Introducción a las Matemáticas

Introducción

Las matemáticas se caracterizan por utilizar símbolos y convenciones para representar cantidades y operaciones con cantidades. El uso de la simbología en matemáticas permite que la información sea concisa, clara y universal.

Ejemplos de simbología o lenguaje algebraico es el uso de los exponentes y radicales.

Para poder utilizar adecuadamente las propiedades de los exponentes y radicales es necesario tener un conocimiento acerca de los números reales.

Números Reales

Así como estamos acostumbrados a respirar, ver el sol, la luna y las estrellas cada día, y quizá por ello ya no apreciamos su importancia y su grandeza, del mismo modo reaccionamos ante nuestro sistema de números reales. El sistema de los números reales merece toda nuestra atención, no sólo porque es base de las matemáticas, sino también porque contiene ideas significativas que dan pie a interesantes aplicaciones. Los distintos tipos de números que existen se inventaron para satisfacer ciertas necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para representar deudas o la temperatura ambiente en lugares muy fríos, los números racionales los ocupamos en acciones cotidianas como por ejemplo pedir "medio kilo de jitomates" en el super, y los números irracionales para calcular el perímetro o el área de un círculo. Es por ello que daremos un recorrido a través del sistema de los números reales.

Los primeros números que aparecieron fueron los números naturales los cuales son utilizados para contar y siempre están ligados a objetos. Los números naturales están representados por el siguiente conjunto:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

GIF

La cantidad de números naturales que existen es infinita ya que, si n representa un número natural cualquiera, n+1 es un número natural mayor a él. Las operaciones bien definidas entre ellos son la adición (suma) y el producto (multiplicación). Esto es, si n y m representan números naturales, entonces n+m y nm también son números naturales.

Cuando el sistema numérico incluye al cero y a los negativos, se constituye al conjunto de los números enteros. Su representación está dada por:

$$Z = \{\ldots, \ -3, \ -2, \ -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

GIF

En este conjunto ya están bien definidas las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Observación: los números naturales forman parte de los números enteros.

Cuando el sistema de numeración aparece la operación división, surgen los números racionales, los cuales están formados por cocientes de números enteros. Su representación está dada por:

$$Q = \{pq : p, q \in Zyq \neq 0\}$$

GIF

Por la forma en como son representados los números racionales, se puede observar que la división entre 0 es imposible, por lo que las expresiones como 5/0 y 0/0 NO están definidas.

En este conjunto ya están bien definidas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Observación: Dado que cualquier número entero n se puede representar de la forma n/1, se puede concluir que cualquier número entero (y en particular, cualquier número natural) es un número racional.

Una forma de identificar a los números racionales es a través de su expresión decimal. Si dicho número tiene expresión decimal finita o infinita pero periódica, entonces es un número racional.

Por ejemplo:

$\frac{1}{3} = 0.333... = 0.\overline{3}$ (expresión decimal infinita y periódica)

$\frac{1}{4} = 0.25$ (expresión decimal finita)

son ejemplos de números racionales.

Cuando la expresión decimal de un número no pertenece a ninguno de los tipos mencionados, esto es, cuando su expresión decimal es infinita y no periódica, el número correspondiente no es racional. A este tipo de números les llamaremos números irracionales. Su representación es con la

Processing math: 100% úmeros irracionales son: $\sqrt{2},\ \pi,\ e,\ \sqrt{5}$

Cuando se unen Los números racionales e irracionales, se obtiene el sistema de números reales, representado por:

$$R = Q \cup I$$

GIF

En este conjunto, las operaciones de adición, sustracción, producto y división están bien definidas.

Te recomendamos ver el siguiente vídeo.

Historia de los números reales

https://www.youtube.com/embed/UEUaBm8ZSmM

CEC-iaen. *¿Cuáles son los números reales?* (CC BY)

Processing math: 100%

Axiomas de campo de los números reales

Con todo lo anterior aceptamos la existencia del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, junto con las siguientes propiedades:

- En $\mathbb{R}$ se tienen dos operaciones binarias, a saber, suma "+" y producto "$\cdot$".
- Para cualesquiera números reales x e y , se satisfacen las siguientes propiedades:
  x+y es un número real.
  xy es un número real.
  A estas propiedades se le conoce como la *propiedades de cerradura* para la suma y el producto.

En los números reales existe una relación de igualdad "=" que cumple las siguientes propiedades. Para cualesquiera números reales , se tiene:

a=a	Propiedad reflexiva
Si a=b, entonces b=a	Propiedad simétrica
Si a=b y b=c, entonces a=c	Propiedad transitiva
Si a=b, entonces • a+c=b+c • ac=bc	Propiedades de consistencia de la suma y el producto.

