



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**Acoplamiento de Plasmones de
Superficie Entre Capas de
Grafeno Distribuidas
Cuasiperiodicamente**

Tesis Presentada al

**Posgrado en Ciencias
(Física Aplicada).**

como requisito para la obtención del grado de

Maestra en Ciencias

por

Laura Alejandra Tepanecatl Fuentes

asesorado por

Dra. Martha A. Palomino Ovando

Dr. Felipe Ramos Mendieta

Puebla, Pue.
Diciembre 2016

Acoplamiento de Plasmones de Superficie Entre Capas de Grafeno Distribuidas Cuasiperiódicamente.

Tesis

Laura A. Tepanecatí

Dra. Martha A. Palomino

Dr. Felipe Ramos Mendieta



Título: Acoplamiento de Plasmones Polaritones de Superficie Entre Capas de Grafeno Distribuidas Cuasiperiódicamente.

Estudiante: Laura A. Tepanecatí Fuentes

COMITÉ

Dr. Benito Flores Desirena
Presidente

Dr. Rosendo Lozada Morales
Secretario

Dr. Abraham Meza Rocha
Vocal

Dr. José Juan Gervacio Arciniega
Suplente

Dra. Martha A. Palomino Ovando
Asesor

Dr. Felipe Ramos Mendieta
Asesor

Índice general

1. Introducción a los Cristales Fotónicos	1
1.1. Definición de Cristal Fotónico	1
1.2. Estudio de Cristales Fotónicos	2
1.2.1. Ecuaciones de Maxwell	2
1.2.2. Método de Matriz de Transferencia	3
1.2.3. Polarización Transversal Magnética	3
1.2.4. Polarización Transversal Eléctrica	7
2. Cuasicristales	13
2.1. Sucesión de Fibonacci	15
2.2. Escalera de Wannier	16
3. Plasmones	19
3.1. Plasma	19
3.2. Modelo de Drude	19
3.3. Plasmón	22
3.4. Plasmón de Superficie	23
3.4.1. Desarrollo Matemático	23
3.4.2. Interface Metal-diéctrico	25
3.4.3. Excitación de Plasmones Superficiales	29
4. Grafeno	33
4.1. Orígen e historia del Grafeno	33
4.1.1. Hibridaciones	33

ÍNDICE GENERAL
ÍNDICE GENERAL

4.1.2. Formas Alotrópicas	34
4.1.3. Descripción del Grafeno	35
4.2. Propiedades Físicas del Grafeno	35
4.2.1. Propiedades ópticas	35
4.2.2. Propiedades Mecánicas	36
4.2.3. Propiedades electrónicas	36
4.3. Aplicaciones del Grafeno	39
5. Resultados	41
5.0.1. Polarización TM	43
5.0.2. Polarización TE	51
6. Conclusiones	59

Índice de figuras

1.1. Cristal Fotónico	1
1.2. Cristal Fotónico en D1	3
1.3. Polarización Transversal Magnética	4
1.4. Polarización Transversal Eléctrica	8
2.1. Patrón de difracción.(a) cristal. (b) cuasicrital	13
2.2. En esta imagen hacemos la comparación del llenado de un área con:(a)cuadrados y (b)pentágonos. De donde podemos ver como con la primera se logra un llenado del espacio sin dejar huecos a diferencia de los segundo.	14
2.3. crecimiento de las parejas de conejos	15
2.4. Red con generación fibonacci 4	16
2.5. Red con generación Wannier 4	17
3.1. Gas de electrones libres(los puntos blancos representan a los electrones que pueden moverse libremente)	20
3.2. Geometría conductor(rosa)-dieléctrico(blanco) en donde se muestra el eje x el cual es la dirección de propagación	23
3.3. Interface Metal-dieléctrico	25
3.4. Relación de dispersión, donde los SPP se encuentran en una interfase metal-dieléctrico.	28
3.5. Dispositivo para generar plasmones de superficie mediante rejilla de acoplamiento.	30
3.6. Configuración de kretschmann.	30
4.1. configuración electrónica del carbono en estado base y excitada	33
4.2. Hibridaciones del carbono	34

ÍNDICE DE FIGURAS
ÍNDICE DE FIGURAS

4.3. Alotrópos del carbono	34
4.4. Grafeno	35
4.5. Grafeno en el cual se muestra los electrones que quedan perpendiculares al plano y son los responsables de la conductividad de dicho material.	37
4.6. Estructura de bandas del metal, grafeno, semiconductor y aislante. En la cual se ejemplifica muy bien la diferencia de separación que existe entre las bandas de conducción y valencia en cada caso.	37
4.7. Parte real e imaginaria de la conductividad para tres valores de potencial químico, 0,1,0,2 y 0,3 eV	39
5.1. Relación de dispersión.(a) En el caso de la polarización TM se observa que al variar el potencial químico las curvas se ubican de manera sensible en diferentes rangos de frecuencia. (b) Relaciones de dispersión para polarización TE de donde se observa como está, se encuentra muy pegada a la línea de luz y los modos de superficie se encuentran suprimidos.	42
5.2. Estructura de bandas proyectadas para diferentes valores de distancia(d) entre las hojas de grafeno. En todos los casos se ha considerado que $Tr(M) < 1$, la zona gris corresponde a $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ y la magenta a $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$	43
5.3. Espectros de reflexión para una estructura grafeno-dieléctrico, donde realiza, variaciones en: (a) frecuencia (ω), (b) absorción (γ) y (c)el número de celdas	44
5.4. Modos de propagación en función del ancho del dieléctrico en polarización TM a $q_x d/2\pi = 0,2$, aquí al igual que la figura Fig. 5.2 la zona gris corresponde a $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ y la magenta a $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$	45
5.5. Estructura de bandas proyectadas para diferentes números de generación de Fibonacci.	46
5.6. Espectros de reflexión para una estructura cuasiperiódica correspondiente a $NF=5$, para diferentes valores de la frecuencia (ω)	47
5.7. Espectros de reflexión para estructuras tipo Fibonacci.	48
5.8. Espectros de reflexión para una estructura cuasiperiódica correspondiente a $NF = 5$, para diversos valores de la absorción.	48
5.9. Estructura de bandas proyectadas para estructuras tipo Wannier, con diferentes número de celdas unitarias.	49
5.10. Espectro de reflexión para estructura tipo Wannier 5, para diversos valores de frecuencia	50
5.11. Espectro de reflexión para estructura tipo Wannier, con variación en el número de celdas unitarias	50
5.12. Espectro de reflexión para estructura tipo Wannier 5, para diferentes valores de absorción	50

ÍNDICE DE FIGURAS
ÍNDICE DE FIGURAS

5.13. Estructura de bandas para diferentes espesores en el dieléctrico. Todos los casos corresponden a la condición $Tr(M) < 1$, la condición $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ se muestra con gris y la condición $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$ con magenta 52

5.14. Espectros de reflexión para una estructura grafeno-dieléctrico en polarización TE, en las cuales se muestra la variación de (a) frecuencia, (b) número de celdas unitarias y (c) absorción 53

5.15. Modos de propagación en función del ancho del dieléctrico en polarización TE a $q_x d/2\pi = 0,006$, aquí al igual que la figura Fig. 5.2 la zona gris corresponde a $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ y la magenta a $Im(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$ 54

5.16. Bandas proyectadas para diferentes números de Fibonacci 55

5.17. Espectros de reflexión para estructuras tipo Fibonacci, en las cuales se han variado la frecuencias, absorción y el número de generación 56

5.18. Bandas proyectadas para diferentes estructuras tipo Wannier 57

5.19. Espectros de reflexión para estructuras tipo Fibonacci, en las cuales se han variado la frecuencias, absorción y el número de generación 58

ÍNDICE DE FIGURAS
ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

La ciencia de materiales es la encargada de investigar la estructura, propiedades y la relación que guardan entre ellos, lo cual ha sido de gran importancia desde los inicios de la humanidad, pues veamos que en cualquier época en poca o gran medida, nos hemos servido de todo tipo de materiales para satisfacer nuestras necesidades.

Desde la edad de Piedra (3 000 A.C) hasta la edad de Hierro (1 000 A.C.-1 950 D.C.) se han dado grandes contribuciones al estudio de los materiales. En la prehistoria se crearon herramientas en base a la durabilidad de la piedra y a la dureza del hierro. Posteriormente las necesidades crecieron y al ser los metales puros demasiado suaves para ser empleados como armas, se vieron en la necesidad de desarrollar aleaciones. Con esto inició la mezcla, y alteración de muchos elementos originando así, un gran número de materiales completamente artificiales con una enorme gama de propiedades mecánicas, ya que estas pueden ser ajustadas a un diseño dado. Posteriormente con los grandes avances científicos que se produjeron en los últimos siglos, se pudieron manipular las propiedades eléctricas de los materiales, lo cual ha revolucionado al mundo y a la tecnología. En términos del desarrollo de los materiales, lo que ha seguido, es el control de sus propiedades ópticas. Esto es, ha sido posible realizar materiales que impidan la propagación de ondas electromagnéticas, para ciertas longitudes de onda, o que permitan su transmisión pero solamente en unas determinadas direcciones del espacio. También ha sido posible atrapar, localizar y prever el comportamiento de dichas señales, lo que implica un gran avance en el desarrollo tecnológico.

En este contexto los cristales fotónicos han tomado un papel principal debido a que son estructuras ópticas en las que la variación periódica del índice de refracción, determina la posibilidad o no de la propagación de los fotones. La periodicidad de una estructura fotónica puede ser en una, dos o tres dimensiones. Pueden construirse con diferentes tipos de materiales. En fechas recientes el estudio y construcción de estructuras ha crecido enormemente, debido a las diversas características físicas que éste presenta y de ahí sus posibles aplicaciones. El grafeno es un cristal atómico bidimensional de carbono, el cual fue obtenido en 2004 por Andréy Gueim y a Konstantín Novosiólov al exfoliar carboncillo. Inmediatamente después de haberlo podido sintetizar, este material causó un avance en el desarrollo de los materiales por su bidimensionalidad debido a que teóricamente estas estructuras eran inestables, además a esto debe sumarse sus increíbles y extraordinarias propiedades eléctricas, térmicas, mecánicas, ópticas y el hecho de que ha permitido la comprobación de fenómenos de naturaleza cuántica a partir de experimentos de bajo costo. Todas estas propiedades son las que lo hacen muy prometedor para la industria, la ingeniería y la investigación pura. En el caso particular de estas tesis, nos limitaremos al estudio de las propiedades ópticas de estructuras multicapa conformadas de dieléctrico y grafeno, en arreglos periódicos y cuasiperiódicos. Haciendo un énfasis especial en la respuesta plasmónica de éstos, los plasmones de superficie son ondas colectivas que surgen

del acoplamiento entre la luz que viaja a lo largo de la superficie de ciertos materiales y los electrones libres que poseen. Este tema no es tan novedoso y la teoría se encuentra firmemente cimentada para el caso de los metales, pero cuando hablamos de grafeno nos encontramos con la peculiaridad de que la luz pueda acoplarse con los electrones de superficie mediante cualquier tipo de polarización que se le aplique a éste, algo que no se presenta en los metales.

El interés en esta tesis es la de hacer un estudio sistemático de los plasmones de superficie en el grafeno, esto es estudiar los plasmones de superficie debidos a la incidencia de luz con polarización Transversal Magnética (TM), y los modos de superficie observados cuando incide la luz con polarización Transversal Eléctrica (TE). Posteriormente se estudiarán estructuras periódicas formadas por capas alternadas de dieléctricos y grafeno, en esta parte resulta interesante discutir las regiones de frecuencia en donde es posible observar modos de superficie ya que para las polarizaciones TE y TM no se encuentran en la misma región de frecuencia. Posteriormente se construirán estructuras cuasiperiódicas siguiendo los números de generación de Fibonacci y Wannier, nuevamente en este caso la existencia de modos de superficie presenta un comportamiento para los dos tipos de polarización, resultado que es interesante desde el punto de vista de la física básica.

Para esto la tesis ha sido desarrollada de la siguiente manera, en el capítulo 2 se da una introducción a los cristales fónicos además de presentar el formalismo de la matriz de transferencia para el estudio de éstos, considerando la modificación que debe hacerse al método debido a las condiciones de frontera que impone el grafeno, en el capítulo 3, se expone brevemente lo que es un cuasicristal y se describen los dos tipos de estructuras cuasiperiódicas que se discutirán en este trabajo que son: estructuras tipo Fibonacci y estructuras tipo Wannier. Posteriormente en el capítulo 4 se describe la teoría y condiciones para la generación de plasmones superficiales; a continuación en el capítulo 5 se hace una discusión a detalle de las propiedades del grafeno. En el capítulo 6 se presentan los resultados de este trabajo y finalmente en el último capítulo se dan las conclusiones y la bibliografía.

Capítulo 1

Introducción a los Cristales Fotónicos

1.1. Definición de Cristal Fotónico

Un Cristal Fotónico (CF) es una disposición de medios macroscópicos con diferentes constantes dieléctricas dispuestos en un modelo periódico (el cual puede presentarse en las dimensiones D1, D2 o D3)[1].

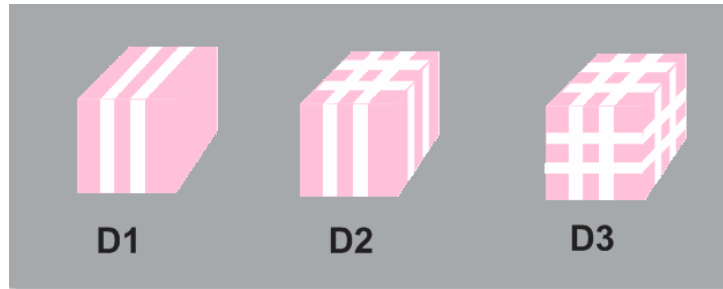


Figura 1.1: Cristal Fotónico

El estudio de la propagación de ondas en medios periódicos tiene una larga historia, pues este tipo de arreglos se han fabricado durante millones de años naturalmente y también artificialmente desde 1887 con los trabajos pioneros de Lord Rayleigh, los cuales consistían en estudiar la propagación de la luz en múltiples láminas de dieléctrico apiladas periódicamente, se demostró la existencia de gaps en dichos sistemas. Aunque estos resultados no tuvieron relevancia en la comunidad científica hasta 1987, año en que Eli Yablonovitch y Sajeev John publicaron sus artículos, los cuales tenían enfoques distintos pero resultarían igual de trascendentes para dichas estructuras; para Yablonovitch los CF eran un medio ambiente que permitía modificar la densidad de estados e inhibir la emisión espontánea mientras que para John, estos permitirían la localización de luz.[2, 3] Dichas publicaciones provocaron que el tema tomara fuerza por lo cual se necesitaba un nombre para estas estructuras, y debido a que son periódicas como los cristales y además permiten el control y detección de las ondas de luz, tal cual lo hace la fotónica, fueron nombrados Cristales Fotónicos.

Los CFs presentan un comportamiento interesante cuando en ellos penetran fotones, pues al propagarse la luz se encontrará con la periodicidad de la función dieléctrica (o de manera equivalente, un índice de refracción periódico); provocando que parte de su radiación se vea reforzada mientras que otra quede anulada en función de ciertos parámetros característicos como son; la longitud de onda, dirección, índice de refracción de los materiales, etc. Al rango de frecuencias electromagnéticas en las que no existen modos de propagación permitidos para ninguna dirección del cristal se define como *gap fotónico* y cuando la ausencia de modos sólo aparece para ciertas direcciones del espacio, recibirá el nombre de *pseudogap*[4, 5].

La existencia de estos gaps para fotones es el atractivo de los CF, pues permiten controlar y manipular el flujo de luz, proporcionándoles múltiples aplicaciones; por ejemplo para el caso de CF-1D van desde recubrimientos de lentes y espejos con baja y alta reflexión hasta pinturas que cambian de color y tintas; los CF de mayor dimensionalidad no han progresado muy rápido debido a que su fabricación presenta una gran complejidad [1, 6].

Las propiedades ópticas de los cristales fotónicos se pueden obtener partiendo de las ecuaciones de Maxwell y usando el Método de Matriz de Transferencia (MMT) como se muestra en la siguiente sección.

1.2. Estudio de Cristales Fotónicos

1.2.1. Ecuaciones de Maxwell

En 1873 J.C. Maxwell publicó su famoso *Tratado de electricidad y magnetismo* en el cual demostraba que las explicaciones y predicciones de los fenómenos electromagnéticos podían ser descritos por un grupo de cuatro ecuaciones (originalmente veinte), la ley de Gauss para la electricidad y el magnetismo, la ley de Ampere y la ley de Faraday para la inducción electromagnética.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{J} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Este es un conjunto de ecuaciones diferenciales, en las cuales aparecen las condiciones físicas siguientes: campo eléctrico \vec{E} , campo magnético \vec{B} , densidad de corriente eléctrica \vec{J} y ρ densidad de carga.

1.2.2. Método de Matriz de Transferencia

Adicionalmente a la aplicación de las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera que de ellas se desprenden se requieren de estrategias matemáticas para el cálculo de las propiedades ópticas de estas estructuras, cuando el CF consta de un número grande de capas; el análisis de este problema se vuelve muy complicado debido a la cantidad de ecuaciones que hay que resolver. Existen diversos métodos para la solución de este tipo de problemas entre los que destaca el Método de Matriz de Transferencia (MMT), que será el usado en este trabajo, la idea es asignar una matriz a cada capa que conforma la superred y al hacer el producto de estas, se obtendrá una matriz que contenga la información de todo el sistema. [6, 7, 8]

En nuestro caso nos interesa un estudio general de CF-D1 por lo cual recurriremos al MMT, aplicado a N-bicapas de medios dieléctricos alternados no dispersivos y no magnéticos con índices de refracción n_1 y n_2 , donde el espesor de cada uno de los medios que conforman el cristal fotónico son d_1 y d_2 y cuya dirección de crecimiento se encuentra a lo largo del eje z.

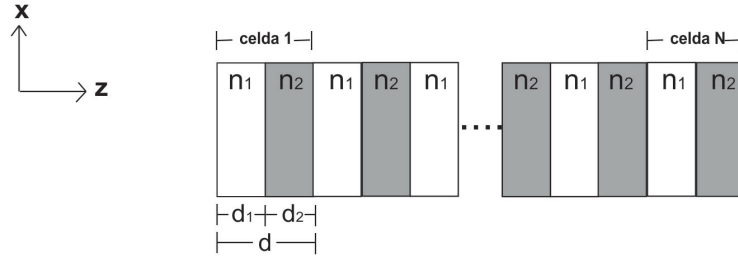


Figura 1.2: Cristal Fotónico en D1

Consideremos dos casos para la incidencia de la luz sobre la interfase en la estructura de estudio: Polarización Transversal Eléctrica(TE) y Polarización Transversal Magnética(TM)

1.2.3. Polarización Transversal Magnética

El hecho de que una onda electromagnética está polarizada indica que el campo eléctrico oscila en un plano determinado, llamado *plano de polarización*. Este plano puede definirse por dos vectores, uno de ellos paralelo a la dirección de propagación de la onda y el otro perpendicular a esta, el cual indicará el sentido del campo eléctrico. Como las ondas electromagnéticas son ondas transversales, el campo magnético es ortogonal al campo eléctrico y al vector de propagación de la onda, para el caso de polarización TM, el plano de polarización de la onda es paralelo a la superficie de esta hoja, de esto se tiene, que el campo magnético es perpendicular al plano de polarización.[9]

En este tipo de polarización los vectores que representan los campos y a la onda son:

$$\vec{E} = (E_x, 0, -E_z) \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = (0, B_y, 0) \quad (1.6)$$

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

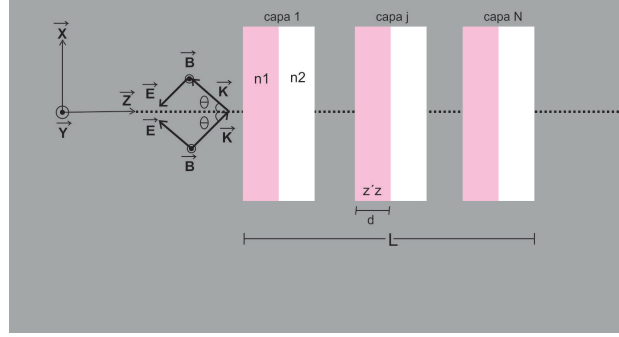


Figura 1.3: Polarización Transversal Magnética

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (1.7)$$

Con el fin de simplificar la notación renombraremos k_x y k_z , como Q y q respectivamente. Realizado esto definimos la magnitud de \vec{k} como:

$$|\vec{k}| = k^2 = Q^2 + q^2 \quad (1.8)$$

Por otro lado k está dado por:

$$k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.9)$$

Donde ε , μ representan la permitividad y permeabilidad de la capa, c es la velocidad de la luz, mientras que ω simboliza la frecuencia angular de la onda incidente.

