \log x_1 \\ &+ 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{x_{p_1}} - \frac{x_0 + x_1}{x_0 - x_1} \right) \log \left(\frac{x_1}{x_0} \right) + \frac{\hat{s}_+ \hat{s}_-}{x_{p_1}} \log \left(\frac{\hat{s}_+ + \hat{s}_-}{\hat{s}_+ - \hat{s}_-} \right) \end{aligned} \quad (299)$$

- $p_1^2 > (m_0 - m_1)^2$. En este caso la función B_0 se expresa como

$$\begin{aligned} B_0(P_1, m_0, m_1) &= \Delta_\alpha - \log \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) - \frac{x_0}{x_0 - x_1} \log x_0 + \frac{x_1}{x_0 - x_1} \log x_1 \\ &+ 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{x_{p_1}} - \frac{x_0 + x_1}{x_0 - x_1} \right) \log \left(\frac{x_1}{x_0} \right) + \frac{\hat{s}_+ \hat{s}_-}{x_{p_1}} \log \left(\frac{\hat{s}_+ - \hat{s}_-}{\hat{s}_+ + \hat{s}_-} \right) \end{aligned} \quad (300)$$

En general, puede ocurrir que algunos de los argumentos de la función B_0 sean iguales a 0. Al respecto, tenemos los siguientes casos:

- $p_1^2 = 0$, $m_0 \neq 0$ y $m_0 = m_1$

$$B_0 = (0, m_0, m_0) = \Delta_\alpha - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \log x_0 \quad (301)$$

- $p_1^2 = 0$, $m_0 \neq 0$, $m_1 \neq 0$ y $m_1 \neq m_0$, a lo que le corresponde la expresión

$$B_0 = (0, m_0, m_0) = \Delta_\alpha - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + 1 - \frac{x_0}{x_0 - x_1} \log x_1 + \frac{x_0}{x_0 - x_1} \log x_1 \quad (302)$$

La función de tres puntos

Consideremos la siguiente función C_0 :

$$C_0(p_1^2, p^2, (p_1 - p)^2, m_a^2, m_b^2, m_c^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{[q^2 - m_a^2] [(q + p_1)^2 - m_b^2] [(q + p_1 - p)^2 - m_c^2]} \quad (303)$$

Utilizando el método de la parametrización de Feynman, escribimos esta función como

$$C_0(p_1^2, p^2, (p_1 - p)^2, m_a^2, m_b^2, m_c^2) = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [xm_a^2 + ym_b^2 + (1-x-y)m_c^2 - x(1-x)p_1^2 - (x+y)(1-x-y)p^2 + 2x(1-x-y)p_1 \cdot p] \quad (304)$$

en donde hay integrales paramétricas sobre las variables x y y .

Particularicemos esta expresión al caso en que $p_1^2 = m_1^2, p^2 = m_2^2$, $m_a = m_c = m$, pero $m_1 \neq m_2$, en general, y $m_b \neq m$, además de nueva cuenta $(p_1 - p)^2 = 0$, la función de tres puntos se escribe como

$$C_0(p_1^2, p^2, (p_1 - p)^2, m_a^2, m_b^2, m_c^2) = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(1-y)m^2 + ym_b^2 - xym_1^2 - y(1-x-y)m_2^2} \quad (305)$$

Añadimos la condición $m_2^2 \ll m$ y $m_1^2 \ll m$, con lo que la integral se expresa como

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(1-y)m^2 + ym_b^2 - xym_1^2 - y(1-x-y)m_2^2} \approx \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{1-r_b} + \frac{r_b}{(1-r_b)^2} \log(r_b) + \frac{r_1+r_2}{4(1-r_b)^4} + \frac{r_b(r_1+r_2)}{(1-r_b)^4} + \frac{r_b(r_1+r_2)}{(1-r_b)^4} \log(r_b) - \frac{5r_b^2(r_1+r_2)}{4(1-r_b)^4} + \frac{r_2^2(r_2+r_2)}{2(1-r_b)^4} \log(r_b) \right] \quad (306)$$

En terminos de las masas la función C_0 y agregado la suposición $m_b^2 \ll m^2$, el resultado es mas corto

$$C_0(p_1^2, p_2^2, 0, m_a^2, m_b^2, m_a^2) \approx \frac{1}{m_b^2 - m^2} - \frac{m_b^2}{(m^2 - m_b^2)^2} \log\left(\frac{m_b^2}{m^2}\right) - \frac{m^4(m_1^2 + m_2^2)}{4(m^2 - m_b^2)^4} \quad (307)$$