Se sabe que 2+6=6+2, 3(5+2) = 3(5)+(2), $2(\frac{1}{2})$ y que (3+5)+8=3+(5+8), y así sucesivamente. Estas propiedades de los números reales están sustentadas en lo que se le conoce como **Axiomas de Campo**. Estos axiomas (proposiciones que NO requieren demostración) nos ayudan a entender el

Processing math: 100% e las matemáticas de los números.

Si a, b, c son números reales cualesquiera, se tienen los siguientes axiomas de los números reales:

Axiomas de los números reales	
a+b=b+a ab=ba	Propiedad Conmutativa
(a+b)+c=a+(b+c) (ab)c=a(bc)	Propiedad asociativa
a(b+c)=ab+ac (b+c)a=ba+ca	Propiedad distributiva
Existe un único 0 tal que: a+0=0+a=a	Existencia del neutro aditivo
Existe un único 1 tal que: • $1 \neq 0$ • 1a=a	Existencia del neutro multiplicativo
Para cada a existe un único número real -a tal que: a+(-a)=0	Inverso aditivo
Si $a \neq 0$, entonces existe un único número real a^{-1} tal que: $a \cdot a^{-1} = 1$ NOTA: Se puede escribir $\frac{1}{a}$ en lugar de a^{-1}, y también $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$	Inverso multiplicativo

Processing math: 100%

La sustracción es la operación inversa de la adición; para restar un número de otro simplemente sumamos el inverso aditivo de ese número. Esto es,

$$a - b = a + (- b)$$

GIF

Algunas propiedades que podemos mencionar de los números con signo negativo son:

- (-1)a=-a
- -(-a)=a
- (-a)b=a(-b)=-(ab)
- (-a)(-b)=ab
- -(a+b)=-a-b
- -(a-b)=b-a

En la propiedad del inverso aditivo, NO debemos de suponer que -a es un número negativo. Esto ya que depende del valor de a. Por ejemplo: si a=5, entonces , -a=-5, pero si a=-5, entonces -a=-(-5)=5 que resulta ser un número positivo.

La operación **división** es la operación inversa de la multiplicación; para dividir un número multiplicamos por el inverso de ese número. Así, si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot \frac{1}{b}$ simplemente como $\frac{a}{b}$. Al valor de a se le conoce como el numerador y el valor de b se le conoce como el denominador. A continuación, se presentan algunas propiedades que cumplen las fracciones.

- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$

Processing math: 100%

Processing math: 100%

Exponentes

Un exponente entero positivo indica cuantas veces el factor, llamado *base*, se multiplicará por sí mismo. El concepto es muy útil para expresar grandes cantidades de manera corta. El resultado obtenido de elevar la base a un exponente se le llama *potencia*. De manera simbólica para representar a una potencia es la siguiente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\boxed{n \text{ veces}}}$$

Ejemplos: Con la notación anterior tenemos:

- $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$
- $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$
- $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$
- $\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi = \pi^7$

Para realizar operaciones con potencias deberán seguirse ciertas leyes. Para ello, sean a y b números reales m y n números enteros, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplos
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(8^4)^5 = 8^{4(5)} = 8^{20}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(4 \cdot 6)^3 = 4^3 \cdot 6^3$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{-2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5}$

A continuación se presentan otras dos leyes que serán de utilidad para simplificar expresiones con exponentes negativos.

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$8^{-6} = \frac{1}{8^6}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{5}{7}\right)^{-6} = \frac{7^6}{5^6}$
8. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m}$	$\frac{8^{-3}}{5^{-4}} = \frac{5^4}{8^3}$

Para el caso en el que exponente sea 0 se tiene lo siguiente:

Si a≠0 es un número real, entonces

$$a^0 = 1$$

GIF

Ejemplos:

I. Evaluar cada una de las siguientes expresiones:

1. $-5^4 = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = -625$
2. $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot = 625$

Processing math: 100%

3. $(-80)^0 = 1$

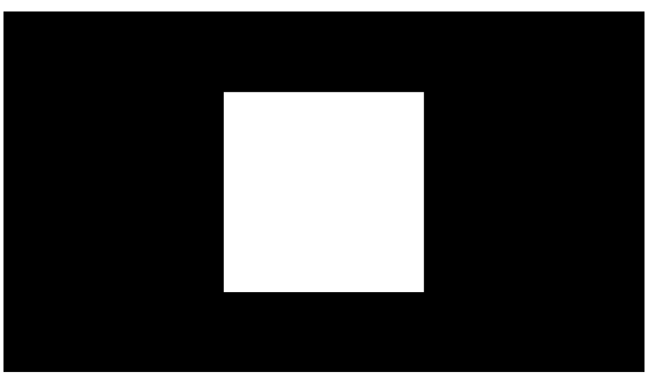
4. $\frac{-6^3}{6^3} = -\frac{6^3}{6^3} = -(6^0) = -1$