De la figura 1.2.3 podemos ver que la componente $Q = k \sin \theta$, por lo cual si elevamos al cuadrado esta expresión y la sustituimos en la ecuación anterior; obtenemos:

$$Q^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta \quad (1.10)$$

θ representa el ángulo que se forma con la normal y el vector de onda. Aquí, debido a las condiciones de frontera, la componente Q^2 se conserva al atravesar la interfase.

A partir de este momento consideraremos que los campos se propagan como ondas monocromáticas, es decir, que tienen una sola longitud.[10] Por lo cual las ecuaciones 1.5 y 1.6, quedarán expresadas como

$$\vec{E} = (E_x \hat{\mathbf{i}} - E_z \hat{\mathbf{k}}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.11)$$

$$\vec{B} = B_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (1.12)$$

Empleando las ecuaciones Maxwell 1.1 y 1.4; considerando además una densidad de carga nula y aplicándolas a 1.11; para posteriormente hacer algunas simplificaciones, obteniendo así:

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

$$E_x Q = E_z q \quad (1.13)$$

$$E_x q + E_z Q = \frac{\omega}{c} B_y \quad (1.14)$$

Si de la expresión anterior despejamos E_z y lo sustituimos en la ecuación 1.13, realizamos manipulaciones algebraicas y esta vez despejamos B_y obtenemos

$$B_y = \frac{c}{\omega} \left(\frac{Q^2 + q^2}{q} \right) E_x \quad (1.15)$$

Esta expresión se puede reescribir usando las ecuaciones 1.9 y 1.8, como:

$$B_y = \varepsilon \mu \frac{\omega}{c} \frac{1}{q} E_x \quad (1.16)$$

Si aquí realizamos la sustitución del campo magnético, podemos definir la *impedancia*. Como se observa a continuación:

$$Y = \varepsilon \frac{\omega}{c} \frac{1}{q} \quad (1.17)$$

Para finalmente escribir B_y de la siguiente forma

$$B_y = Y E_x \quad (1.18)$$

Ahora bien, ambos campos consisten en ondas viajeras propagantes, hacia la derecha y hacia la izquierda, que corresponde a la onda reflejada y transmitida, respectivamente.[10] Y esto puede expresarse como:

$$E_x = A_1 e^{iqz} - A_2 e^{-iqz} \quad (1.19)$$

$$B_y = Y A_1 e^{iqz} + Y A_2 e^{-iqz} \quad (1.20)$$

Estas expresiones podemos reescribirlas en forma matricial como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{iqz} \\ A_2 e^{-iqz} \end{pmatrix}_z \quad (1.21)$$

De donde obtenemos la matriz \mathbb{B} , la cual tiene el objetivo de proporcionar los campos electromagnético y magnético a partir de las amplitudes de la onda.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y & Y \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Si conectamos las ondas entre los puntos z a z' como se muestra en la Figura 1.2.3, conseguimos el siguiente resultado.

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

$$\begin{pmatrix} A_1 e^{iqz} \\ A_2 e^{-iqz} \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} e^{iq(z-z')} & 0 \\ 0 & e^{-iq(z-z')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{iqz'} \\ A_2 e^{-iqz'} \end{pmatrix}_{z'} \quad (1.23)$$

Ahora si $d = z - z'$, podemos definir \mathbb{T} la cual es conocida como matriz de traslación, y es la encargada de proporcionar el comportamiento de la onda dentro del medio.

$$\mathbb{T}(d) = \begin{pmatrix} e^{iqd} & 0 \\ 0 & e^{-iqd} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Sustituyendo la matriz 1.22 en 1.21 y evaluando en el punto z' , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z'} = \mathbb{B} \begin{pmatrix} A_1 e^{iqz'} \\ A_2 e^{-iqz'} \end{pmatrix}_{z'} \quad (1.25)$$

Si de esta ecuación despejamos la matriz del lado derecho tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} A_1 e^{iqz'} \\ A_2 e^{-iqz'} \end{pmatrix}_{z'} = \mathbb{B}^{-1} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z'} \quad (1.26)$$

Donde \mathbb{B}^{-1} es la matriz inversa de \mathbb{B} , por lo cual tienen una función similar aunque en sentido opuesto.

$$\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{2Y} \begin{pmatrix} Y & 1 \\ -Y & 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Veamos que con las ecuaciones obtenidas anteriormente, podemos reescribir la representación matricial de las ondas propagantes, en términos de $\mathbb{B}, \mathbb{T}(d)$ y \mathbb{B}^{-1} .

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_z = \mathbb{B} \mathbb{T}(d) \mathbb{B}^{-1} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z'} \quad (1.28)$$

A la multiplicación matricial $\mathbb{B} \mathbb{T}(d) \mathbb{B}^{-1}$, le llamaremos \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \cos dq & \frac{i \sin dq}{Y} \\ iY \sin dq & \cos dq \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

La cual es la matriz que relaciona los campos eléctrico y magnético entre una interface y la siguiente por lo que si se quiere conocer la relación entre los campos del inicio de la estructura y el final esto es desde $z=0$ a $z=L$, es necesario multiplicar N matrices que corresponde a las N capas que conforman la estructura. Como se expresa a continuación:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z=L} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z=0} \quad (1.30)$$

$$\mathbb{M} = \prod_{j=1}^N \mathbf{m}_j = \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \dots \mathbf{m}_N \quad (1.31)$$

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

Una vez obtenida la matriz de transferencia total evaluemos 1.11 y 1.12 en $z=0$ y $z=L$. Además consideremos que en las fronteras $A_1 = 1$ y $A_2 = R$ pues la amplitud del campo incidente esta normalizada.

$$E_x(z = 0) = 1 - R \quad (1.32)$$

$$B_y(z = 0) = Y_0(1 + R) \quad (1.33)$$

Para el caso de $z = L$, $A_2 = T$ y $A_1 = 0$

$$E_x(z = L) = T e^{iq_{N+1}L} \quad (1.34)$$

$$B_y(z = L) = Y_{n+1} e^{iq_{N+1}L} \quad (1.35)$$

Ahora sutituyamos las ecuaciones 1.32 a 1.35, en 1.30 para obtener la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} T e^{iq_{N+1}L} \\ Y_{n+1} e^{iq_{N+1}L} \end{pmatrix}_{z=L} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - R \\ Y_0(1 + R) \end{pmatrix}_{z=0} \quad (1.36)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 2×2 se obtiene el valor de la amplitud de transmisión(T) y de reflexión(R)

$$T = \frac{(M_{11} - M_{12}Y_0)(M_{21} + M_{22}Y_0) - (M_{11} + M_{12}Y_0)(M_{21} - M_{22}Y_0)}{(M_{11} - M_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L} - (M_{21} - M_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L}} \quad (1.37)$$

$$R = \frac{(M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L} - (M_{21} + M_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L}}{(M_{11} - M_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L} - (M_{21} - M_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L}} \quad (1.38)$$

1.2.4. Polarización Transversal Eléctrica

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

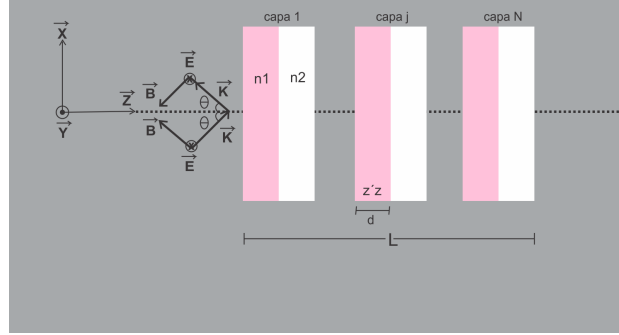


Figura 1.4: Polarización Transversal Eléctrica

En este caso se considera que el campo magnético es paralelo al plano de incidencia y el vector del campo eléctrico es perpendicular al vector del campo magnético.[9] Lo cual se puede expresar como;

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (1.39)$$

$$\vec{E} = (0, -E_y, 0) \quad (1.40)$$

$$\vec{B} = (B_x, 0, -B_z) \quad (1.41)$$

Para polarización TE, las ondas propagantes, resultado de resolver la ecuación de onda para el campo electromagnético están dadas por:

$$\vec{E} = -E_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (1.42)$$

$$\vec{B} = (B_x \hat{\mathbf{i}} - B_z \hat{\mathbf{k}}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.43)$$

Considerando que el medio es homogéneo, lineal y que no hay densidad de carga, hacemos uso de la ecuaciones 1.2 , 1.3, para posteriormente aplicarlas a las ecuaciones 1.42 y 3.31.[10] Y análogo al caso TM, obtenemos:

$$B_x = \frac{c}{\omega} q E_y \quad (1.44)$$

Realizando la sustitución de la relación para campo magnético mostrada en la sección 1.2, podemos definir la impedancia, como:

$$Y = \frac{c}{\omega} q \quad (1.45)$$

Por lo que la relación entre B_x y E_y queda expresada de la siguiente manera:

$$B_x = -Y E_y \quad (1.46)$$

Tanto el campo eléctrico como el campo magnético consisten en ondas viajeras.[10] Que pueden ser expresados como:

$$E_y = -A_1 e^{iqz} - A_2 e^{-iqz} \quad (1.47)$$

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

$$B_x = Y(A_1 e^{iqz} - A_2 e^{-iqz}) \quad (1.48)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas en forma matricial, como se muestra a continuación.

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{iqz} \\ A_2 e^{-iqz} \end{pmatrix}_z \quad (1.49)$$

De donde se define la matriz \mathbb{B}

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y & -Y \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Siguiendo un procedimiento silmilar al realizado para el caso de la polarización TM, podemos llegar a una expresión matricial que nos proporcione los campo para una capa.

$$m = \begin{pmatrix} \cos dq & -\frac{i}{Y} \sin dq \\ -iY \sin q & \cos dq \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Para conectar los campos a través de toda la estructura, es decir en $z = 0$ hasta $z = L$, necesitamos realizar lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z=L} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z=0} \quad \text{con} \quad \mathbb{M} = \prod_{j=1}^N \mathbf{m}_j \quad (1.52)$$

Donde \mathbb{M} es la matriz de transferencia de toda la estructura.

Para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión en esta polarización evaluamos las ecuaciones. 1.42 y 3.31 en $z = 0$ y $z = L$, además consideramos que la amplitud del campo incidente esta normalizada.

Para $z = 0$; $A_1 = 1$ y $A_2 = R$, la onda reflejada está dada por:

$$E_y(z = 0) = -1 - R \quad (1.53)$$

$$B_x(z = 0) = Y_0(1 - R) \quad (1.54)$$

Para $z = L$; $A_1 = 0$ y $A_2 = T$, la onda transmitida está dada por:

$$E_y(z = L) = -T e^{iq_{N+1}L} \quad (1.55)$$

$$B_x(z = L) = Y_{N+1} T e^{iq_{N+1}L} \quad (1.56)$$

Si las cuatro expresiones obtenidas anteriormente se introducen en la ecuación 1.52, tendremos la relación matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} -T e^{iq_{N+1}L} \\ Y_{N+1} e^{iq_{N+1}L} \end{pmatrix}_{z=L} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - R \\ Y_0(1 - R) \end{pmatrix}_{z=0} \quad (1.57)$$

Nuevamente llegamos a un sistema de ecuaciones, las cuales al resolverlas arrojan el valor de la amplitud de transmisión(T) y de reflexión(R), como se expresa a continuación.

$$T = \frac{(M_{11} + M_{12}Y_0)(-M_{21} + M_{22}Y_0) - (-M_{11} + M_{12}Y_0)(M_{21} + M_{22}Y_0)}{(M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L} + (M_{21} + M_{22}Y_0)e^{iq_{N+1}L}} \quad (1.58)$$

$$R = \frac{(-M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L} + (-M_{21} + M_{22}Y_0)e^{iq_{N+1}L}}{(M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iq_{N+1}L} + (M_{21} + M_{22}Y_0)e^{iq_{N+1}L}} \quad (1.59)$$

Estructura de bandas y Ondas de Bloch

La propagación de ondas en un medio periódico muestra analogía al movimiento que presentan los electrones en un sólido cristalino. Por lo cual haremos uso del Teorema de Bloch para obtener los modos normales de dichos sistemas en la forma de ondas de Bloch. Para una superred, esto significa que:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z+d} = \mathbb{I}e^{iKd} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_z \quad (1.60)$$

Donde \mathbb{I} es la matriz identidad, d la longitud de la estructura 1.2.4 o 1.2.3 y K el vector de onda de Bloch. Partiendo de la Ec.1.30 definimos:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z+d} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_z \quad (1.61)$$

Igualando las últimas dos expresiones y manipulando, llegamos a:

$$(\mathbb{M} - \mathbb{I}e^{iKd}) \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_z = 0 \quad (1.62)$$

Para que este sistema tenga una solución diferente a la trivial, debe satisfacer que el determinante sea cero $\leftrightarrow \det(\mathbb{M} - \mathbb{I}e^{iKd}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} M_{11} - e^{iKd} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - e^{iKd} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.63)$$

Al desarrollar el determinante y utilizar la siguiente propiedad

$$\det(\mathbb{M}) = \prod_{j=1}^n \det(\mathbf{m}_j) = 1 \quad (1.64)$$

Se obtiene

$$1 - (M_{11} + M_{12})e^{iKd} + e^{i2Kd} = 0 \quad (1.65)$$

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

Multiplicamos ambos lados de la ecuación 1.65 por e^{-iKd} y usando la fórmula de Euler para expresar el coseno en términos de exponenciales complejas, tenemos:

$$2 \cos(Kd) - (M_{11} + M_{12}) = 0 \quad (1.66)$$

Al fijarnos en el segundo término de la ecuación anterior, podemos notar que se trata de la traza de la matriz \mathbb{M} , considerando esto podemos reescribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned} \cos(Kd) &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbb{M}) \\ &= \cos(q_1 d_1) \cos(q_2 d_2) - \left(\frac{Y_2}{Y_1} + \frac{Y_1}{Y_2} \right) \sin(q_1 d_1) \sin(q_2 d_2) \end{aligned} \quad (1.67)$$

De donde resulta

$$k(q_x, \omega) = \frac{1}{d} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \text{tr} M \right) \quad (1.68)$$

De este resulta se puede ver que los valores reales de k están restringidos a $\frac{1}{2} \text{tr} M < 1$, esto es, son ondas de Bloch propagándose. Mientras que $\frac{1}{2} \text{tr} M > 1$ corresponden a $k = \frac{m\pi}{d} + k_i$, donde podemos notar la presencia de números imaginarios, lo cual esto representa ondas evanescentes. Las ecuaciones anteriores expresan la relación de dispersión de k, ω y q_x con lo cual podemos obtener una idea precisa de los valores prohibidos y permitidos de la propagación de la luz.

La ecuación 1.68 por medio de la identidad $\cos^{-1} z = -i \log(z + i\sqrt{1-z^2})$, podemos expresarla como:

$$k(q_x, \omega) = -i \frac{1}{d} \log \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} M \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \text{tr} M \right)^2} \right\} \quad (1.69)$$

Lo cual resulta relevante pues a partir de esta relación de dispersión podemos obtener dos tipos de bandas fotónicas: las bandas k (relación de dispersión de k en función de ω a incidencia normal $q_x = 0$) y las bandas proyectadas (ω en función de q_x , en otras palabras de calcula la relación de dispersión para todos los ángulos de incidencia)

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CRISTALES FOTÓNICOS
1.2. ESTUDIO DE CRISTALES FOTÓNICOS

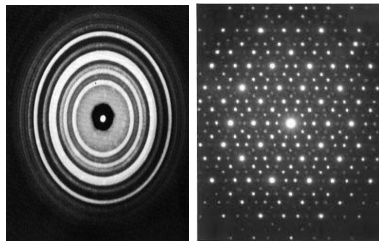
Capítulo 2

Cuasicristales

En los inicios de la cristalografía sólo se conocían dos maneras de clasificar a los medios ópticos; periódicos(cristalinos) o no periódicos(amorfos), lo cual permitía representar de una manera simple y eficiente todas las posiciones atómicas dentro de cualquier cristal, mediante sólo una celda de referencia(celda unitaria). Posteriormente, el francés Bravais demostró que solamente existían 14 maneras de arreglar los átomos en el espacio tridimensional siguiendo una simetría de translación (estructuras cúbicas, hexagonales, tetragonales y estructuras asociadas)[11], con lo cual se creía que esta rama de la ciencia estaba completa y solo faltaba esperar la prueba experimental.

En 1912, Max von Laue descubrió la difracción de los rayos X cuando pasan por un cristal, lo cual daría la confirmación experimental de lo predicho por Bravais, además de dar paso a la Cristalografía estructural, la cual para sus fines hace uso de la técnica de rayos X, de donde se obtiene una difracción dada por una serie de puntos que guardan entre sí una relación de simetría². Lo cual permitió establecer la siguiente definición:

” Un cristal es una composición de átomos, moléculas o iones que se repiten de forma periódica en las tres dimensiones del espacio”[12]



(a) aluminio (b) aluminio y manganeso

Figura 2.1: Patrón de difracción.(a) cristal. (b) cuasicrystal .

Con esto se pensó que la teoría de la cristalografía estaba terminada, pero en Abril de 1982, Dan Shechtman encontró un nuevo tipo de material, pues al hacer el estudio de difracción de Rayos X de cristales formados por aleación de aluminio y manganeso encontró un patrón de difracción propio de los cristales pero con una peculiaridad; pues adicionalmente presentaban una simetría pentagonal².

Lo cual hasta ese momento se consideraba imposible en un sólido macroscópico. Pues según la cristalografía; una red cristalina se construye de unidades fundamentales o celdas unitarias colocadas una junto a otra en forma regular y periódica que llenan el espacio sin dejar huecos, algo que no se puede lograr con pentágonos.2.2

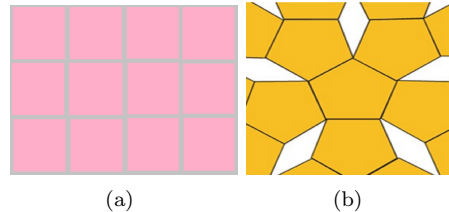


Figura 2.2: En esta imagen hacemos la comparación del llenado de un área con:(a)cuadrados y (b)pentágonos. De donde podemos ver como con la primera se logra un llenado del espacio sin dejar huecos a diferencia de los segundo.