Referencias

- [1] S. L. Glashow, *Partial-symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [2] A. Salam. *Weak and electromagnetic interactions*, Conf. Proc. **C680519**, 367 (1968).
- [3] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Reading, MA: Perseus, 1995).
- [5] C. Giunti and C. W. Kim *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (New York: Oxford University Press, 2007).
- [6] G. Aad *et al.*, *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716**, 1 (2012).
- [7] S. Chatrchyan *et al.*, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. B **716**, 30 (2012).
- [8] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. B **12**, 132 (1964).
- [9] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [10] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [11] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [12] Q. R. Ahmad *et al.* (SNO Collaboration), Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002).
- [13] F. P. An *et al.*, *Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay*, Phys. Rev. Lett. **108**, 171803 (2012).
- [14] J. K. Ahn *et al.* (RENO Collaboration), *Observation of Reactor Electron Antineutrinos Disappearance in the RENO Experiment*, Phys. Rev. Lett. **108**, 191802 (2012).
- [15] B. Pontecorvo, *Mesonium and anti-mesonium*, Sov. Phys.-JETP **6** 429 (1957).
- [16] C. Lovelace, *Pomeron form factors and dual Regge cuts*, Phys. Lett B **34**, 500 (1971).
- [17] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B **443**, 85 (1995).
- [18] G. Veneziano, *Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories*, Nuovo Cim. A **57**, 190 (1968).

- [19] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921**, 966 (1921).
- [20] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys. **37** 895 (1926).
- [21] G. Bélanger, M. Kakizaki, and A. Pukhov, *Dark matter in UED: the role of the second KK level*, JCAP **2011**, 009 (2011).
- [22] N. Deutschmann, T. Flacke, and J. S. Kim, *Current LHC constraints on minimal universal extra dimensions*, Phys. Lett B **771**, 515 (2017).
- [23] A. Mück, A. Pilaftsis, and R. Rückl, *Minimal higher-dimensional extensions of the standard model and electroweak observables*, Phys. Rev. D **65**, 085037 (2002).
- [24] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, *Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions*, Nucl. Phys. B **537**, 47 (1999).
- [25] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano, *Gauge invariance and quantization of Yang-Mills theories in extra dimensions*, Phys. Rev. D **82**, 116012 (2010).
- [26] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *Hidden symmetries induced by a canonical transformation and gauge structure of compactified Yang-Mills theories*, Phys. Rev. D **88**, 036015 (2013).
- [27] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *Yang-Mills theories with an arbitrary number of compactified extra dimensions*, Phys. Rev. D **89**, 116015 (2014).
- [28] T. Appelquist, H. -C. Cheng, and B. Dobrescu, *Bounds on universal extra dimensions*, Phys. Rev. D **64**, 035002 (2001).
- [29] A. Cordero-Cid, M. Gómez-Bock, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *The Standard Model with one universal extra dimension*, Pramana **80**, 369 (2013).
- [30] H. Novales-Sánchez, M. Salinas, J. J. Toscano, and O. Vázquez-Hernández, *Electric dipole moments of charged leptons at one loop in the presence of massive neutrinos*, Phys. Rev. D **95**, 055016 (2017).
- [31] H. Novales-Sánchez, M. Salinas, and J. J. Toscano, *About heavy neutrinos: Lepton-flavor violation in decays of charged leptons*, J. Phys. G **45**, 095004 (2018).
- [32] U. Bellgardt *et al.* (SINDRUM Collaboration), *Search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^+$* , Nucl. Phys. B **299**, 1 (1988).

- [33] J. Adam *et al.* (MEG Collaboration), *New Constraint on the Existence of the $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ Decay*, Phys. Rev. Lett. **110**, 201801(2013).
- [34] J. G. Méndez and J. J. Toscano, *A nonlinear R_ξ -gauge for the electroweak theory*, Rev. Mex. Fis. **50**, 346 (2004).
- [35] I. García-Jiménez, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *Distinctive ultraviolet structure of extra-dimensional Yang-Mills theories by integration of heavy Kaluza-Klein modes*, Phys. Rev. D **93**, 096007 (2016).
- [36] G. Passarino and M. Veltman, *One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model*, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).
- [37] I. Antoniadis. A possible new dimension at a few TeV. Phys. Lett. B, 246(3-4):377–384, aug 1990. doi: 10.1016/0370-2693(90)90617-F.
- [38] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys. Lett. B, 429(3):263–272, 1998. doi: 10.1016/S0370-2693(98)00466-3.
- [39] I. Antoniadis. A possible new dimension at a few TeV. Phys. Lett. B, 246(3-4):377–384, aug 1990. doi: 10.1016/0370-2693(90)90617-F.
- [40] Ignatios Antoniadis, Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a tev. Physics Letters B, 436(3–4):257 – 263, 1998. doi: 10.1016/S0370-2693(98)00860-0.
- [41] Theodor Kaluza. On the problem of unity in physics. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 1921:966–972, 1921.
- [42] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. Zeitschrift für Physik, 37 (12):895–906, 1926. doi: 10.1007/BF01397481.
- [43] Lisa Randall and Raman Sundrum. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. Physical Review Letters, page 9, 1999. doi: 10.1103/PhysRevLett.83.3370.
- [44] Lisa Randall and Raman Sundrum. An Alternative to Compactification. Physical Review Letters, 83(23):4690–4693, 1999. doi: 10.1103/PhysRevLett.83.4690.
- [45] Keith R. Dienes, Emilian Dudas, and Tony Gherghetta. Extra spacetime dimensions and unification. Physics Letters B, 436(1–2):55 – 65, 1998. doi:10.1016/S0370-2693(98)00977-0.
- [46] Gary Shiu and S.-H. Henry Tye. Tev scale superstring and extra dimensions. Phys. Rev. D, 58: 106007, Oct 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.58.106007.