II. Aplica las leyes de los exponentes y expresa los resultados sin exponentes negativos.

a) $(2a^4)(3a^3) = 6a^{4+3} = 6a^7$	• Ley asociativa y conmutativa de los números reales. • Ley $a^n a^m = a^{n+m}$
b) $x^4x^{-11} = x^{4+(-11)} = x^{-7} = \frac{1}{x^7}$	• Ley $a^n a^m = a^{n+m}$ • Ley $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
c) $\frac{z^6}{z^4} = z^{6-4} = z^2$	• Ley $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
d) $(y^2)^4 = y^{2(4)} = y^8$	• Ley $(a^n)^m = a^{nm}$
e) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{x}\right)^3 = \frac{3^3}{x^3} = \frac{27}{x^3}$	• Ley $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

A continuación se presentan dos vídeos en los que se dan solución a dos problemas en los que se hace uso de las leyes de los exponentes.

Exponentes

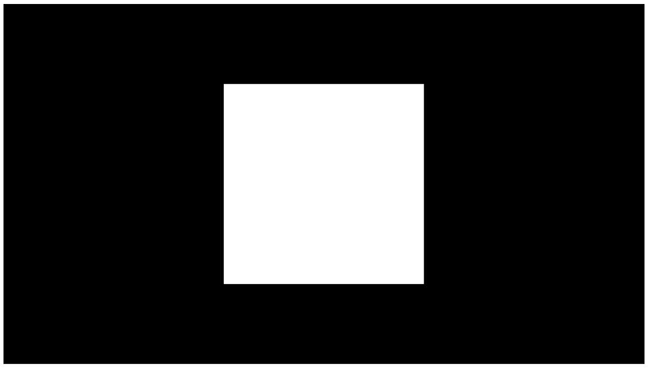


00:00 02:24

Héctor David Ramírez Hernández.

Exponentes ejemplo 1 (CC BY)

Processing math: 100%



00:00 03:13

Héctor David Ramírez Hernández.
Exponentes ejemplo 2 (CC BY)

Pregunta Verdadero-Falso

Contesta con Falso o Verdadero según corresponda.

La simplificación de la siguiente expresión

$$(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}x^2y$$

GIF

sin exponentes negativos es

$$x^2y$$

GIF

○ Verdadero ○ Falso

Falso

$\frac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y} = \frac{(x^2)^4(y^3)^4\left[x^{-3}(y^4)^{-3}\right]}{x^2y}$	Ley $(ab)^n = a^n b^n$
$= \frac{x^8y^{12}x^{-3}y^{-12}}{x^2y}$	Ley $(a^n)^m = a^{nm}$
$= \frac{x^8y^{12}}{(x^2y)(x^3y^{12})}$	Ley $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$= \frac{x^8y^{12}}{x^5y^{13}}$	Ley $a^n a^m = a^{n+m}$
$= x^{8-5}y^{12-13}$	Ley $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$= x^3y^{-1}$	Simplificación
$= \frac{x^3}{y}$	Ley $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

La simplificación de la siguiente expresión

$$(2x^3y^{-1})(\tfrac{1}{4}x^6)(16y^4)$$

sin exponentes negativos es

$$8x^9y^3$$

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

$(2x^3y^{-1})\left(\frac{1}{4}x^6\right)(16y^4) = [2\left(\frac{1}{4}\right)16](x^3x^6)(y^{-1}y^4)$	Ley asociativa y conmutativa de los números reales.
$= \frac{32}{4}x^9y^3$	Ley $a^n a^m = a^{n+m}$
$= 8x^9y^3$	Simplificación

Processing math: 100%

Radicales

Hemos visto el significado de a^n con n un número entero. Para dar el significado de $a^{\frac{n}{m}}$, cuyo exponente es un número racional, necesitaremos analizar a los radicales.

Definición: Si n es un entero positivo, entonces la raíz n-ésima principal de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a.$$

Si n es par, se debe de considerar que a≥0 y b≥0.

Ejemplos	Justificación
$\sqrt[6]{64} = 2$	$2^6 = 64\ ,\ 64 \geq 0$ y $2 \geq 0$
$\sqrt[7]{-128} = -2$	$(-2)^7 = -32$

Observaciones:

1. $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
2. $\sqrt{-3},\ \sqrt[4]{-15},\ \sqrt[6]{-8}$ no están definidos.
3. $\sqrt{8^2} = \sqrt{64} = 8$, pero $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$. Así, $\sqrt{a^2} = a$ se cumple siempre y cuando $a \geq 0$.