Este hallazgo fue enormemente controvertido, generando dos posturas al respecto, los que defendían el descubrimiento y los que no podían aceptar una laguna tan grande en nuestra comprensión de la materia. Pero una vez implantada la duda, muchos científicos empezaron a trabajar en la creación de este tipo de estructuras, de donde posteriormente se produjeron simetrías dodecágono de Ni-Cr, octagonal en aleaciones de V-Ni-Si y Cr-Ni-Si [13], además de que se reportó el descubrimiento de un mineral de simetría tridimensional icosaédrica formada naturalmente a orillas del río Khatyrka (Rusia). Con lo cual se reforzaba lo encontrado anteriormente por Dan Shechtman, obligando a la Unión Internacional de Cristalografía a cambiar la definición de cristal, para poder incluir a los cristales aperiódicos (cuasicristales). La nueva definición ahora hace más hincapié en el experimento de difracción de Rayos X que en la simetría del cristal.

” *Un cristal es un sólido que produce un diagrama de difracción discreto*”[14]

Después de esto, cientos de cuasicristales con diferentes composiciones y simetrías han sido descubiertos, los cuales generalmente se crecen por el enfriamiento rápido(millones de grados por segundo) de metales fundidos, lo cual sugiere que su composición radica en que los átomos no tienen tiempo de acceder a las posiciones de equilibrio correspondiente a los sólidos cristalinos.

En sus inicios los materiales cuasicristalinos eran termodinámicamente inestables; cuando eran calentados, formaban cristales regulares. Sin embargo en 1987, el primero de muchos cuasicristales estables fue descubierto, haciendo posible la producción de grandes muestras para su estudio, de lo cual se concluyen propiedades muy interesantes, entre las que destacan: bajo coeficiente de fricción, alta dureza, alta fragilidad, alta resistencia a la corrosión, superplasticidad a altas temperaturas, baja conductividad térmica, propiedades magnéticas únicas, etc.[15] Debido a esto es que el estudio de este tipo de materiales sigue creciendo, y los encamina a múltiples aplicaciones.

Teóricamente también se consiguieron interesantes resultados, pues después de diversos análisis los cristalógrafos, tomando como punto de partida la teoría del matemático Royer Penrose, concluyeron que los cuasicristales sí presentan simetría periódica, pero no en tres dimensiones, sino en cuatro. La proyección de esa estructura tetradimensional, al mundo tridimensional en el que vivimos, da lugar a simetrías que no son compatibles con una red periódica tridimensional.[16] Y con esto queda completamente definido el concepto de cuascristal y finalmente, el 6 de Octubre de 2011, Dan Shechtman recibió el Premio Nobel de Química, casi 30 años después de su descubrimiento.

Debido a que vivimos en un mundo tridimensional resulta complicado predecir y describir las propiedades de los cuasicristales pues debido a que no son cristal con orden perfecto pero tampoco son cristales amorfos, la teoría que se aplica para el estudio de estos no funciona en este caso. Por tanto, es necesario introducir el ordenamiento aperiódico predecible. Eso significa que existen sistemas que siguen reglas bien definidas (orden) pero sin ser repetitivas (periodicidad). Para lograr este tipo de comportamiento existen diversas formas y a continuación se hará una descripción de algunas relaciones de recurrencia que generan las celdas unitarias cuasiperiodicas para modelar un cuasicristal fotónico unidimensional.

2.1. Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa también llamado Fibonacci, fué un matemático italiano que vivió entre 1170 y 1250. El cual renovó por completo la ciencia de la aritmética, con su libro "Liber Abaci" (Libro del ábaco), pues en el expone todas las reglas del cálculo basado en las nueve cifras indoárabes: el cero y la numeración de posición. Sin embargo, Fibonacci es más conocido entre los matemáticos por una curiosa sucesión de números que colocó en el margen de su libro.[17] La cual surgió como resultado de la siguiente problemática:

Consideremos dos conejos los cuales tardan dos meses en alcanzar su edad madura y poder reproducirse. Al paso de este tiempo, esta pareja procreará otra pareja de conejos que a su vez crecerán y se reproducirán, si estas cantidades no cambian ¿cuántos conejos habrá cada mes?

Notemos que en el primer y segundo mes solo hay una pareja de conejos, para el tercero hay cuatro conejos, ya que la primera pareja se reprodujo, para el cuarto hay 3 parejas de conejos, pues la pareja más longeva ya ha tenido cuatro crías y la segunda aun no ha alcanzado la madurez, pero para el próximo mes que es el quinto, ya lo harán y por lo tanto habrá 5 parejas de conejos. Si seguimos realizando el análisis obtendríamos que las parejas de conejos crece de esta forma 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... De lo cual podemos observar que las parejas de conejos que habrá en un determinado mes, serán la suma de la cantidad de parejas que había en los dos últimos meses precedentes a éste.

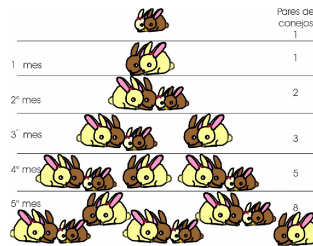


Figura 2.3: crecimiento de las parejas de conejos

Para hallar estas cantidades podríamos recurrir a organigramas y demás elementos, algo demasiado complicado si lo que queremos es encontrar un simple número, por ello, Fibonacci halló la siguiente relación de recurrencia

$$u_{n-1} + u_n = u_{n+1} \tag{2.1}$$

Donde los primeros términos son:

CAPÍTULO 2 CUASICRISTALES

2.2. ESCALERA DE WANNIER

oscilatorio de un electrón en un potencial periódico bajo la influencia de un campo eléctrico constante, el cual a sido uno de los efectos cuánticos más fascinantes. Este fenómeno, propuesto originalmente por Bloch, para estudiar el movimiento de electrones en cristales bajo campos eléctricos, manifiesta la naturaleza ondulatoria de la materia, y puede encontrarse en una gran variedad de sistemas físicos.

Posteriormente se encuentra que este problema también puede ser analizado en el dominio espectral en donde lo estados de Wannier- Stark son el equivalente a las oscilaciones de Bloch en el dominio temporal. La presencia de un campo eléctrico produce una localización de las funciones de onda. El espectro continuo de una banda se reemplaza por una serie de estados equiespaciados energéticamente denominada escalera de Wannier-Stark.

De lo descrito anteriormente es que podemos hacer estructuras sin ningún tipo de repetición pero predecible con la escalera de Wannier-Stark, lo cual se realiza considerando un medio inicial con una característica A , la cual va a incrementar en la celda consecutiva por un valor Δa constante, generando así una nueva celda con característica de valor $A + \Delta a$, y análogamente se producirán las siguientes celdas, del tal forma que para la celda n -ésima el valor de la característica sera $n\Delta a$.

Con el propósito de una mejor comprensión a continuación ponemos una estructura con $n=3$. En la cual el parámetro es el potencial químico, aunque es importante remarcar que puede ser cualquier característica del material. En este caso al igual que para Fibonacci tenemos celdas unitarias conformadas por un dielectrico y un grafeno, la diferencia radica en que para este caso tenemos tantas celdas unitarios como nuestro número de generación. Por ejemplo, como trataremos con $n=3$ tendremos 3 celdas, las cuales presentan variación en el potencial químico; como podemos notar empezamos con un valor de potencial μ , y la siguiente celda tiene un valor μ_1 , el cual segun lo descrito anteriormente debe ser igual a $\mu + \Delta \mu$, posteriormente podemos ver un μ_2 que debe tener un valor $\mu + 2 \Delta \mu$.

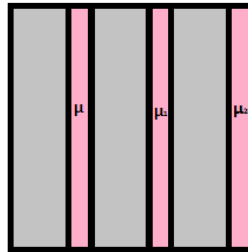


Figura 2.5: Red con generación Wannier 4

Capítulo 3

Plasmones

3.1. Plasma

En física, la palabra plasma se reserva a la cuarta fase de la materia la cual se puede describir como un gas ionizado, lo cual quiere decir que los átomos que lo componen se han separado de algunos de sus electrones dando paso a la formación de aniones y cationes (iones con carga negativa y positiva, respectivamente), moviéndose libremente, hecho por el cual este es un excelente conductor.[18]

Se estima que el 99% de la materia del universo se encuentra en estado plasma. Por ejemplo: Los rayos durante una tormenta, la lava, la ionosfera, las aurora boreales y australes, metales, etc.

3.2. Modelo de Drude

Los metales no son estrictamente un plasma, pero se caracterizan como tal debido a que poseen un gran número de electrones que pueden moverse a lo largo de todo el metal, sin estar confinados a ningún átomo en concreto. Estos son llamados electrones libres de conducción (los cuales oscilan aleatoriamente en estado natural) y propician que los metales en muchos casos y bajo ciertas condiciones puedan comportarse como un plasma de electrones.[19]

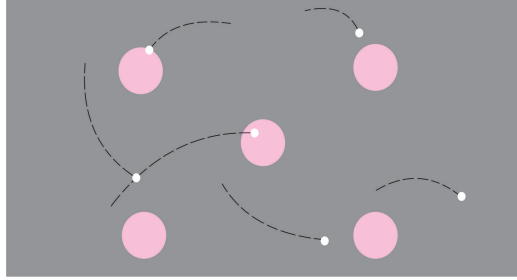


Figura 3.1: Gas de electrones libres(los puntos blancos representan a los electrones que pueden moverse libremente)

Si a este sistema se le aplica un campo eléctrico \vec{E} provocaría un estímulo en los electrones haciendo que éstos se conduzcan a través del metal, creando así una polarización interna dependiente de la dirección del campo externo, generando una reorganización de cargas. Y este movimiento de electrones presenta fenómenos como amortiguamiento por colisiones.

Para desarrollar matemáticamente lo descrito anteriormente usaremos el modelo de Lorentz-Drude el cual fue creado en 1990 por Paul Drude para explicar las propiedades de transporte de electrones en materiales.

Partimos de la ecuación de movimiento de un electrón libre interactuante con una onda electromagnética en donde hemos considerado las colisiones de los electrones con las imperfecciones.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} = -e\vec{E} \quad (3.1)$$

Donde γ es el tiempo medio entre colisiones y experimentalmente se ha encontrado que es aproximadamente $10^{-4}s$ [19]. Suponiendo que tenemos un campo eléctrico armónico: $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i\omega t}$, la solución para la ecuación. 3.1 es del tipo $\vec{x}(t) = x_0 e^{-i\omega t}$.

Si se realizan la primera y segunda derivada de esta solución y se sustituyen en la ecuación diferencial, podemos reescribir 3.1 como:

$$-m\omega^2 x_0 + m\gamma i\omega x_0 = -eE_0 \quad (3.2)$$

De lo anterior podemos obtener una expresión para x_0

$$x_0 = \frac{eE_0}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (3.3)$$

Con esto tenemos todos los elementos necesario para obtener la función que describe el movimiento de los electrones al interactuar con el campo magnético, la cual expresamos a continuación.

$$x = \frac{eE(t)}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (3.4)$$

Notemos que hasta este momento no hemos tomado en cuenta las fuerzas ejercidas debido

al campo magnético \vec{B} , asociado al campo eléctrico de la onda incidente, la causa de esto es que la fuerza es muy pequeña por lo cual puede despreciarse sin mayor problema.

También cabe mencionar que en este modelo no estamos considerando que \vec{E} varíe en el tiempo, lo que en realidad si ocurre, pero esto se resuelve considerando que la longitud de onda del campo eléctrico es considerablemente mayor comparada con el recorrido medio del electrón ($\lambda \gg \ell$), haciendo esto, \vec{E} no varía apreciablemente en distancias comparables a ℓ , por lo cual podemos aplicar la ecuación de movimiento a los electrones del gas sin ningun inconveniente.[19]

Ahora consideremos el momento dipolar por unidad de volumen de nuestro gas, lo que matemáticamente se representa como:

$$\vec{P} = -ne\vec{x}(t) \quad (\text{n-concentracion del gas de electrones}) \quad (3.5)$$

Así sutituyendo la ecuación.5.0.2 en 3.5.

$$\vec{P} = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}\vec{E} \quad (3.6)$$

Conociendo que el vector de desplazamiento eléctrico se puede escribir en términos de la polarización, como $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Tenemos:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0(\omega^2 + i\gamma\omega)} \right) \vec{E} = \epsilon_0\epsilon\vec{E} \quad (3.7)$$

Donde llamaremos $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$, y esto es lo que se conoce como frecuencia del plasma y poseen un valor que cae dentro del regimen del UV. Al introducir esta frecuencia en la ecuación.3.7 se obtiene la función dieléctrica para los metales.

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \quad (3.8)$$

Esta expresión es de gran importancia ya que nos brinda información de la propagación de la onda electromagnética en la materia, en espacio y tiempo. Ya que la función dieléctrica compleja puede ser descompuesta en su parte real e imaginaria, como se muestra a continuación.

$$\epsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{\tau^2\omega^2 + 1} \quad (3.9)$$

$$\epsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2\tau^2}{\omega(\tau^2\omega^2 + 1)} \quad (3.10)$$

Procederemos a realizar el análisis del comportamiento de estas expresiones en situaciones extremas.

- $\tau \rightarrow \infty$

El hecho de que el tiempo de relajación sea muy grande quiere decir que estamos tratando con un buen conductor por lo cual tiene sentido que la parte predominante sea la real y como no hay absorción entonces la parte imaginaria será cero

$$\epsilon_1(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (3.11)$$

$$\epsilon_2(\omega) = 0 \quad (3.12)$$

Entonces el comportamiento obtenido bajo estas circunstancias es el de un metal radiativo, el cual permitirá la propagación de la onda dentro de él. Aquí pasa algo interesante en el rango visible y ocurre para algunos metales, puesto que aunque τ tiende a infinito $\omega < \omega_p$, lo cual implica que $\epsilon_1 < 0$ y $|\epsilon_2| \ll |\epsilon_1|$. En este caso la onda es amortiguada debido a ϵ_2 pero se propaga dentro del metal.[4]

- si τ tiene un valor finito

$$\epsilon_1(\omega) = \left(1 - \omega_p^2 \tau^2\right) \quad (3.13)$$

$$\epsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \quad (3.14)$$

Esto nos dice que $|\epsilon_2| \gg |\epsilon_1|$, lo cual implica que el gas de electrones absorbe la energía de la onda electromagnética.[4]

Recapitulando diremos que se obtuvo una expresión real y una imaginaria para la función dieléctrica 3.8, siendo esta última la energía disipada, la cual a partir del rango ultravioleta desaparece, teniendo como resultado un metal transparente para dicha región del espectro, para el caso de las frecuencias del infrarrojo-microondas diremos que el metal absorbe la onda rápidamente. Además existe una situación intermedia en la que la onda se propaga dentro del metal y es absorbida lentamente, esto ocurre en el régimen del visible cuando la parte real de la función dieléctrica es mucho mayor que la parte imaginaria (Esta condición la satisfacen muy bien los metales nobles).

3.3. Plasmón

Cuando un gas se encuentra fuertemente ionizado, es decir en estado plasma como se describió anteriormente, su equilibrio electrostático puede ser fácilmente perturbado, lo que conlleva a una redistribución de carga eléctrica, por lo cual se presentara exceso de carga positiva en algunas regiones y negativas en otras, provocando que las cargas oscilen para reestablecer el equilibrio del sistema, y a estas oscilaciones son a las que se les conoce como plasmón.[20, 21]

Actualmente se conocen tres tipos diferentes de oscilación del plasma

- Plasmón de volumen [PV].
- Plasmón de superficie [PS].

- Plasmón de superficie localizados [PSL].

Aunque solo son de nuestro interés los plasmones de superficie, por lo cual se hará un estudio detallado de estos a continuación:

3.4. Plasmón de Superficie

El plasmón de superficie se genera en la interfase metal-diélectrico, debido a ondas evanescentes que son confinadas en la dirección perpendicular a la interfase, estas ondas electromagnéticas superficiales se acoplan a las oscilaciones de los electrones del plasma.[19, 22]

3.4.1. Desarrollo Matemático

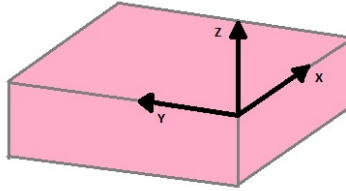


Figura 3.2: Geometría conductor(rosa)-dieléctrico(blanco) en donde se muestra el eje x el cual es la dirección de propagación

Para hacer el estudio de los Plasmones de superficie es necesario aplicar las ecuaciones de Maxwell en el plano que se encuentra entre un conductor y un dieléctrico. Pero para hacer este desarrollo lo más claro posible, primero obtendremos las ecuaciones en una forma general para la guía de ondas electromagnéticas, en otras palabras la ecuación de onda. Si consideramos un espacio con ausencia de carga y densidad de corriente en las ecuaciones de Maxwell, además tomamos [1.4] y le aplicamos un rotacional obtenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \quad (3.15)$$

Aplicando identidades vectoriales¹, recordando que no tenemos densidad de carga y haciendo uso de la ecuación [1.3], tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.16)$$

Esta ecuación debe ser resuelta para cada valor constante de ϵ , y las soluciones obtenidas tienen que coincidir usando condiciones de contorno apropiadas. Para lograr la

¹ $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$

CAPÍTULO 3 PLASMONES
3.4. PLASMÓN DE SUPERFICIE

descripción de ondas propagantes confinadas, procederemos en dos pasos. (1) Asumimos una dependencia armónica del campo electrico $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$, la cual se introducirá en la ecuación diferencial, obteniendo la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (3.17)$$

Posteriormente para el paso (2), definimos la geometría de la propagación, para simplificar las cosas asumiremos un problema de una dimensión, por ejemplo, ε depende solamente de una coordenada espacial. Para este caso en particula la onda se propaga unicamente a lo largo del eje-x, por lo cual $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Aplicado a problemas de superficie electromagnética, el plano $z = 0$ coincide con la interfaz que sostiene las ondas de propagación, que ahora se puede describir como $\vec{E}(x, y, z) = E(z) \exp^{-ik_x x}$, con k_x la constante de propagación de la onda viajera.[4] Ahora entonces evaluando en la ecuación. 3.17, resulta:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon - k_x^2 \right) E = 0 \quad (3.18)$$

Tambien se hace un procedimiento idéntico para el campo magnético

Con las ecuaciones 3.18 y su analoga para el campo magnético, tenemos nuestro punto de partida para realizar un análisis de los modos electromagnéticos guiados. Con el fin de utilizar las ecuaciones de onda para determinar el perfil del campo espacial y la dispersión de las ondas de propagación, ahora necesitamos encontrar expresiones explícitas para los diferentes componentes de los campos \vec{E} y \vec{H} , las cuales pueden ser obtenidas a partir de la implementación de las ecuaciones [1.3] y [1.4]. Para la dependencia armónica temporal ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$), llegamos al siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega \mu H_x \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega \mu H_y \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega \mu H_z \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega \varepsilon E_x \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega \varepsilon E_y \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega \varepsilon E_z \quad (3.24)$$

Para propagación a lo largo de la dirección-x ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = ik_x \vec{E}$) y además como el campo eléctrico \vec{E} de la onda no presenta variaciones a lo largo del eje-y, entonces $\frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$, lo cual simplifica nuestro sistema de ecuaciones a:

- TM [Fig 1.2.3]

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - ik_x E_z = i\omega\mu H_y \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_x \quad (3.26)$$

$$ik_x H_y = i\omega\varepsilon E_z \quad (3.27)$$

- TE [Fig 1.2.4]

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu H_x \quad (3.28)$$

$$ik_x E_y = i\omega\mu H_z \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - ik_x H_z = i\omega\varepsilon E_y \quad (3.30)$$

Hemos dividido las expresiones anteriores en dos grupos de tres ecuaciones, en donde se representa una onda con polarización TM y TE. Esto se concluye de que no existe relación entre E_x, E_z, H_y con ninguna de las componentes H_x, H_z, E_y .