- [47] Keith R Dienes, Emilian Dudas, and Tony Gherghetta. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions. *Nuclear Physics B*, 537(1-3):47–108, jan 1999. doi: 10.1016/S0550-3213(98)00669-5.
- [48] D Bailin and A Love. Kaluza-klein theories. *Reports on Progress in Physics*, 50(9):1087, 1987. doi: 10.1088/0034-4885/50/9/001.
- [49] J.M. Overduin and P.S. Wesson. Kaluza-Klein gravity. *Phys. Rep.*, 283(5-6):303–378, apr 1997. doi: 10.1016/S0370-1573(96)00046-4.
- [50] Joseph Kouneiher and Burra G. Sidharth. Mass generation without the higgs mechanism. *International Journal of Theoretical Physics*, 54(9):3044–3082, 2015. doi: 10.1007/s10773-015-2542-1.
- [51] C.P. Burgess. An Introduction to Effective Field Theory. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 57(1):329–362, nov 2007. doi: 10.1146/annurev.nucl.56.080805.140508.
- [52] M Beneke. Effective field theory – concepts and applications. pages 145–148, 2010. doi: 10.5170/CERN-2010-002.145.
- [53] F. J. Dyson. The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman. *Physical Review*, 75(3):486–502, feb 1949. doi: 10.1103/PhysRev.75.486.
- [54] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano. Hidden symmetries induced by a canonical transformation and gauge structure of compactified yang-mills theories. *Phys. Rev. D*, 88:036015, Aug 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.036015.
- [55] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano. Gauge invariance and quantization of yang-mills theories in extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 82:116012, Dec 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.116012.
- [56] J. Wudka, Electroweak effective lagrangians, *Int. J. Mod. Phys. A* 9, 2301 (1994).
- [57] Montaña., J., Novales-Sánchez, H., Toscano, J. J. (2019). Effects of universal extra dimensions on top-quark electromagnetic interactions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 47(1), 015002.
- [58] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 40, 100001 (2016) and 2020 update.
- [59] S. Fukuda et al. [Super-Kamiokande Collaboration], *Phys. Lett. B* 539, 179 (2002), arXiv:hep-ex/0205075.
- [60] Q.R. Ahmad et al. [SNO Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* 89, 011301 (2002), arXiv:nucl-ex/0204008.

- [61] F.P. An et al., Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay, *Phys. Rev. Lett.* 108, 171803 (2012).
- [62] J.K. Ahn et al. (RENO Collaboration), Observation of Reactor Electron Antineutrinos Disappearance in the RENO Experiments, *Phys. Rev. Lett.* 108, 191802 (2012).
- [63] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), The Review of Particle Physics *Phys. Rev. D* 98, 030001 (2018).
- [64] J. Einasto, A. Kaasik, and E. Saar, Dynamic evidence on massive coronas of galaxies, *Nature* 250, 309 (1974).
- [65] J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles, and A. Yahil, The Size and Mass of Galaxies, and the Mass of the Universe, *As-trophys. J.* 193, L1 (1974).
- [66] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Me-chanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2011).
- [67] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Gott. Nachr.* 1918, 235 (1918)
- [68] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [69] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley y Sons, New York, 1999).
- [70] W. Pauli, Letter to the radio actives in Tabingen, December 1930, reproduced as On the Earlier and More Recent History of the Neutrino in *Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* 14(1), 122 (2000).
- [71] J. Chadwick, *Nature* 129, 312 (1932).
- [72] E. Fermi, *Ricerca Scientifica* 2, 12 (1933); see also F. Perrin, *Comptes Rendues* 197, 1625 (1933).
- [73] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* 28, 870 (1962).
- [74] Q.R. Ahmad et al. [SNO Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* 89, 011301 (2002), arXiv:nucl-ex/0204008.
- [75] F.P. An et al., Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay, *Phys. Rev. Lett.* 108, 171803 (2012).
- [76] Qian, X., Vogel, P. (2015). Neutrino mass hierarchy. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 83, 1-30.
- [77] Altenmüller, K., Arenz, M., Baek, W. J., Beck, M., Beglarian, A., Behrens, J., ... Block, F. (2020). High-resolution spectroscopy of gaseous ^{83}mKr conversion electrons with the KATRIN experiment. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 47(6), 065002.

- [78] Baracchini, E. (2010). First result from the MEG experiment. arXiv preprint arXiv:1005.2569.
- [79] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963).
- [80] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49, 652 (1973).
- [81] QuiRÓS M., "New Ideas in Symmetry Breaking", arXiv:hep-ph/0302189.
- [82] Deutschmann, N., Flacke, T., Kim, J. S. (2017). Current LHC constraints on minimal universal extra dimensions. Physics Letters B, 771, 515-520.