Algunas propiedades que cumplen las raíces n-ésimas se enlistan en la siguiente tabla.

Propiedades de las raíces n-ésimas	
Propiedades	Ejemplos
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-64(27)} = \sqrt[3]{-64}\sqrt[3]{27} = -4(3) = -12$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{256}{81}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{4}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-4)^4} = \lvert -4 \rvert = 4$

Processing math: 100% tenemos la siguiente definición.

Definición: Para cualquier exponente racional m/n, donde m y n son enteros y n>0, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Si n es par es necesario considerar que a≥0.

Con esta definición, todas las leyes de los exponentes son válidas para los exponentes racionales.

Ejemplo: Utiliza las leyes de los exponentes y radicales para simplificar las siguientes expresiones.

$$a)\ a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{7}{3}}$$

$$b)\ \frac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}}{x^2} = \frac{x^{\frac{6}{2}}}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$$

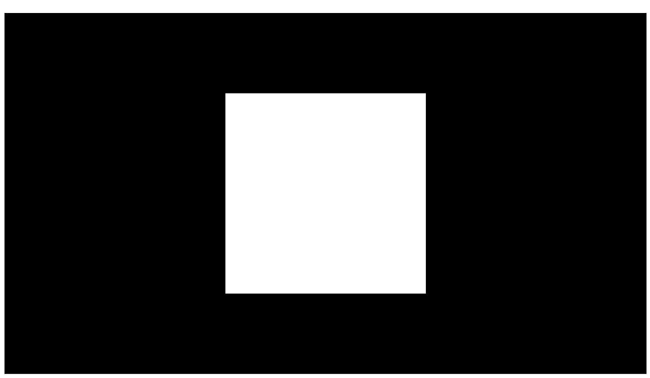
$$c)\ \left(\frac{2a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^3\left(\frac{b^4}{a^{-\frac{1}{2}}}\right) = \frac{2^3\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3}{\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}\left(b^4a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{8a^{\frac{9}{4}}}{b}\left(b^4a^{\frac{1}{2}}\right) = 8a^{\frac{11}{4}}b^3$$

$$d)\ \sqrt{98}+\sqrt{800} = \sqrt{49(2)}+\sqrt{400(2)} = \sqrt{49}\sqrt{2}+\sqrt{400}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}+20\sqrt{2} = 27\sqrt{2}$$

$$e)\ \sqrt{625b}-\sqrt{b^7} = \sqrt{625}\sqrt{b}-\sqrt{b^6}\sqrt{b} = 25\sqrt{b}-b^3\sqrt{b} = (25-b^3)\sqrt{b}$$

Los siguientes vídeos muestran el uso de las propiedades de los radicales.

Radicales



00:00 03:30

Héctor David Ramírez Hernández. *Ejemplo de radicales 1* (CC BY)

Radicales

00:00 04:25

Héctor David Ramírez Hernández. *Ejemplo de radicales 2* (CC BY)

Repasemos lo aprendido

Pregunta de Elección Múltiple

La simplificación de la siguiente expresión

$$(5ax^3)(-x^2y)(4a^4y)$$

es:

- ○ $5ax^5y$
- ○ $-5a^5x^5y$
- ○ $20a^5x^5y^2$
- ○ $-20a^5x^5y^2$

Incorrecto

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Processing math: 100%

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

En la igualdad $4^n+4^n+4^n+4^n=2^{44}$, el valor de n es:

- 11
- 21
- 22
- 23

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Processing math: 100%

Si una colonia de bacterias se duplica cada 20 minutos e inicialmente hay 8000 de ellas, el número de bacterias que hay al término de tres horas es.

- ○ $(8000)2^3$ bacterias
- ○ $(8000)2^4$ bacterias
- ○ $(8000)2^6$ bacterias
- ○ $(8000)2^9$ bacterias

Incorrecto

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

Una expresión equivalente a $\sqrt[3]{54}$ es:

- ○ $2\sqrt[3]{3}$

Processing math: 100%

- $2\sqrt{3}$
- $3\sqrt{2}$

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

La forma más simple de $\frac{\sqrt[3]{16x^7}}{\sqrt[3]{2x}}$ es:

- $2x^2$
- $3x^2$
- $4x^2$
- $5x^2$

Processing math: 100%

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Al simplificar la expresión $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ resulta:

- $2+\sqrt{14}$
- $2+\sqrt{2}$
- $2\sqrt{7}+\sqrt{2}$
- 4

Incorrecto

Processing math: 100%

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Processing math: 100%

Processing math: 100%