Resolviendo los sistemas para E_x, E_z y H_x, H_z respectivamente obtenemos

$$E_x = -i \frac{1}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad E_z = -\frac{k_x}{\omega\varepsilon} H_y \quad (3.31)$$

$$H_x = i \frac{1}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad H_z = \frac{k_x}{\omega\mu} E_y \quad (3.32)$$

3.4.2. Interface Metal-diélectrico

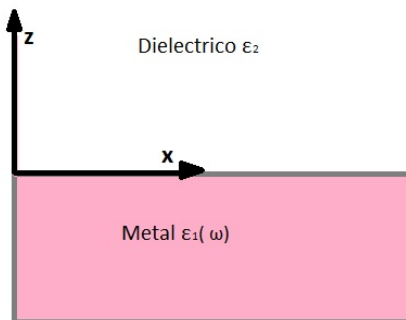


Figura 3.3: Interface Metal-diélectrico

De acuerdo a lo mencionado en las secciones anteriores para generar un plasmón de superficie necesitamos propagar una onda en la interfase entre dos medios, los cuales consideraremos como semi-infinitos siendo uno de ellos metálico, cuya $\epsilon(\omega)$ viene regida por el modelo de Drude, y el otro medio es un dieléctrico. Estas consideraciones harán que la onda decaiga en la dirección z . Esto puede resolverse facilmente aplicando las condiciones necesarias a 3.31 y 3.32 que se han obtenido previamente.

Polarización TM

- $z < 0$: Metal

$$H_y = A_1 e^{ik_x x} e^{k_1 z} \quad (3.33)$$

lo que implica

$$E_x = -iA_1 \frac{1}{\omega \epsilon_1} k_1 e^{ik_x x} e^{k_1 z}; \quad E_z = -A_1 \frac{1}{\omega \epsilon_1} k_x e^{ik_x x} e^{k_1 z} \quad (3.34)$$

- $z > 0$: Dieléctrico

$$H_y = A_2 e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \quad (3.35)$$

lo que implica

$$E_x = iA_2 \frac{1}{\omega \epsilon_2} k_2 e^{ik_x x} e^{-k_2 z}; \quad E_z = -A_1 \frac{k_x}{\omega \epsilon_2} e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \quad (3.36)$$

$k_i = k_{z,i}$ ($i = 1, 2$) es la componente perpendicular del vector de onda a la interface en los dos medios.

La condición de continuidad para las componenetes normales y tangenciales de los campos \vec{E} y \vec{H} en la interfase entre los medios, en ausencia de carga y corriente libre son:

$$\epsilon_2 E_2^\perp - \epsilon_1 E_1^\perp = 0; \quad B_2^\perp - B_1^\perp = 0 \quad (3.37)$$

$$H_2^\parallel - H_1^\parallel = 0; \quad E_2^\parallel - E_1^\parallel = 0 \quad (3.38)$$

Utilizando esto para las componentes perpendiculares y tangenciales del campo eléctrico, obtenemos:

$$\epsilon_2 E_2 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow -\frac{A_2 k_x}{\omega} e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \Big|_{z=0} = -\frac{A_1 k_x}{\omega} e^{ik_x x} e^{-k_1 z} \Big|_{z=0} \quad (3.39)$$

$$E_{2x} = E_{1x} \Rightarrow \frac{iA_2 k_2}{\omega \epsilon_2} e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \Big|_{xy} = -\frac{iA_1 k_1}{\omega \epsilon_1} e^{ik_x x} e^{-k_1 z} \Big|_{xy} \quad (3.40)$$

Lo cual se reduce ha $A_2 = A_1$ y $\frac{k_2}{\epsilon_2} = -\frac{k_1}{\epsilon_1}$ respectivamete

CAPÍTULO 3 PLASMONES
3.4. PLASMÓN DE SUPERFICIE

Según la convención de signos en las exponenciales de las ecuaciones 3.33,3.35,3.34 y 3.36; el confinamiento en la superficie requiere que la parte real de $\epsilon_1 < 0$ si $\epsilon_2 > 0$ esto es, las ondas superficiales existen sólo en la interfase entre materiales con signos opuestos de la parte real de las permitividades dieléctricas. Las expresiones para H_y adicionalmente tienen que cumplir la ecuación de onda teniendo así:

$$k_1^2 = k_x^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_1 \quad y \quad k_2^2 = k_x^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_2 \quad (3.41)$$

Combinado estas ecuaciones y, $\frac{k_2}{\epsilon_2} = -\frac{k_1}{\epsilon_1}$ obtenemos la relación de dispersión de los SPPS propagándose en la interfase entre los dos medios.

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (3.42)$$

Lo cual es válido para cualquier ϵ_1 real o complejo. Además de que nos permite inferir inmediatamente que la constante de propagación de los SSP es mayor que la propagación de la onda en el dieléctrico ($k_0 < k_x$)

De aquí se puede obtener la relación de dispersión para un caso particular donde los SSP viven en una interfase plana metal-dieléctrico, donde el metal es ideal y cumple el modelo de Drude.[19] Si expresamos esto matemáticamente se tiene.

$$\frac{k_x c}{\omega_p} = \frac{\omega}{\omega_p} \sqrt{\frac{\epsilon_2(1 - (\frac{\omega}{\omega_p})^2)}{1 + \epsilon_2 + (\frac{\omega}{\omega_p})^2}} \quad (3.43)$$

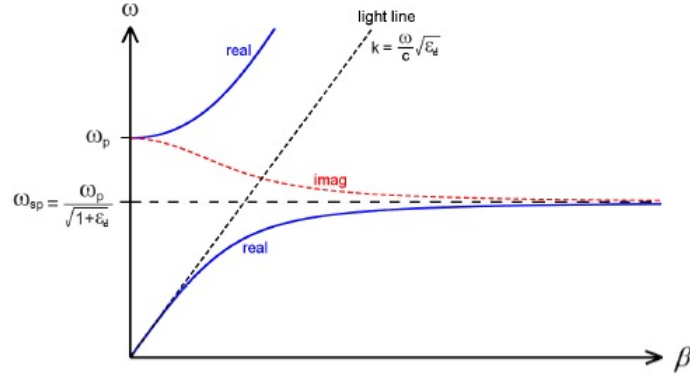


Figura 3.4: Relación de dispersión, donde los SPP se encuentran en una interfase metal-dieléctrico.

En la imagen 3.4,3 se tiene a la parte real e imaginaria del vector de onda en tonos azul y rojos respectivamente, la línea negra punteada respresenta el vector de onda que se esta propagando en el dieléctrico ϵ_2 el cual tiene una ecuación : $\frac{k_x}{\omega_p} = n \frac{\omega}{\omega_p}$ cuya pendiente n se refiere al índice de refracción del dieléctrico, a esta línea se le conoce comunmente como línea de luz del material.

Debido a que el vector de onda del SSP es mayor que el vector de onda dentro del dieléctrico, la parte derecha de la línea de luz que es no radiativa corresponde a la excitación de los SSP, en base a esto veamos que, la relación de dispersión inicialmente sigue de cerca a la línea de luz en el medio. Según aumenta la frecuencia ω aproximandose a ω_{sp} , la constante de propagación $k_{x_{spp}}$ se va incrementando respecto a la línea de luz hasta tender a valores grandes de $k_{x_{spp}} = \frac{2\pi}{\lambda_{spp}}$ (correspondiente a longitudes de onda del plasmón muy pequeñas). Entre ω_{sp} y ω_p se tiene que k_x se vuelve imaginaria, lo cual implica que no se propaga el plasmón sino que se atenúa: ese rango de frecuencias representa una zona prohibida para la propagación (un banda gap). Finalmente, para $\omega > \omega_p$, sabemos que la permitividad del metal se vuelve positiva, y el metal se comporta de manera idéntica a un dieléctrico, permitiendo la propagación de las ondas electromagnéticas en su interior, lo cual corresponde a plasmones de volumen.[22]

El valor de ω_{sp} puede obtenerse de la ecuación 3.42, si se hace que $k_x \rightarrow \infty$

$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \epsilon_2}} \quad (3.44)$$

En la discusión anterior se consideró un conductor ideal es decir $Im[\epsilon_1] = 0$. Sin embargo cuando excitamos electrones de conducción en metales reales tenemos que considerar el amortiguamiento, y por tanto ϵ_1 es complejo lo cual a su vez implica que k_x es complejo. Entonces, los SPP son amortiguados por una longitud de atenuación de energía (también llamada longitud de propagación), la cual podemos expresar como:

$$L = \frac{1}{2Im[k_x]} \quad (3.45)$$

Este valor oscila regularmente entre los 10 y 100 μm en el rango visible, dependiendo de

la configuración de metal dieléctrica en cuestión.

Polarización TE

Siguiendo el mismo procedimiento que se realizó para la polarización TM obtenemos

- $z > 0$: Dieléctrico

$$E_y = A_2 e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \quad (3.46)$$

lo que implica

$$H_x = -i \frac{A_2 k_2}{\omega \mu} e^{ik_x x} \exp^{-k_2 z}; \quad H_z = \frac{A_2 k_x}{\omega \mu} \exp^{ik_x x} e^{-k_2 z} \quad (3.47)$$

- $z < 0$: metal

$$E_y = A_1 e^{ik_x x} e^{k_1 z} \quad (3.48)$$

lo que implica

$$H_x = i \frac{A_1 k_1}{\omega \mu} e^{ik_x x} e^{k_1 z}; \quad H_z = \frac{A_1 k_x}{\omega \mu} e^{ik_x x} e^{k_1 z} \quad (3.49)$$

Aplicando nuevamente las condiciones de contorno expresadas en las ecuaciones 3.37 y 3.38, tenemos:

$$E_{2y} = E_{1y} \Rightarrow A_2 e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \Big|_{z=0} = A_1 e^{ik_x x} e^{k_1 z} \Big|_{z=0} \quad (3.50)$$

$$H_{2x} = H_{1x} \Rightarrow -i \frac{A_2 k_2}{\omega \mu} e^{ik_x x} e^{-k_2 z} \Big|_{xy} = i \frac{A_1 k_1}{\omega \mu} e^{ik_x x} e^{k_1 z} \Big|_{xy} \quad (3.51)$$

Simplificando estas expresiones obtenemos $A_1 = A_2$ y $A_1(k_1 + k_2) = 0$ lo cual dice que $A_1 = 0 = A_2$, es decir no existen PSS para una polarización transversal eléctrica en la interfase metal dieléctrico.

3.4.3. Excitación de Plasmones Superficiales

Anteriormente se mencionó que la ecuación de dispersión 3.42 muestra que el vector de onda de los plasmones es siempre mayor que el vector de onda de luz (ω/c). Este hecho establece que la luz incidiendo directamente sobre una superficie metálica no puede excitar plasmones superficiales, ya que no existe acomplamiento de momentos y se deben buscar mecanismos para lograrlo. Entre los más comunes están [23]

- Rejilla de Acoplamiento
- Reflexión total Atenuada

Rejillas de Acoplamiento

Si la luz cuya ecuación de dispersión es ($k = \frac{\omega}{c}$), incide sobre una rejilla periódica de constante a , con un ángulo de incidencia θ , su componente en la superficie puede tener vectores de onda que dependen de θ y de a , para tener una ecuación de dispersión:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta \pm n \frac{2\pi}{a} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = k_{sp} \quad \text{con } n=1,2,3.. \quad (3.52)$$

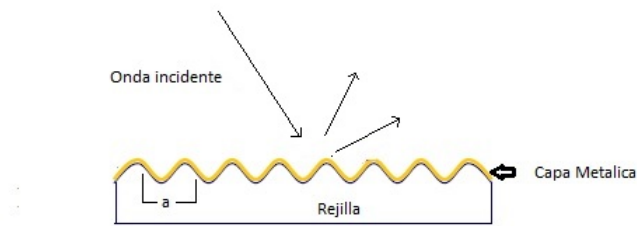


Figura 3.5: Dispositivo para generar plasmones de superficie mediante rejilla de acoplamiento.

En la figura 3.4.3 se muestra el dispositivo utilizado para generar plasmones. El cual consiste de una rejilla sinusoidal de constante a , sobre la cual se depositara una capa de metal.

Debido a la perturbación sinusoidal que encuentra la luz incidente se vuelve evidente que presenta una dispersión en diferentes haces de luz; uno de los cuales puede generar plasmones.

Reflexión total Atenuada

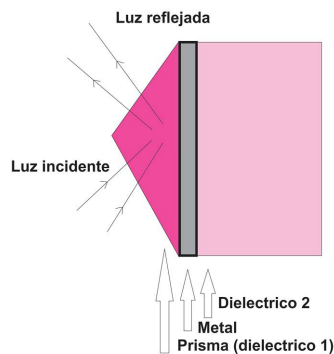


Figura 3.6: Configuración de kretschmann.

En la figura 3.4.3 podemos ver la configuración de Kretschmann, la cual consta de una película metálica confinada entre dos dieléctricos, el primero debe ser un prisma, ya que esto nos permitira modificar el ángulo crítico². Para poder generar los plasmones superficiales por esta técnica se hará incidir luz por una de las caras del prisma, opuesta a la parte en donde se encuentra la película. Esto generará que una porción de la onda sea reflejada de nuevo en el prisma y la otra transmitida en el interior de la película metálica que tiene en la otra frontera un dieléctrico, el dieléctrico usado en este trabajo será el aire.

Al estar viajando la onda por el dieléctrico tiene una componente $k_{x_p} = \frac{c}{n_p} \sin \theta$. De la cual se puede ver que al aumentar el ángulo de incidencia de la luz, esta se vera modificada. Para una frecuencia específica, existe un ángulo al cual esta expresión es igual a la relación de dispersión de los plasmones superficiales 3.42, cuando estos se acoplan se dice que entran en resonancia, y es en este momento que se generan los plasmones de superficie. Este acomplamiento tiene lugar en la interfase metal-aire, puesto que para generar los plasmones de superficie son necesarios las ondas evanescentes y estas se originan cuando existe reflexión total. Este fenómeno solo ocurre cuando la luz pasa de un medio de mayor índice de refracción a uno de menor índice.

Por este motivo, se calcula la cantidad de luz que es reflejada por el sistema en función del ángulo de incidencia, utilizando las ecuaciones de Fresnel. Consecuentemente se identifica cual o cuales ángulos de incidencia presentan la mayor absorción de la energía para conocer el ángulo donde el plasmón de superficie es excitado en la configuración Kretschmann. Se aplican las condiciones de frontera al sistema para llegar a las expresiones de reflectancia. Dado a que la frecuencia del plasma depende del material (funcion dielectrica) estudiado, el comportamiento en cada metal es diferente. Por otra parte la función dieléctrica también depende de la frecuencia de la luz que incide, lo cual implica que para distintas longitudes de onda existen distintos valores para la generación de los plasmones.

²Es el ángulo mínimo de incidencia en el cual se produce la reflexión interna total

Capítulo 4

Grafeno

4.1. Origen e historia del Grafeno

El carbono (C) es un elemento químico de número atómico 6 . La característica que lo hace más distintivo y le proporciona una gran importancia a este elemento, es su capacidad de combinación, siendo el número de interacciones entre átomos de carbono y otros diferentes casi infinito. Es por esto que es un elemento ideal para elaborar los complejos sistemas orgánicos como son nuestras células o las hojas de las plantas .

4.1.1. Hibridaciones

La configuración electrónica del carbono en su estado base es $C = 1s^2 2s^2 2p^2$. Si excitamos el electrón para preparar su enlazamiento con otro átomo, cada átomo de C mezcla su orbital $2s$ y $2p$ (esto es posible porque ambos se encuentran muy cercanos en energía).

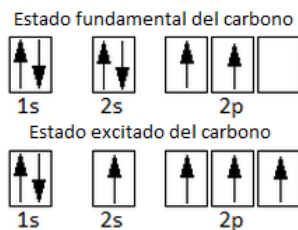
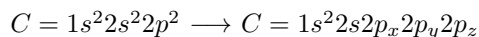


Figura 4.1: configuración electrónica del carbono en estado base y excitada

De la imagen anterior es fácil notar que se pueden formar cuatro enlaces pues es la cantidad de electrones desapareados que existen, los cuales pueden mezclarse de diferentes formas, pero al combinarse orbitales puros se da la producción de nuevos orbitales que llamaremos

degenerados. Dependiendo de la cantidad de orbitales que intervengan en el proceso de mezcla, existirán diferentes tipos de hibridación posibles, en particular los átomos de *C* sufren 3 tipos diferentes de geometrías.

Hibridaciones de carbono			
Tipo de Hibridación	Formada por	Forma en el espacio	Ángulo
SP ³			109°
SP ²			120°
SP			180°

Figura 4.2: Hibridaciones del carbono

4.1.2. Formas Alotrópicas

Los alótropos son formas distintas de un mismo elemento que difieren en la manera en que los átomos están unidos. En el caso particular del carbono, tenemos una extensa alotropía debido a la capacidad que tienen los átomos de éste para formar redes enormemente complicadas y con diversas estructuras [24]. Algunos alótropos del carbono son:

- Cero dimensionales: Fullerenos
- Monodimensionales: Nanotubos
- Bidimensionales: Grafeno
- Tridimensionales: Grafito y Diamante

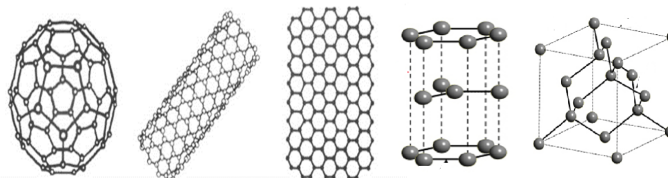


Figura 4.3: Alotrópos del carbono

4.1.3. Descripción del Grafeno

Como se mencionó anteriormente el grafeno es una manifestación diferente de la estructura atómica del carbono. En este caso, para formar el grafeno se lleva a cabo una hibridación del tipo sp^2 , pues se mezclan los orbitales $2s$, $2p_x$, $2p_y$ formando una estructura triangular en la que cada uno de los nuevos orbitales contiene un electrón que formará enlaces covalentes muy fuertes con otros átomos, creando así, una estructura teselada hexagonal con sólo un átomo de grosor.

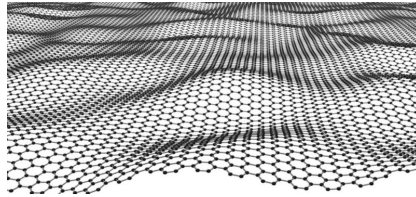


Figura 4.4: Grafeno

Aunque en esta última década el grafeno ha tomado mayor popularidad, este ya se conocía desde 1930, pues fué en esta fecha cuando se describieron sus enlaces químicos y estructura. Posteriormente en el año de 1949 el físico canadiense Russell Philip Wallace fue quien calculó por primera vez la estructura electrónica de bandas, pero no se le prestó mucha atención pues se suponía era una estructura inestable y se pensaba que el orden del material sería destruido por las fluctuaciones térmicas pero a pesar de esto, en 1994 esta estructura recibió oficialmente el nombre de grafeno, que quiere decir monocapa de grafito[25]. Aún así, tuvo que pasar mucho tiempo, para ser precisos hasta el año 2003, cuando el físico ruso Andrey Gueim y su compañero Novoselov; quienes se encontraran una tarde en la Universidad de Manchester Inglaterra trabajando en sus propios y extravagantes proyectos; encontraran una monocapa de carbono pues la idea de nanotubos y buckyballs, les había convencidos que esa sustancia estaba allí, esperando a ser descubierta.

Entonces, como primera idea, molieron una simple mina de lápiz en trozos muy pequeños y los esparcieron tratando de formar una capa con el menor espesor posible, limpiaban los bordes del área de experimentación usando una clásica cinta adhesiva, lo intentaron demasiadas veces, pero siempre llegaban a un mismo punto, en el que era imposible hacer más delgada la capa de grafito sobre la mesa. Esto parecía solo generar basura y frustración, pero de pronto, como muchos de los grandes descubrimientos científicos que suceden por casualidad ¡eureka!, ahí en la basura: el residuo sobre la cinta adhesiva que les haría ganadores al premio nobel de física, el grafeno[26, 27]. Después de su descubrimiento, este material ha sido objeto de muchos estudios, pues sus características lo hacen muy prometedor.

4.2. Propiedades Físicas del Grafeno

4.2.1. Propiedades ópticas

La transmitancia que presenta el grafeno es muy alta pues es de alrededor de 97,7% ya que solo absorbe un 2,3% de la luz incidente en una amplia gama de longitudes de onda que van desde 550 nm aproximadamente hasta el infrarrojo, la cual es una útil característica cuando se requiere alta transparencia en la región visible y baja resistividad eléctrica[28].

4.2.2. Propiedades Mecánicas

La dureza de un material se define como la cantidad de energía que es capaz de absorber antes de romperse o deformarse. En el caso del grafeno, su dureza es aproximadamente unas 200 a 300 veces la del acero, gracias a sus enlaces covalentes, ya que, al compartir átomos en el último nivel energético sus uniones son muy fuertes.[29]

Al igual que pasa con la dureza, el grafeno presenta una elevada elasticidad, pues soporta estiramientos de hasta el 20% de su estado original sin sufrir deformidades[30], tal vez, esta cantidad a primera instancia no parece grande, pero si consideramos que la elasticidad de algunos sólidos es de apenas el 1% notamos que si es un valor considerable. Para la determinación de estas características se utilizó un microscopio de fuerza atómica que "presionaba" perpendicularmente la hoja de grafeno para doblarla y obtener así su límite elástico; con lo cual se concluyó que la constante elástica es muy grande, el motivo de esto es que el grafeno casi no presenta impurezas o defectos en su red. El hecho de que el grafeno tenga una gran elasticidad permite que pueda moldearse de diversas maneras, lo que aumenta enormemente los campos en los que se puede utilizar.

Resulta curioso que el grafeno sea tan duro y resistente, puesto que este es una monocapa de grafito (el cual se rompe con mucha facilidad). El motivo es sencillo, en el grafito, las capas de carbono se encuentran unidas por fuerzas de Van der Waals, que son débiles comparadas con las uniones covalentes entre los carbonos del grafeno, además por ser sólo una capa bidimensional de carbono, es ligero ($0,77\text{mg}/\text{m}^2$)[34].

4.2.3. Propiedades electrónicas

El grafeno se encuentra clasificado como un semimetal, pues las bandas de conducción y valencia se tocan en un solo punto y el nivel de Fermi pasa justo por éste; esto quiere decir que el grafeno no tiene una banda prohibida, lo cual permite que los electrones en el material puedan pasar sin ningún problema de la banda de valencia a la banda de conducción, generando que este alotropo se considere un buen conductor, lo cual resulta interesante; dado que el carbono no presenta esta característica. La explicación a este hecho resulta de la configuración de los orbitales electrónicos en los átomos de carbono, ya que, para el caso del Grafeno solamente tres electrones forman enlaces (hibridación sp^2), los cuales se encuentran en un plano a 120° entre sí, produciendo una estructura bidimensional. El cuarto electrón de valencia restante no enlazado se extiende verticalmente por encima y por debajo del plano. El solapamiento de estos orbitales no hibridados da lugar a orbitales π en los que los electrones están deslocalizados al plano 4.2.3, y son los responsables de la eficiente conductividad del material en cuestión.

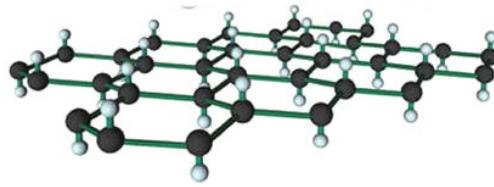


Figura 4.5: Grafeno en el cual se muestra los electrones que quedan perpendiculares al plano y son los responsables de la conductividad de dicho material.

Hasta ahora era suficiente con definir la conductividad eléctrica como la medida de la capacidad de un material para dejar pasar libremente la corriente eléctrica, pero para hablar de otras propiedades que presenta el grafeno es necesario saber que esta conductividad es producida al desprender electrones de valencia de un átomo por la aplicación suficientemente alta de energía externa. El electrón que ha sido desprendido pasa entonces de ser un electrón de valencia a uno de conducción (no pertenece a ningún átomo), mientras que en el lugar donde estaba queda una carga positiva no compensada de igual magnitud a la del electrón desprendido, y a esta cuasipartícula se le llama hueco. En el caso particular del grafeno, estos huecos se mueven a una velocidad constante viajando a distancias de micras sin sufrir dispersión. Los portadores de carga del grafeno se mueven de esa manera debido a su estructura electrónica. En un material convencional, la relación de dispersión de energía de un electrón o hueco es del tipo parabólico; en el grafeno, la relación de dispersión de la energía alrededor del nivel de Fermi que define la energía más alta de los orbitales moleculares ocupados por los electrones a la temperatura de 0K es aproximadamente lineal 4.2.3 y esto tiene consecuencias muy profundas, pues implica que los electrones en el grafeno son semejantes a los fermiones relativistas de Dirac sin masa ¹, la aparición de partículas de este tipo en el grafeno se debe a la interacción de los electrones de carbono con el potencial periódico de la red cristalina del grafeno. La existencia de estas partículas se demuestra por el hecho de presentar un efecto Hall cuántico anómalo [31, 32]. Esta propiedad ha sido una de las más importantes del grafeno pues lo ha posicionado como una opción barata y manejable para la investigación en electrodinámica cuántica.

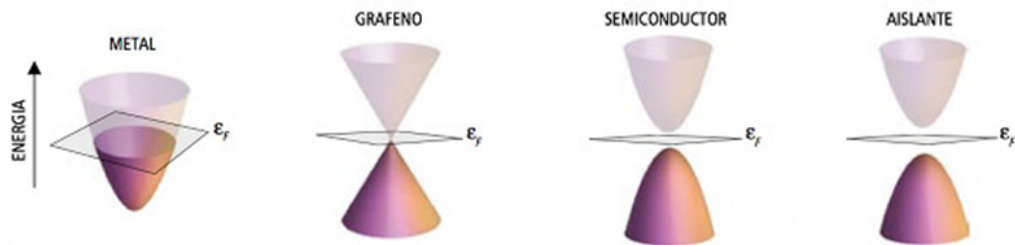


Figura 4.6: Estructura de bandas del metal, grafeno, semiconductor y aislante. En la cual se ejemplifica muy bien la diferencia de separación que existe entre las bandas de conducción y valencia en cada caso.

Expresión para la conductividad del grafeno

Debido a lo mencionado anteriormente, las propiedades electrónicas del grafeno se

¹Estas partículas pueden ser visualizadas como electrones que han perdido su masa en reposo o como neutrinos que adquirieron la carga electrónica

CAPÍTULO 4 GRAFENO
4.2. PROPIEDADES FÍSICAS DEL GRAFENO

describen a partir de la teoría de Dirac. Esta característica da lugar a una conductividad óptica del grafeno, expresada como: $\sigma(\omega) = \sigma_{real} + i\sigma_{imag}$; las contribuciones intrabanda e interbanda respectivamente. Esta ecuación puede ser obtenida mediante el formalismo de Kubo para temperaturas finitas, y en el límite donde los efectos de dispersión espacial son despreciables, obteniendo así[33]

$$\sigma(\omega, \mu_c, \tau, T) = \frac{e^2(\omega + i\tau^{-1})}{i\pi\hbar^2} \left[\frac{1}{(\omega + i\tau^{-1})^2} \int_0^\infty \varepsilon \left(\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial F(-\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon - \int_0^\infty \frac{F(-\varepsilon) - F(\varepsilon)}{(\omega + i\tau^{-1})^2 - 4(\frac{\varepsilon}{\hbar})^2} d\varepsilon \right] \quad (4.1)$$

Donde e es la carga de un electrón, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ es la constante de Planck reducida, $F(\varepsilon) = (e^{\frac{\varepsilon - \mu_c}{k_B T}} + 1)^{-1}$ es la distribución de Fermi-Dirac, y k_B es la constante de Boltzman. El primer término en la ecuación se debe a las contribuciones intrabanda, y el segundo término a la contribuciones interbandas. El resultado del cálculo del término interbanda es:

$$\sigma_{intra} = \frac{2ie^2 k_B T}{\pi\hbar^2(\omega - i\tau^{-1})} \left(\frac{\mu_c}{k_B T} + 2 \ln(e^{\frac{\mu_c}{k_B T}} + 1) \right) \quad (4.2)$$

La expresión anterior se puede aproximar por $k_B T \ll |\mu_c|$, reduciéndose a la siguiente ecuación.

$$\sigma_{intra} \simeq \frac{ie^2 \mu_c}{\pi\hbar^2(\omega + i\tau^{-1})} \quad (4.3)$$

En el caso del segundo término de la ecuación 4.1, haciendo la aproximación en el límite $k_B T \ll |\mu_c|$, se obtiene;

$$\sigma_{inter} \simeq \frac{e^2}{4\hbar} \left[1 + \frac{i}{\pi} \ln \frac{\hbar(\omega + i\tau^{-1}) - 2\mu_c}{\hbar(\omega + i\tau^{-1}) + 2\mu_c} \right] \quad (4.4)$$

Entonces la conductividad total para el grafeno sería la suma de la ecuación 4.3 y 4.4, la cual es utilizada en todos los resultados mostrados en esta tesis.

A continuación se muestran gráficas de la conductividad del grafeno, con las condiciones expresadas anteriormente.

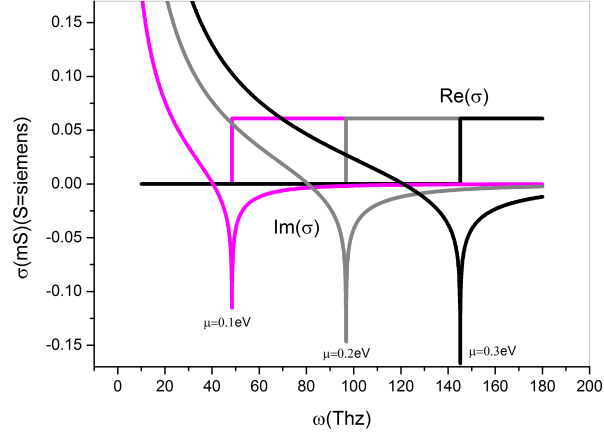


Figura 4.7: Parte real e imaginaria de la conductividad para tres valores de potencial químico, 0.1,0.2 y 0.3 eV

Del gráfico mostrado anteriormente se puede observar, que para cada potencial químico existe una región de frecuencias muy diferentes para las cuales la contribución de la parte imaginaria de la conductividad tiene un cambio abrupto; esta característica es de gran importancia cuando se analiza los efectos plasmónicos que ofrece el grafeno. Como se verá más adelante los valores positivos de la parte imaginaria de la conductividad determinan la región de los plasmones de superficie ante la incidencia de luz con polarización TM, mientras que los valores negativos de la parte imaginaria de la conductividad son determinantes para la existencia de los modos de superficie de origen TE. También cabe mencionar que σ_{inter} diverge logarítmicamente a $\hbar\omega \approx 2\mu_c$, lo cual resulta relevante ya que los plasmones de superficie existen sólo en las regiones en donde $\hbar\omega < 2\mu_c$, es decir a la izquierda del punto de divergencia. También se puede probar que para frecuencias muy altas ($\omega \gg 1\mu_c$), σ se aproxima a una constante $\sigma_0 \approx \frac{e^2}{4\hbar}$ como se puede observar en el gráfico anterior. Por otro lado en límite de bajas energías la relación que existe entre el potencial químico (μ_c) y la densidad de los portadores de carga (n_c) para una capa de grafeno, está dada por; $\mu_c \approx (\hbar^2\pi v_f^2 n_c)^{\frac{1}{2}}$, para los valores experimentales de n_c como $10^{12}cm^{-2}$ y $10^{14}cm^{-2}$ se puede demostrar que el valor del potencial químico está acotado en 0.12eV y 1.2eV, de tal forma que esto nos proporciona una forma de elegir la región adecuada de frecuencias para la excitación de los modos de superficie en el grafeno según la polarización empleada. En alusión al análisis analítico de los modos de superficie en una sola capa de grafeno, se encuentra teóricamente la existencia de un nuevo tipo de modo para la polarización TE asociado a la parte imaginaria de la conductividad, lo cual es algo novedoso con respecto a lo que ocurre en los metales.[34]

4.3. Aplicaciones del Grafeno

Cuando el grafeno fue descubierto, éste se describió como un material maravilloso, el cual podría tener fuertes aplicaciones en diversas áreas, entre las cuales figuraban la electrónica, informática, sector energético, medicina, tratamiento de aguas y en el mismo desarrollo de la ciencia [35, 36, 37]; pero aunque éste ya se produce a gran escala en algunos países como son España y Alemania, el grafeno no ha logrado sacar del papel todas sus

posibles aplicaciones, pero a continuación se presentan algunas que ya son comerciales.

- Pila de grafeno, elaborada por la empresa Española Grabat Energy, la cual según sus fabricantes puede recargarse en mucho menos tiempo en comparación con las convencionales pilas de ión-litio, además de que con este material se reduce su peso y volumen.
- Equipo deportivo fabricado por la empresa Española Catlike con carbono y grafeno, por lo cual son muy resistentes y ligeras, entre las piezas que tienen estas propiedades están los tenis, raquetas, cascos, Esquí, etc.
- Automóviles, específicamente GTA Spano, un deportivo fabricado en España; aquí el grafeno se usa combinado con el carbono para mejorar la resistencia y reducir fatiga e impactos de la carrocería. También está en las pieles que cubren los asientos, las cuales son tres veces más finas y resisten el triple el desgaste.
- Celulares, dos empresas chinas, Moxi y Galapad lanzaron al mercado los primeros smartphones que utilizan grafeno en alguna de sus partes con lo cual son dispositivos delgados, flexibles y con una extrema dureza; según la agencia oficial Xinhua.

Capítulo 5

Resultados

La investigación acerca de la propagación de radiación electromagnética en estructuras periódicas y cuasiperiódicas ha crecido numérosamente en la última década debido a que el manejo eléctrico de las vías de emisión de luz abre la posibilidad de nuevos tipos de nanodispositivos fotónicos, basados en la plasmónica.[38, 39, 40, 41]

Por ello, consideramos que la tecnología del futuro se basará en los circuitos plasmónicos y que éstos predominarán como componentes fundamentales en computadoras y en dispositivos dedicados al procesamiento de la información.

Como una forma de contribución al conocimiento en esta área se plantea realizar el estudio de plasmones de superficie en estructuras formadas por capas alternadas de grafeno y dieléctricos, este estudio se hará para varios casos, inicialmente se estudiará la estructura periódica, y posteriormente se hará para estructuras cuasiperiódicas en donde la relación de recurrencia para generar la cuasiperiodicidad será a través seguir la secuencia de Fibonacci en un caso y en otro a través de una secuencia tipo Wannier. Se pretende para estas estructuras determinar algunas de sus propiedades ópticas, para ello se harán cálculos de estructuras de bandas proyectadas en los esquemas de polarización TM y TE, así como el estudio de los espectros de reflexión con el fin de reforzar lo mostrado por los primeros resultados. Para ilustrar la forma en la que puede construirse una estructura tipo Fibonacci en la tabla 5.1, se muestra la construcción de las celdas unitarias para los primeros números de la relación de recurrencia. Nótese que la periodicidad se rompe al considerar grafenos con diferentes niveles de impurificación, lo que se considera al manejar dos potenciales químicos diferentes y los denotados como G1 y G2,

n° fibonacci	celda unitaria
0	A-G1
1	A-G2
2	A-G2-A-G1
3	A-G2-A-G1-A-G2
4	A-G2-A-G1-A-G2-A-G2-A-G1
5	A-G2-A-G1-A-G2-A-G2-A-G1-A-G2-A-G1-A-G2

Cuadro 5.1: Descripción de la construcción de las celdas unitarias para los primeros numeros de la relación de recurrencia de Fibonacci en donde A-aire, G1-grafeno1 y G2-grafeno2

Como se mencionó en el capítulo tres, para el estudio de los modos de superficie es indispensable conocer la relación de dispersión, pues esta caracteriza por completo al plasmón en la interfaz; por esta razón a continuación se obtiene dicha expresión para la configuración aire-grafeno:

$$q_x = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\eta_0\sigma}\right)^2} \text{ polarización TM} \quad (5.1)$$

$$q_x = \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_0\sigma}{2}\right)^2} \text{ polarización TE} \quad (5.2)$$

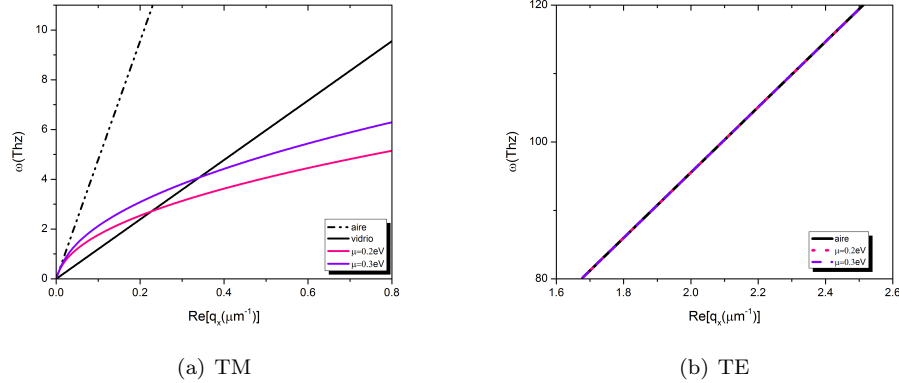


Figura 5.1: Relación de dispersión.(a) En el caso de la polarización TM se observa que al variar el potencial químico las curvas se ubican de manera sensible en diferentes rangos de frecuencia. (b) Relaciones de dispersión para polarización TE de donde se observa como está, se encuentra muy pegada a la línea de luz y los modos de superficie se encuentran suprimidos.

De la figura 5.1 se puede apreciar para el caso TM, que la curva de dispersión de los plasmones se encuentra por debajo de la relación de dispersión para los fotones propagándose en el dieléctrico. Por lo cual será necesario hacer uso de la reflexión total atenuada (ATR por sus siglas en inglés) y se usará la configuración de Kretschmann[3.4.3] de esta manera los fotones se acoplan a los plasmones de superficie. Entonces en este caso para lograrlo se antepone un prisma a la estructura con un índice de refracción $n_v = 2$ y posteriormente se coloca un medio con el índice $n_d = 1$ los cuales corresponden al vidrio y al dieléctrico respectivamente, teniendo así un ángulo crítico¹ de 30°. Dicho esto, se puede garantizar que después de ese valor se tenga reflexión total interna, este sistema es usado para todos los casos, estructuras periódicas, y cuasiperiódica para ambos tipos de polarización TM y TE.

¹ $\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ con $n_2 < n_1$

5.0.1. Polarización TM

Monocapa

Como primer caso tomamos una estructura periodica con una celda unitaria construida con una capa de grafeno y un dieléctrico en este caso aire, inicialmente se estudian las bandas proyectadas para diferentes espesores del dieléctrico. En la figura 5.2 se puede ver como el hecho de reducir el espesor del dieléctrico reduce la zona donde es posible encontrar modos de propagación hasta que esta zona se desvanece por completo; las regiones por colores muestran la magnitud de la parte compleja del vector de Bloch lo que nos proporciona información de la profundidad de penetración que se puede tener debida a la absorción. En términos generales esto quiere decir que el hecho de disminuir el espesor del dieléctrico provoca una baja posibilidad de alcanzar modos propagantes más allá de la línea de luz y consecuentemente no es posible propagar ondas evanescentes sobre la hoja de grafeno.

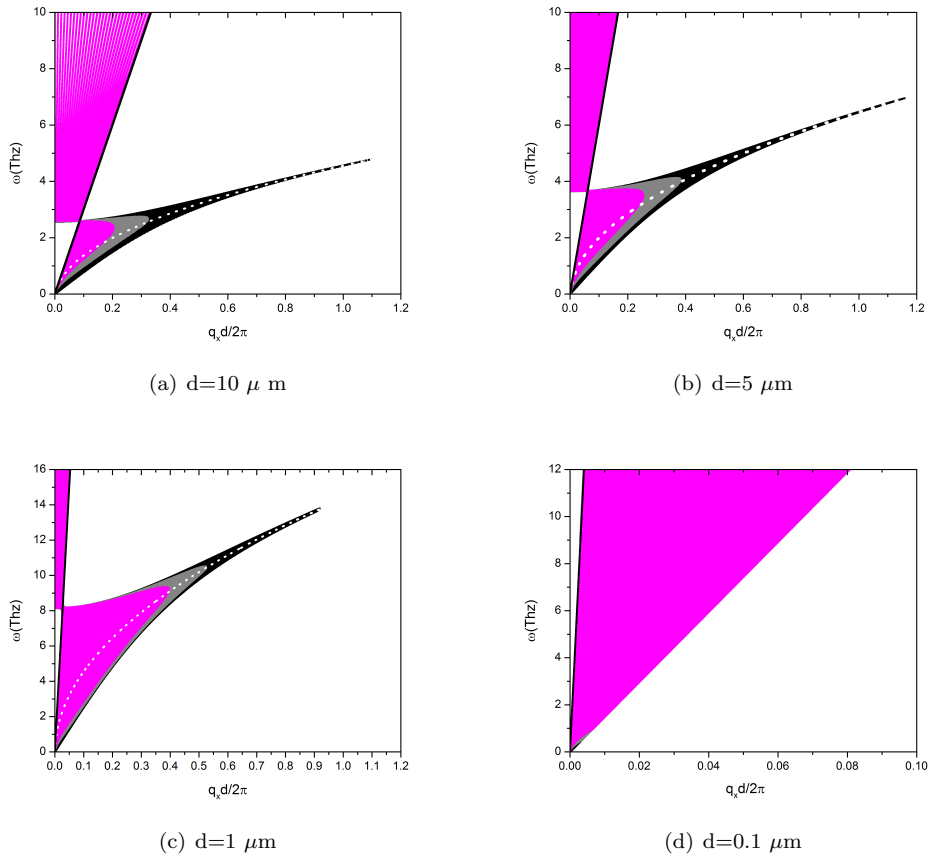


Figura 5.2: Estructura de bandas proyectadas para diferentes valores de distancia(d) entre las hojas de grafeno. En todos los casos se ha considerado que $Tr(M) < 1$, la zona gris corresponde a $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ y la magenta a $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$

De lo anterior se desprende que al disminuir el valor de d la región de ondas evanescentes se reduce, lo cual se puede interpretar como una falta de extensión de éstas para acoplarse con la densidad de carga entre cada grafeno. Además, el hecho de acotar la parte imaginaria

del vector de onda nos da una muestra de que mientras más grande es este valor, existe menos penetración por parte de los modos evanescentes, lo cual muestra una relación entre la generación de plasmones y esta componente del vector de onda. Aunado a esto, las gráficas de reflexión indican la importancia de ciertos parámetros para la generación y caracterización de plasmones de superficie y el manejo que se pudiese tener de ellos.

En la figura 5.3 se muestran los espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia de la luz bajo condiciones de ATR para la estructura descrita anteriormente con $d = 10\mu m$, en el inciso (a) se han considerado diferentes valores de la frecuencia ω , de lo cual se puede ver que a medida que la frecuencia se incrementa el valor mínimo que alcanza el coeficiente de reflexión que se muestra entre los 50 y 60 grados se reduce para mayores frecuencias y se recorre hacia ángulos mayores, en el inciso (b) se exponen diferentes valores para la absorción, de lo cual se puede notar que el mínimo se mantiene en $\theta = 52$ pero conforme γ crece se acentúa más dicho mínimo, finalmente en (c) tenemos estructuras con un número diferente de periodos, y ahí podemos notar que mientras más cantidad de celdas existen; el valor mínimo del coeficiente de reflexión se reduce, además de provocar un corrimiento hacia valores cercanos al ángulo crítico.

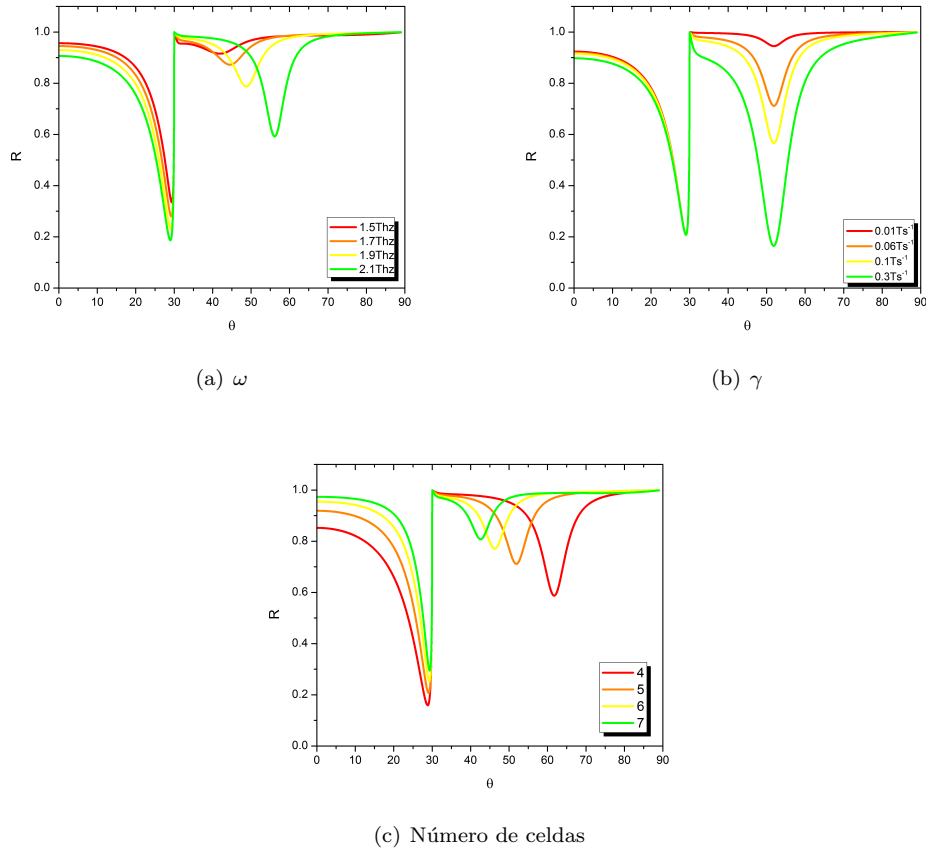


Figura 5.3: Espectros de reflexión para una estructura grafeno-dieléctrico, donde realiza, variaciones en: (a) frecuencia (ω), (b) absorción (γ) y (c) el número de celdas

Con el fin de estudiar con un mayor detalle el efecto que produce el tamaño del ancho del dieléctrico, se muestra en la figura 5.4 las bandas fotónicas en función de dicho parámetro para $q_x d/2\pi = 0,2$, con d variando desde $d = 0,01$ hasta $d = 10 \mu m$. Donde se observa como

la parte evanescente de la banda se estrecha conforme d se reduce. Además muestra como a medida que d disminuye, los plasmones se pueden generar en una región de frecuencias mayor.

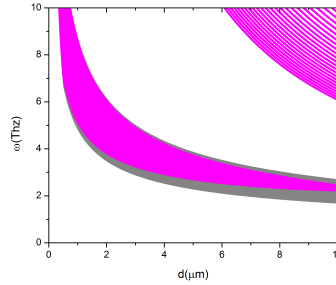


Figura 5.4: Modos de propagación en función del ancho del dieléctrico en polarización TM a $q_x d / 2\pi = 0,2$, aquí al igual que la figura Fig. 5.2 la zona gris corresponde a $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ y la magenta a $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$

Estructura Fibonacci

A continuación estudiaremos un cristal fotónico cuasiperiódico, donde éste se genera a través de la regla de recurrencia de los números de Fibonacci 5.1, las celdas que se alternan están compuestas de una película de grafeno y un dieléctrico, en ambos tipos el ancho del dieléctrico es el mismo y se trata de aire, la diferencia radica en el valor del potencial que tiene cada una de ellas, la celda 1 tiene una película de grafeno con potencial $\mu_1 = 1,0eV$ y la segunda tiene una película de grafeno con potencial $\mu_2 = 0,3eV$. En la figura 5.5 podemos ver las bandas proyectadas correspondientes a números de generación 2,3,4 y 5, con las características descritas anteriormente.

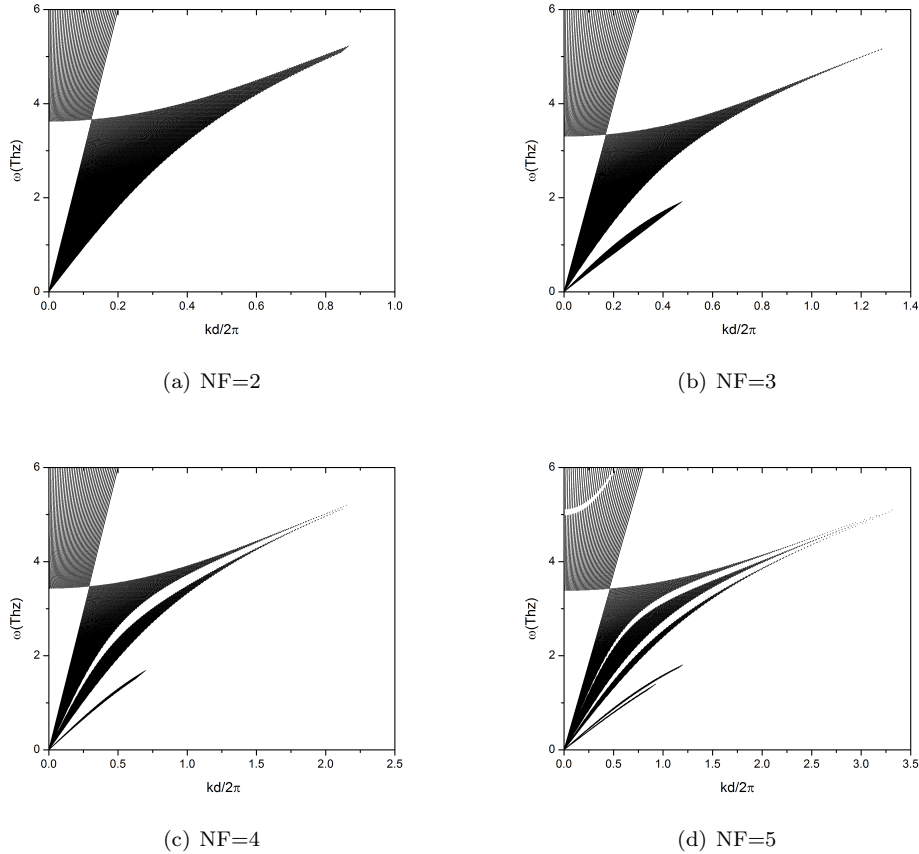


Figura 5.5: Estructura de bandas proyectadas para diferentes números de generación de Fibonacci.

De las gráficas se puede notar que conforme se incrementa el número de Fibonacci se produce un desdoblamiento de la banda de acuerdo al número de generación. Lo cual tiene su explicación en la ruptura de la periodicidad ocasionada por la relación de recurrencia.

En la figura 5.6 podemos ver la reflexión para diferentes valores de ω , en el caso particular de 1 THz podemos ver la existencia de dos mínimos, el más cercano al ángulo crítico es generado por las dos últimas bandas (las más pequeñas) y el otro a las tres primeras, por lo cual se muestra mejor definido, el hecho de que la banda prohibida sea muy estrecha permite este comportamiento. En el caso de frecuencias mayores podemos ver como los mínimos se hacen menos pronunciados y en algunos casos se reduce a uno solo, esto es debido a que la banda prohibida se hace más estrecha, además de que las dos últimas bandas ya no son alcanzadas por estas frecuencias. Estos resultados están en concordancia con las gráficas obtenidas en las bandas proyectadas ya que el desdoblamiento de éstas mostrados en la figura 5.4 se refleja en que para dos ángulos a la misma frecuencia sea posible alcanzar modos de superficie como se muestra en la figura 5.6

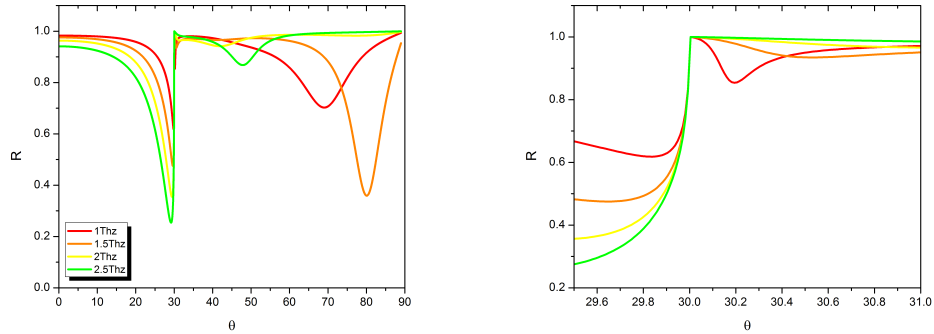


Figura 5.6: Espectros de reflexión para una estructura cuasiperiodica correspondiente a $NF=5$, para diferentes valores de la frecuencia (ω)

En 5.7 se puede apreciar como el número de mínimos se encuentra estrechamente relacionado con el número de capas; debido a que mientras más grande es la estructura, las bandas sufrirán mayores desdoblamientos, generando para un rango de frecuencias varias bandas permitidas y prohibidas, las cuales definirán la interacción entre las ondas por medio de sus separaciones en frecuencias.

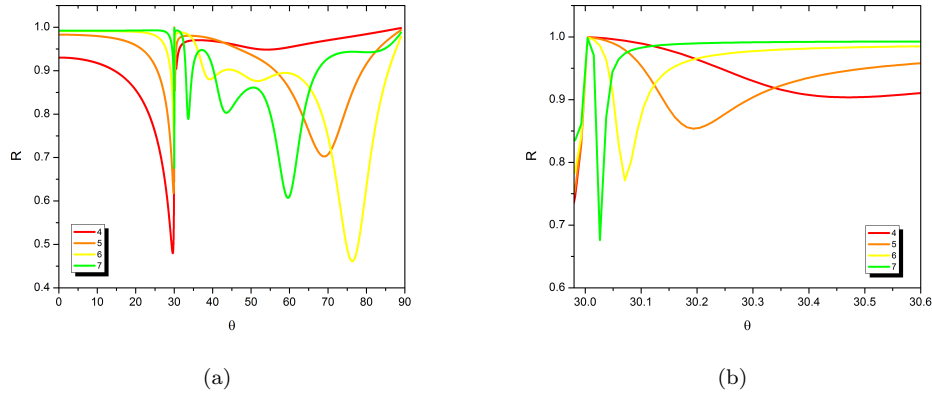


Figura 5.7: Espectros de reflexión para estructuras tipo Fibonacci.

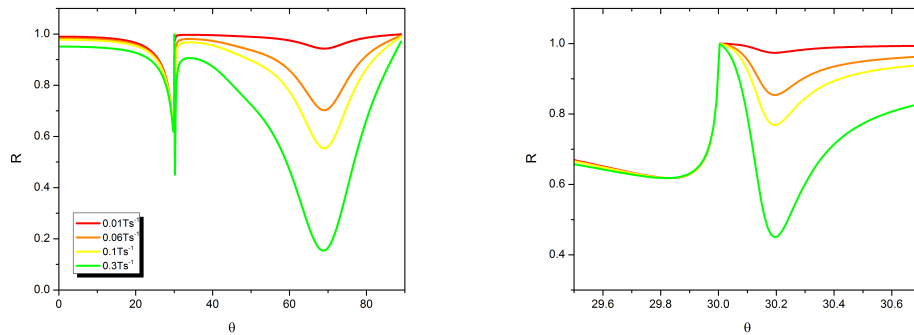


Figura 5.8: Espectros de reflexión para una estructura cuasiperiódica correspondiente a $NF = 5$, para diversos valores de la absorción.

Se mencionó anteriormente que la absorción es una parte fundamental en la presencia de plasmones de superficie, en la figura 5.8, se muestran los espectro de reflexión para diferentes valores de ésta. De lo cual se puede inferir inmediatamente que conforme este valor disminuye, se favorece la existencia de plasmones. Con el incremento del número de capas se pueden alcanzar modos de propagación para diferentes frecuencias, lo cual también es observado en la figura 5.8

Estructura Wannier

A continuación mostraremos un estudio similar al anterior para una estructura tipo Wannier, la cual consiste en realizar un incremento constante del potencial químico μ en una serie de capas de grafeno que tienen dieléctricos iguales en índice de refracción y ancho. En este caso la celda unitaria está compuesta de una serie de celdas formadas por capas de grafeno con dieléctricos en donde, de una capa de grafeno a la otra existe un incremento en el potencial, similar a lo que ocurre en una estructura de bandas electrónicas a las cuales se les ha aplicado un campo eléctrico, la celda construida de esta manera se repite periódicamente. En la figura 5.9 podemos ver las bandas proyectadas para cuatro estructuras de este tipo, en las cuales se varía el número de capas ($NW=2,3,4,5$) en las

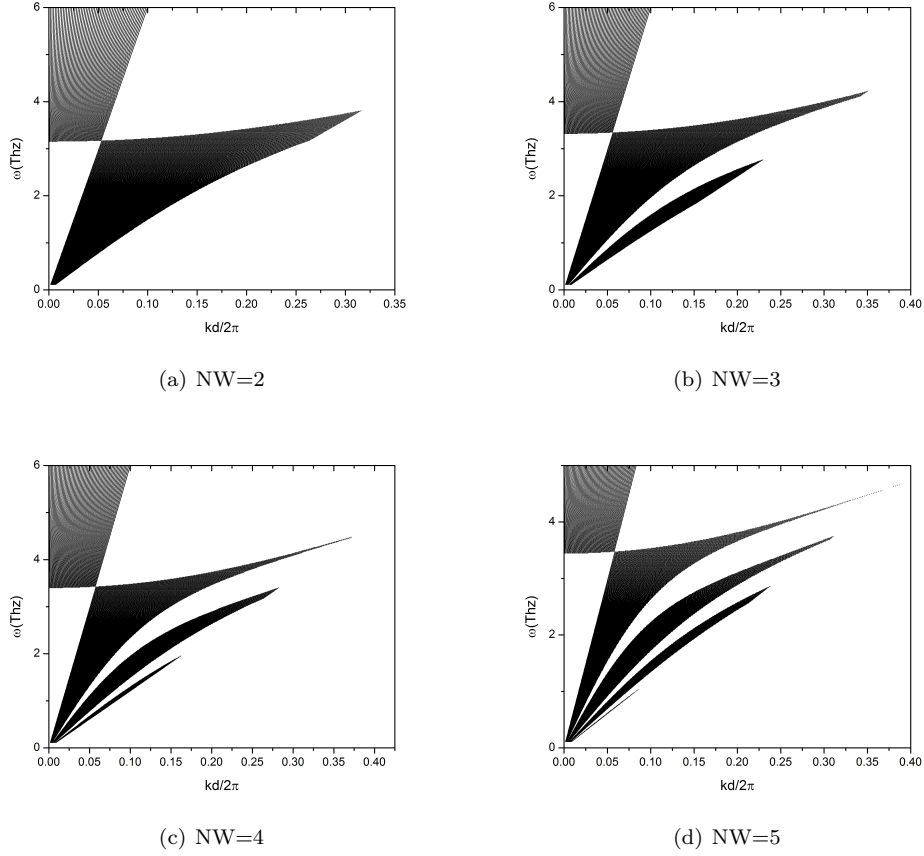


Figura 5.9: Estructura de bandas proyectadas para estructuras tipo Wannier, con diferentes número de celdas unitarias.

que a su vez μ varía desde un valor inicial $\mu_i = 0,1eV$ hasta un valor final $\mu_f = 1,0eV$. De estas figuras se puede ver como conforme el número de capas se incrementa, el número de bandas también lo hace, análogo a lo mostrado anteriormente en el caso Fibonacci, solo que en este caso la generación parece ser mas lenta, debido a la proximidad existente entre los valores de los potenciales cuánticos.

A continuación en las figuras 5.10 y 5.12, se muestran los espectros de reflexión para una estructura tipo Wannier 8; se eligió este número para tener analogía con el caso Fibonacci. En este caso se han considerado diferentes valores de ω y γ , de lo cual se puede observar que los mínimos se encuentran pobremente definidos a diferencia del caso Fibonacci, lo cual se atribuye a la mejor definición de las bandas prohibidas, limitando así la interacción entre ondas. Por otro lado en 5.11 se puede observar como en este caso la variación del número de celdas unitarias genera mínimos más uniformes, aunque menos definidos.

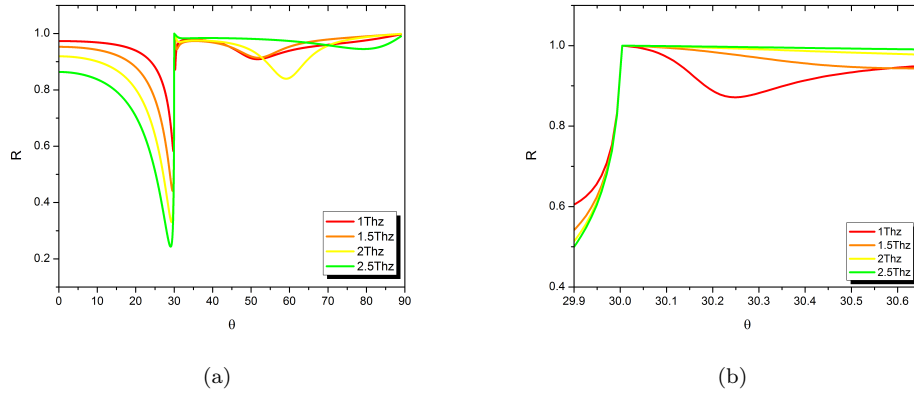


Figura 5.10: Espectro de reflexión para estructura tipo Wannier 5, para diversos valores de frecuencia

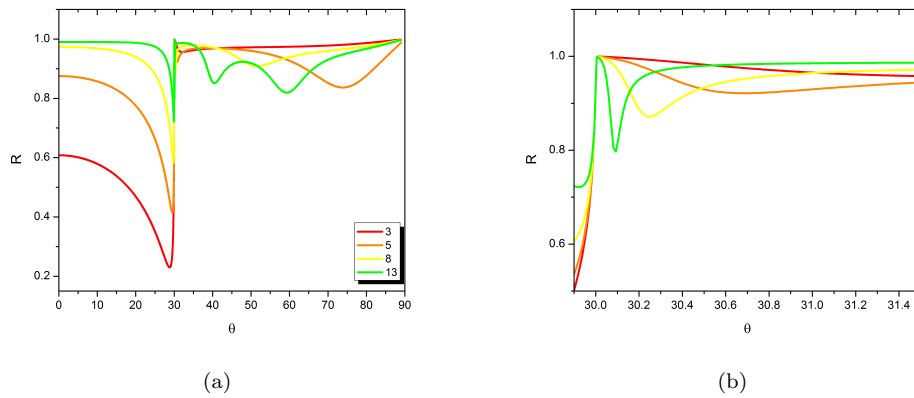


Figura 5.11: Espectro de reflexión para estructura tipo Wannier, con variación en el número de celdas unitarias

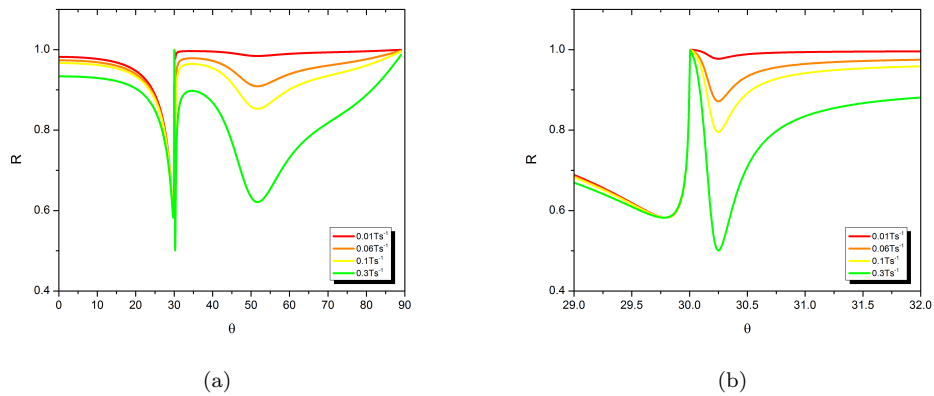


Figura 5.12: Espectro de reflexión para estructura tipo Wannier 5, para diferentes valores de absorción

5.0.2. Polarización TE

Monocapa

Como punto de partida para el estudio de los modos de superficie de origen TE, se presentan resultados de bandas proyectadas para una estructura cuya celda unitaria está conformada por un grafeno y un dieléctrico. En la figura 5.13 se muestran las bandas proyectadas para diferentes espesores de la capa de dieléctrico, de aquí se puede observar que para el caso del ancho del dieléctrico $d = 0,01\mu m$ existen modos de superficie más allá de la línea de luz, la gráfica muestra también la posibilidad de alcanzarlos en términos de la parte compleja del vector de propagación.

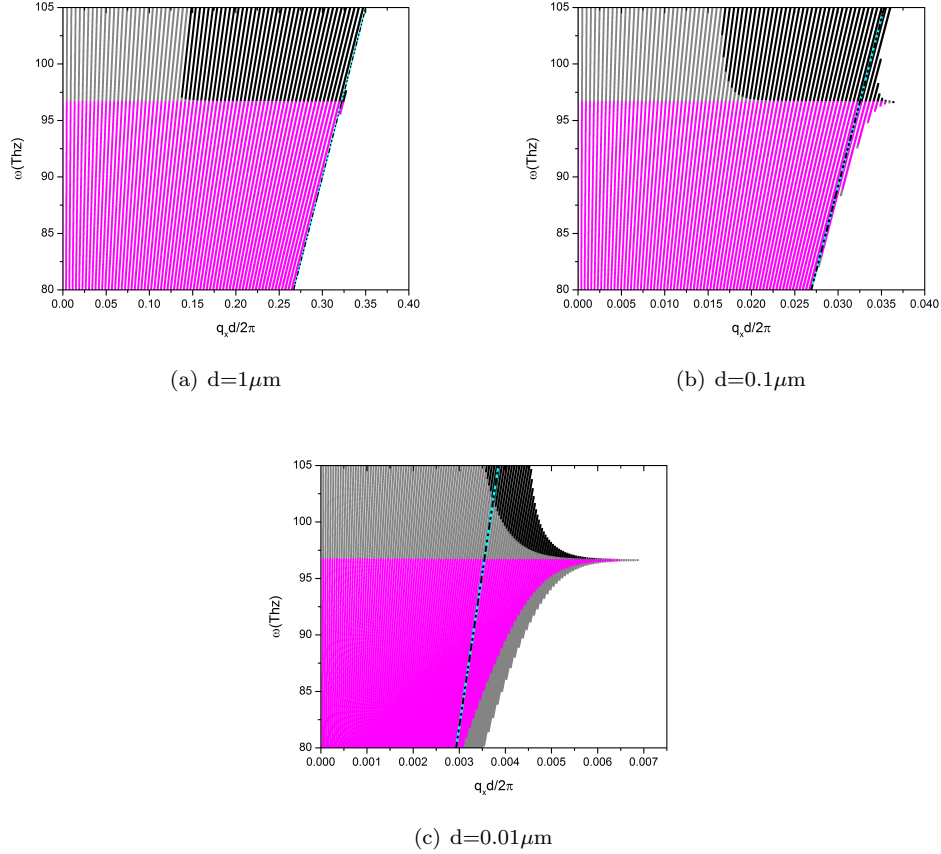
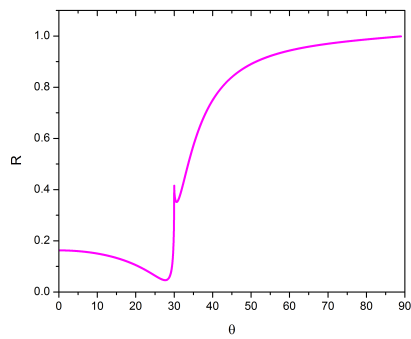


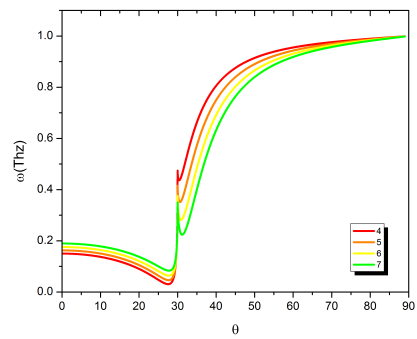
Figura 5.13: Estructura de bandas para diferentes espesores en el dieléctrico. Todos los casos corresponden a la condición $Tr(M) < 1$, la condición $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi}) < 0,002$ se muestra con gris y la condición $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi}) < 0,001$ con magenta

En la figura 5.14, se muestran los espectros de reflexión en función del ángulo para la estructura descrita anteriormente 5.13 cuando $d = 0,01\mu\text{m}$, en el inciso (a) se muestra evidencia de la existencia de plasmones para una frecuencia específica, pues notemos que en este caso tenemos un rango muy reducido de frecuencia en la que es posible observar los modos y estos se encuentran pegados a la línea de luz a diferencia de los modos observados en la polarización TM. (b) en esta figura se muestran los espectros de reflexión para diferentes números de periodos; de lo cual se puede notar que mientras este número crece el mínimo se define mejor, para (c) se realiza una variación en el valor de γ y como es de esperarse mientras este valor crece el mínimo en el espectro de reflexión se reduce, pues con el incremento de la absorción las ondas se vuelven más evanescentes.

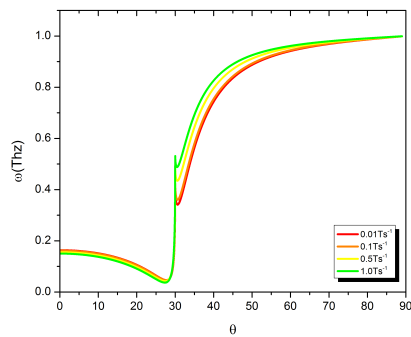
En términos generales se puede ver como la existencia de plasmones depende fuertemente del espesor del dieléctrico en ambas polarizaciones. En el caso particular de la polarización TE se requiere un espesor menor al requerido para la polarización TM, y el rango de frecuencias en la que se éstos se presentan es diferente, este resultado está asociado a las características de la conductividad del grafeno; en el caso de la polarización TE se considera que al tener mayor proximidad entre las capas de grafeno provocará que el campo evanescente tenga más probabilidad de excitar los modos superficiales. En este caso se



(a) ω

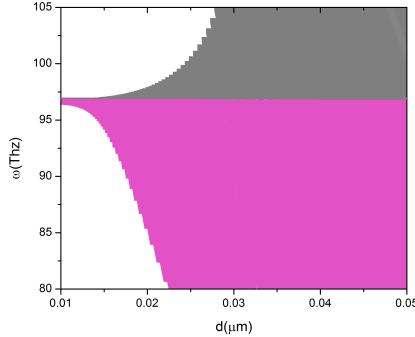


(b) Número de celdas



(c) γ

Figura 5.14: Espectros de reflexión para una estructura grafeno-diélectrico en polarización TE, en las cuales se muestra la variación de (a) frecuencia, (b) número de celdas unitarias y (c) absorción



(a)

Figura 5.15: Modos de propagación en función del ancho del dieléctrico en polarización TE a $q_x d/2\pi = 0,006$, aquí al igual que la figura Fig. 5.2 la zona gris corresponde a $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,002)$ y la magenta a $\text{Im}(\frac{q_x d}{2\pi} < 0,001)$

puede ver como al acotar la parte imaginaria del vector de onda, la banda se ve deformada restringiendonos a menores rangos de frecuencias.

En la figura 5.15 se presenta la banda fotónica en función del ancho del dieléctrico. Para este caso hemos variado el espesor del dieléctrico desde 0.01 hasta 0.1 μm . Se observa que el rango de frecuencias en donde es posible propagar plasmones es muy estrecho y se ubica al rededor de los 96 THz para un valor de potencias de $\mu = 0,2eV$, los modos de superficie para la polarización TE están fuertemente ligados a la parte imaginaria de la conductividad. La figura 5.15 muestra dichos modos en un rango de reducido de valores del ancho del dieléctrico para hacerlos más observables

Estructura Fibonacci

En la figura 5.16, podemos ver las bandas proyectadas para la estructuras descritas en la tabla 5.1; para los números de generación de Fibonacci $NF=2,3,4,5$; donde la periodicidad se rompe al considerar capas de grafeno con diferentes potenciales químicos $\mu_1 = 0,2eV$ y $\mu_2 = 0,201eV$. Las bandas proyectadas para estas estructuras muestran un comportamiento completamente diferente al caso de las bandas proyectadas para redes de Fibonacci para el caso TM, aquí no existe un desdoblamiento de las bandas, esto se considera puede ser ocasionado por la poca separación de los grafenos que permite que las ondas pasen através de la estructura sin que se vean afectadas por la cuasiperiodicidad. Por otro lado al incrementar el número de celdas provoca una mejor definición de los modos de superficie, de igual forma que ocurre para la polarización TM. También es importante notar como el hecho de limitar la componente compleja del vector de onda, no muestra una reducción considerable en la distancia de penetración, lo cual si se aprecia claramente para TM.

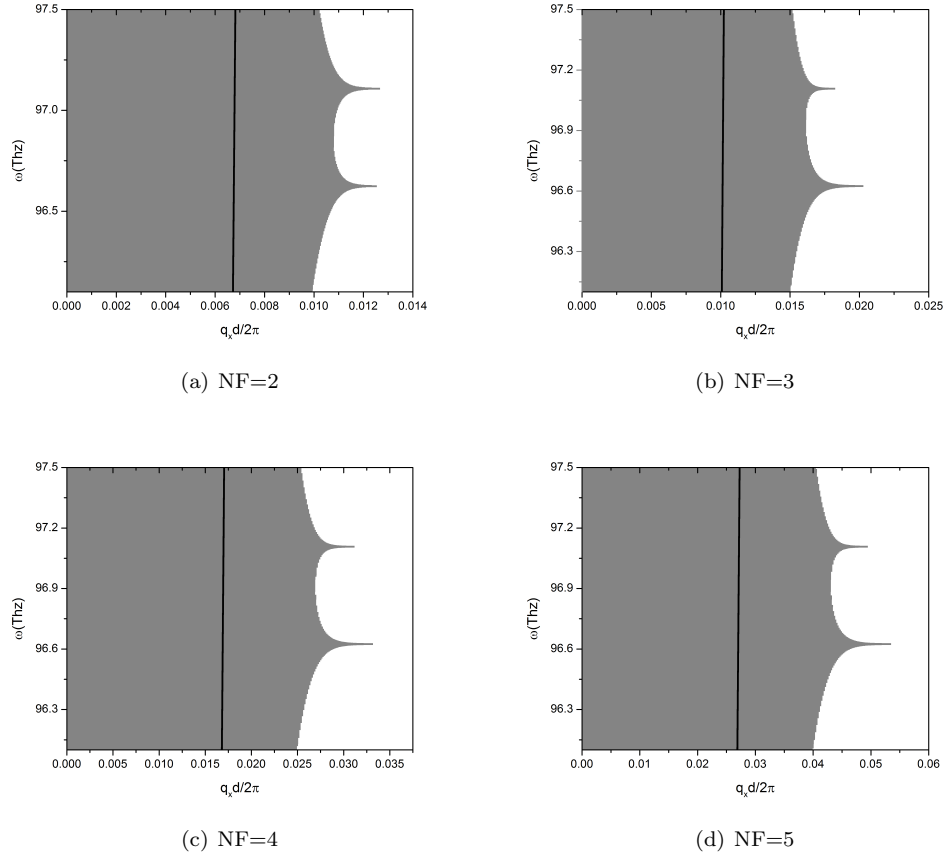


Figura 5.16: Bandas proyectadas para diferentes números de Fibonacci

A manera de ratificar la información proporcionada por las bandas proyectadas, se muestra la reflexión en la figura 5.0.2 para (a) dos frecuencias en las que se aprecian los modos de superficie, es interesante mencionar que la existencia de estos dos modos se encuentra relacionada con el número de potenciales químicos que intervienen en la estructura. En (b) nuevamente se muestran resultados para diferentes números de Fibonacci, que al igual que en los caso anteriores al crecer el número de celdas provoca un mejor definición del mínimo. Para (c) tenemos una variación de γ lo cual nuevamente muestra que al crecer este valor la definición del mínimo se pierde.

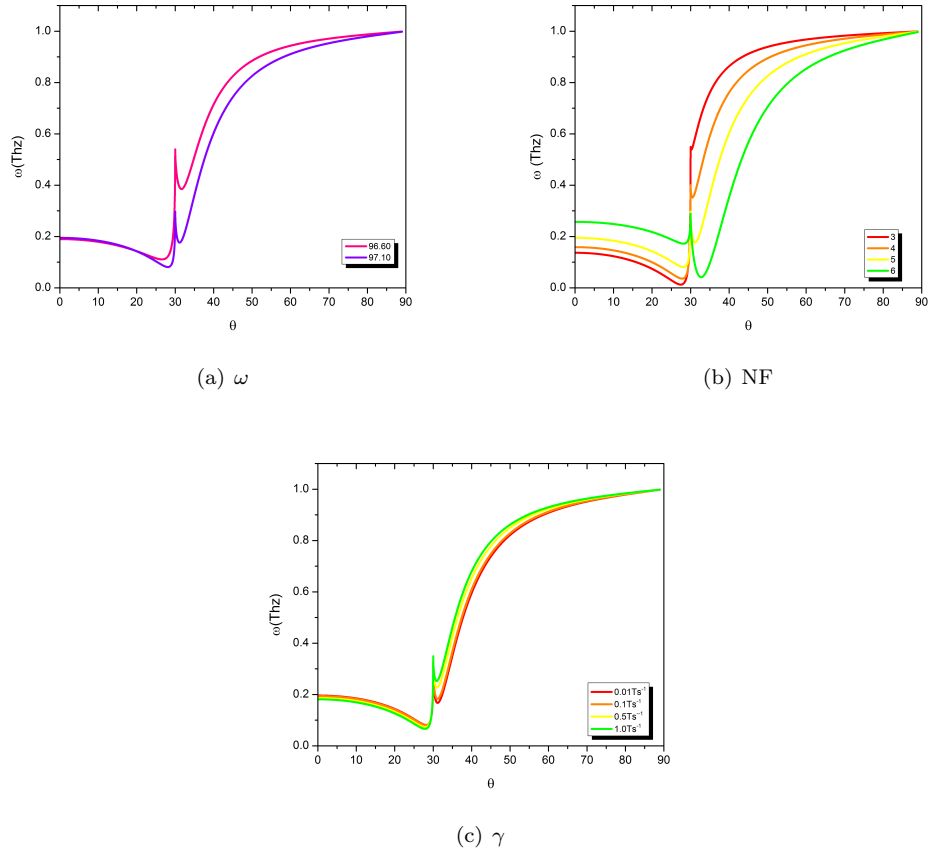


Figura 5.17: Espectros de reflexión para estructuras tipo Fibonacci, en las cuales se han variado la frecuencias, absorción y el número de generación

Estructura Wannier

Debido al hecho de que las bandas proyectadas para la polarización TE en la estructura Fibonacci no sufren un desdoblamiento al crecer el número de capas, como en TM; y en lugar de eso se muestran modos de superficie definidos unicamente por los valores diferentes de μ involucrados; se hace el estudio de estructuras tipo Wannier donde cada una de las capas de grafeno que existen en la celda unitaria tiene un valor diferente del potencial químico, para estas estructuras se observa que cada uno de los valores diferentes del potencial químico involucrado genera modos de propagación accesibles. Lo que provoca que surjan tantos modos superficiales en la banda como μ existentes en la estructura. 5.18

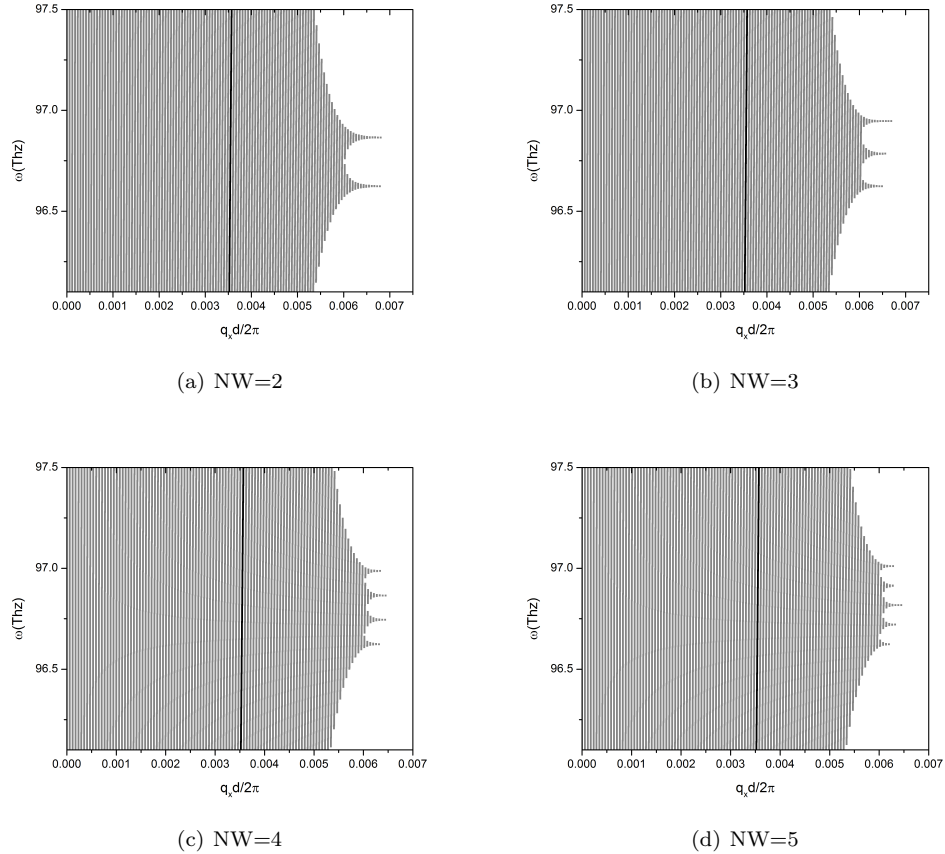


Figura 5.18: Bandas proyectadas para diferentes estructuras tipo Wannier

Al igual que en los casos anteriores se presentan resultados de los espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia de la luz en la figura 5.19 donde se muestran: (a) para dos frecuencias específicas elegidas de acuerdo a las bandas proyectadas de tal manera que existan modos de superficie; se observa que para la frecuencia mayor existe una mejor definición del mínimo, ambos cercanos al ángulo crítico. (b) En esta gráfica se presentan espectros de reflexión para estructuras con diferentes periodos de tal forma que coincida con el número de capas de las curvas obtenidas en las estructuras tipo Fibonacci estudiados anteriormente, se puede notar un ensanchamiento del mínimo que se presenta después del ángulo crítico, esto ocasionado por un traslape de las regiones donde es posible encontrar los modos de superficie. Finalmente se muestran los espectros de reflexión al variar γ , (c) observando como en los otros casos una menor posibilidad de propagación de modos de superficie con el incremento de la absorción.

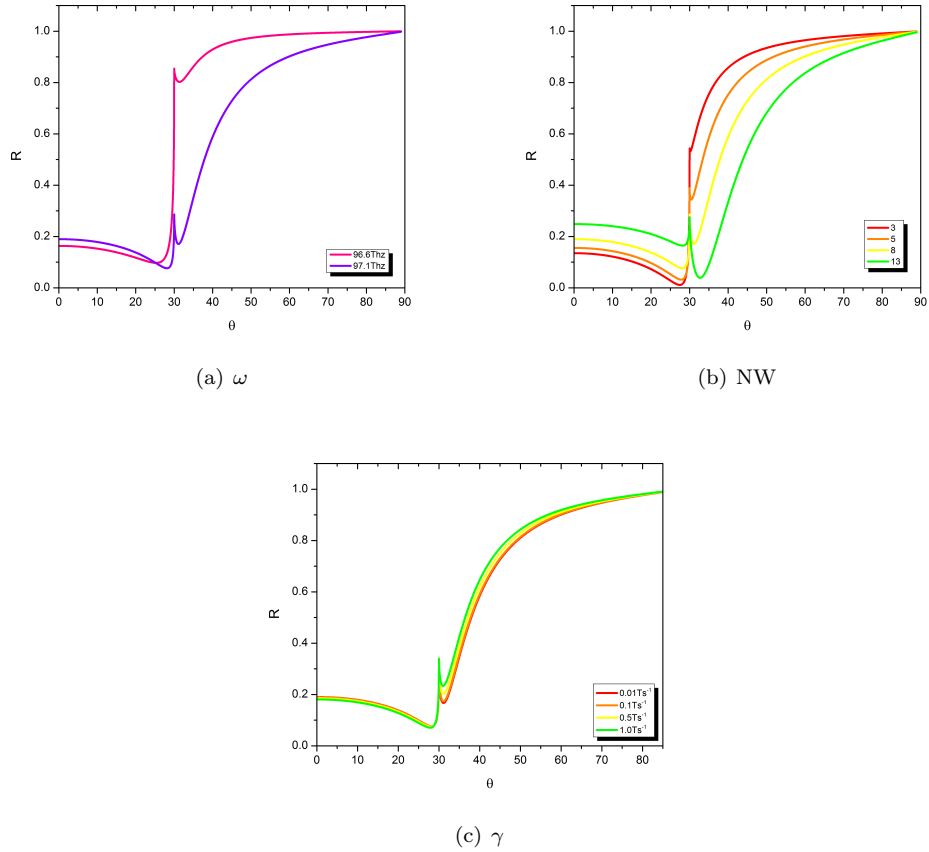


Figura 5.19: Espectros de reflexión para estructuras tipo Fibonacci, en las cuales se han variado la frecuencias, absorción y el número de generación

Respecto a esto resulta interesante la forma en que se puede controlar la existencia de plasmones, pues para el caso Fibonacci aunque la definición de estos es mejor, para el caso Wannier se pueden tener generación múltiple con menor número de celdas. Esto debido a que se tienen diversos valores de la relación de dispersión a los cuales pueden aproximarse los modos de superficie. Algo definitivamente interesante en ambos casos es la ausencia de desdoblamiento en las bandas, el cual como se mencionó anteriormente se debe a que las ondas pueden viajar a través de la estructura sin que éstas sean perturbadas por la cuasiperiodicidad existente.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos hecho un análisis de estructuras cuasiperiódicas construidas de acuerdo a los números de generación de Fibonacci y Wannier Stark donde se alternan capas de dieléctricos con películas de grafeno, para ello ha sido necesario hacer una revisión de las propiedades del grafeno y describir a detalle las relaciones de recurrencia de Fibonacci y Wannier, así como la forma en la que estas secuencias se aplican para la construcción de superredes cuasiperiódicas, el objetivo fue estudiar las características de la estructura de bandas, reflexión de la luz en estas estructuras, para generar y controlar la existencia de plasmones en ellas, de lo cual las contribuciones más relevante son:

En estructuras construidas a base de grafeno es posible observar modos de superficie de naturaleza transversal magnética así como de naturaleza transversal eléctrica, las regiones de frecuencia en donde estos modos son observados están asociados a la parte imaginaria de la conductividad eléctrica del grafeno.

La posibilidad de alcanzar los modos de superficie dependen de la parte imaginaria del vector de Bloch de la estructura, así como del tamaño del periodo.

El hecho de crear una cuasiperiodicidad tipo Fibonacci en el caso de la polarización TM genera un desdoblamiento en las bandas, dicho desdoblamiento se genera siguiendo la misma relación de recurrencia. Esto implica que mientras más grande sea el número de generación de Fibonacci mayor será el desdoblamiento que se observe.

Las bandas proyectadas para la estructura tipo Wannier para polarización TM muestra un comportamiento similar al observado para la estructura tipo Fibonacci, en este caso debido al crecimiento uniforme de los potenciales es posible observar un desdoblamiento más regular en las bandas.

Se demuestra la existencia de modos de superficie en estructuras construidas a base de grafeno para ambas polarizaciones, aunque en un rango frecuencial diferente. Los modos de superficie de origen TE se encuentran más confinados respecto a los plasmones TM, hecho que se concluye de la proximidad que existe entre la línea de luz y la relación de dispersión para la primera polarización mencionada.

Se muestra como al variar el grosor del dieléctrico de las estructuras para ambas polarizaciones proporciona una forma de confinamiento diferente de los modos de superficie.

Al crear una cuasiperiodicidad en el caso de la polarización TE no genera un desdoblamiento

CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES

en las bandas, esto debido a que la separación entre las películas de grafeno es mucho más pequeña que la longitud de onda de las ondas incidentes lo que no permite observar el detalle de la estructura cuasiperiódica y únicamente percibe los valores diferentes de la conductividad debido a valores diferentes de los potenciales químicos.

Pero definitivamente lo más interesante es la capacidad que se tiene de controlar la existencia de plasmones en los diferentes rangos de frecuencia, pues aunque para el caso Fibonacci se muestra que la definición de estos es mejor, para el caso Wannier se tiene generación múltiple con un menor número de celdas.

La profundidad de los picos en las curvas de reflexión en función del ángulo de incidencia es mayor para las estructuras periódicas respecto a las cuasiperiódicas, este hecho es debido a que el acoplamiento en los modos de propagación en las superficies es mejor cuando la separación entre estas se repite periódicamente.

Bibliografía

- [1] John.D Joannopoulos, Robert D. Meade. Joshua N. Winn. *Photonic Crystal-Molding the Flow of Light*, Princeton University Press. Singapore (2008).
- [2] Eli Yablonovitch. *Photonic Crystal-semiconductors of light*, Scientific American, Inc., (2001).
- [3] Francis S. Chaves.(2014). *Flujo de energía reflejado y transmitido en cristales fotónicos unidimensionales*, Facultad de ciencias basicas,10(2),158-167.
- [4] Kittel C., *Física del Estado Solido*, 3er edition, Reverté, (1975).
- [5] Fox Mark, *Optical Properties of Solid*, 1er edition, Oxford, (2001).
- [6] Puente Ramírez N.P.,Carranza Hernández F. y Rodríguez Morales G.,(2014), *Transmisión de Luz en Guías de Ondas con Estructuras Intrínsecas al Núcleo* , Ingenierias,7(64),31-7.
- [7] Markos P. y Soukoulis M. C., *Wave Propagation*, Princeton and Oxford ,(2008).
- [8] J. David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3er edition, Addison Wesley,(1999).
- [9] Paredes I.(2016) *Estudio de propiedades opticas en cuasicristales que contienen metamateriales*. (tesis de pregrado)., BUAP, Puebla, México.
- [10] Hech E., *Optics.*, Addison-Wesley, 4ta edition,(2002).
- [11] K. Sakoda., *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer 2ed.(1999)
- [12] Bindi, L.; Steinhardt, P. J.; Yao, N.; Lu, P. J. *Natural Quasicrystals*, Science.(2009).
- [13] Argüelles Delgado A.,(2011) *Quasicrystals and geometry*, Revista de Química PUCP,25(1),18-22
- [14] Senechal M., *Los cuasicristales: un premio Nobel a la perseverancia*,Cambridge University Press, Cambridge,(1995)
- [15] Stadnik M., *Physical properties of quasicrystals*, Springer, (1999)
- [16] Pochi Yeh, (2005), *Optical waves in Layered Media*, Wiley.
- [17] González Zacarías C., Palomino Ovando M.A y Cicoletzi G., *Los números de Fibonacci en la naturaleza y los sistemas nanoestructurados artificiales*, Mundonano, revista interdisciplinaria en nanociencia y tecnología, 3(1),15-22.

- [18] Young Kim K. *Plasmonics: Principles and Applications*, InTech,(2012).
bitemb2 García LLamas R., Acuña Gastélum S.L y Duverger Ramírez A.,(2015) *Plasmónica*, Epistemus,18,78-83.
- [19] Stefan A. M., *Plasmonics: Fundamentals and Applications*, Springer,(2007).
- [20] Shahbazyan T. V. y Stockman M. I. *Plasmonics: Theory and Applications*, Springer,(2013).
- [21] Jung J. *Plasmonic Waveguides, Resonators, and Superlenses*, Department of Physics and Nanotechnology, Aalborg University, Denmark, (2009).
- [22] Sarid D. y Challener W. *Modern Introduction to Surface Plasmons*, 3er edition, Reverté, (1975).
bitemb7 Garcia Vidal F.J y Martín Moreno L.,(2008) *Plasmones Superficiales*, Investigación y Ciencia,66-76.
- [23] Gorbach A.V.(2013) *Nonlinear Graphene Plasmonics: Amplitude equation for surface plasmons*, Physical Review, 87(1),1830(7).
bitemb9 Ooi K., Okada T. y Tanaka K.,(2011) *Mimicking electromagnetically induced transparency by spoof surface plasmons*, Physical Review B,84 (11),115405(11).
- [24] Iijima S.,(1991) *Helical microtubules of graphitic carbon*, Nature, 354(96).
- [25] Guinea F.,(2005) *El grafeno y sus propiedades especiales*, Grupo Español del Carbón, 19(3),2-8.
- [26] Novoselov K.S., Jiang D., Schedin F., Booth T.J., Khotkevich V.V., Morozov S.V. y Geim A.K.,(2005) *Two-dimensional atomic crystals*, PNAS, 102(30),10451-10453.
- [27] Novoselov K.S., Geim A.K.,Morozov S.V.,Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V. y Firsov A.A.(2004) *Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films*, science, 306,666-669.
- [28] Madani A. y Entezar Roshan S.,(2013) *Optical propiedades of one-dimensional photonic crystal containing graphene sheets*, Physica B, 431,1-5.
- [29] Changuu L., Xiaoding W., Kysar J. W. y Hone J. (2008) *Measurement of the Elastic Propierties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene*, Science, 321,385-388)
- [30] Changuu L., Xiaoding W., Kysar J. W. y Hone J. (2008) *Measurement of the Elastic Propierties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene*, Science, 321,385-388).
- [31] Wallace P.R.,(1946) *The Band Theory of Graphite*, Physical Review, 71(9),622-634.
- [32] Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R., Novoselov K.S. y Geim A.K.,(2009) *The electronic properties of graphene*, Reviews of Modern Physics, 81 (1),109-162.
- [33] Gan How C.,(2012) *Analysis of surface plasmon excitation at terahertz frequencies with highly doped graphene sheets via attenuated total reflection*, Applied Physics Letters, 101(11),11609-4
- [34] Hernández López A.(2016) *Estudio de propiedades ópticas en estructuras periódicas construidas a base de Grafeno*. (tesis de pregrado)., BUAP, Puebla, México
- [35] Bae S.(2010) *et al.*,Nat. Nanotechnol.5,574-578.

- [36] Matyba P.(2010) *et al.*, Nano Lett. 4,637-642.
- [37] Blake P.(2008) *et al.*, Nano Lett. 8,1704-1708.
- [38] Ramos Mendiera F.,(2015) *Mid-infrared Otto excitation of transverse electric modes in doped graphene*, Journal of Applied Physics, 117(13),133101(5).
- [39] Hajian H., Soltani-Vala A. y Kalafi M.(2013) *Characteristics of band structure and surface plasmons supported by a one-dimensional graphene-dielectric photonic crystal*, Optics Communications, 292,149-157.
- [40] Ramos Mendieta F., Hernández López A. Y Palomino Ovando M.,(2014) *Transverse magnetic surface plasmons and complete absorption supported by doped graphene in Otto configuration*, AIP Advances, 4(6),1067125-13.
- [41] Wang B., Zhang X., Garcia Vidal F.J, Yuan X. y Teng J.,(2012) *Strong Coupling of Surface Plasmon Polaritons in Monolayer Graphene Sheet Arrays*, Physics Review Letters, 109(7),073901-5.