Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Estudio de relaciones entre primeras integrales de sistemas integrables

Tesis que se presenta como requisito final para obtener el titulo de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Autor: Licenciado Rafael Leonardo Azuaje Hidalgo
Director de tesis: Doctor Gerardo Torres del Castillo

Puebla, Puebla, diciembre 2017

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

RAFAEL LEONARDO AZUAJE HIDALGO

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de noviembre de 2017, con la tesis titulada:

Estudio de relaciones entre primeras integrales de sistemas integrables

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E
H. Puebla de Z. a 29 de noviembre de 2017

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Ccp.Archivo.
DRA. LAHR/mtrv

Dedicatoria

A mi madre.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mi familia, a mis hermanos, a mis padres, por su apoyo. Especialmente a mi madre por todo el amor que me ha dado, por guiarme y apoyarme.

A mi asesor gracias por guiarme en lo académico para lograr este objetivo.

Agradezco al CONACYT por su apoyo económico, el cual me permitió dedicarme a estudiar sin preocuparme por mi economía, lo que contribuyó a que lograra el objetivo a tiempo. También agradezco al cuerpo académico de análisis matemático de la FCFM BUAP, particularmente al Dr. Djordjević Slavisa, por apoyarme económicamente en los primeros meses de mi maestría.

A Anel le agradezco su apoyo y compañía, gracias a ella no he estado solo en esta ciudad.

A todos los que de alguna manera contribuyeron a este logro, gracias.

Introducción

En el estudio de la mecánica clásica aparecen sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan la evolución temporal de sistemas mecánicos. La formulación en el lenguaje de la geometría diferencial de estos sistemas mecánicos son los sistemas hamiltonianos. Para algunos de estos sistemas es posible hallar un número suficientemente grande de integrales de movimiento, de tal manera que la solución general del sistema se tiene esencialmente. Tales sistemas se llaman sistemas integrables. En algunos casos es posible, además, hallar relaciones diferenciales entre primeras integrales, aunque los resultados obtenidos hasta ahora se restringen usualmente a sistemas hamiltonianos autónomos, es decir, sistemas donde las funciones implicadas no dependen explicitamente del tiempo.

En este trabajo presentamos extensiones para el caso de sistemas hamiltonianos donde las funciones implicadas pueden depender explicitamente del tiempo, de algunos resultados establecidos para sistemas hamiltonianos autónomos.

Comenzamos introduciendo las nociones básicas de la geometría simpléctica en el capítulo 1 , ya que ésta es el lenguaje natural en el que se presentan los sistemas hamiltonianos. Luego, en el capítulo 2, presentamos la teoría básica de los sistemas hamiltonianos, incluyendo la dependencia en el tiempo y definiendo los elementos necesarios para presentar el punto central y de importancia de esta tesis. En el capítulo 3, llegamos a integrabilidad de un sistema hamiltoniano, presentamos el Teorema de Liouville y damos una demostración. Finalmente, y como objetivo principal de esta tesis, en el capitulo 4 presentamos algunas relaciones entre primeras integrales de sistemas hamiltonianos, los resultados presentados aquí son extensiones al caso dependiente del tiempo de trabajos presentados principalmente en las referencias [1], [2] y [4].

Por la naturaleza del tema de estudio, para la lectura de este trabajo, se requieren conocimientos de los objetos básicos de la geometría diferencial, tales como variedades diferenciales, campos vectoriales, tensores, la derivada de Lie, curvas integrales, entre otros. Estos temas se pueden ver en [6], [9] o [3].

Índice general

Capítulo 1

Geometría simpléctica

En este capítulo damos algunas nociones básicas de la geometría simpléctica, ésta juega un papel muy importante en matemática y física, particularmente, la geometría simpléctica es el lenguaje natural en el que se presentan los sistemas hamiltonianos.

Comenzamos con algunas nociones de álgebra lineal.

Definición 1.1. *Un 2-tensor ω en un espacio vectorial real V se dice no degenerado si se tiene:*

$$\omega(u, v) = 0 \ \ \forall v \in V \Longrightarrow u = 0.$$

Proposición 1.1. *Son equivalentes:*

1. *ω es no degenerado.*
2. *La matriz (ω_{ij}) de representación de ω en cualquier base de V es no singular.*
3. *La transformación lineal $\overline{\omega} : V \longrightarrow V^*$ definida por*

$$\omega(u)(v) = w(u, v)$$

en invertible.

La demostración de esta proposición es elemental, el hecho de que $\omega(u, v) = 0 \ \ \forall v \in V \Longrightarrow u = 0$ es equivalente a que el núcleo de la transformación lineal $\overline{\omega}$ es el subespacio nulo, esto es, $\overline{\omega}$ es inyectiva y como las dimensiones de V y V^* son las mismas entonces $\overline{\omega}$ es un isomorfismo lineal. Así se ve que 1 y 2 son equivalentes, para ver que 2 y 3 son equivalentes simplemente consideremos cualquier base $e_1, ...e_n$ de V y su base dual $\epsilon^1, ...\epsilon^n$ luego la matriz (ω_{ij}) de representación de ω en la base $e_1, ...e_n$ de V es la representación matricial de $\overline{\omega}$ en las bases $e_1, ...e_n$ de V y $\epsilon^1, ...\epsilon^n$ de V^*.

Definición 1.2. *Un 2-tensor antisimétrico y no degenerado se llama tensor simpléctico.*

A continuación veremos que todo tensor simpléctico tiene una forma canónica muy agradable.

Teorema 1.1. ***Forma canónica de un tensor simpléctico.*** *Si ω es un tensor simpléctico en un espacio vectorial V entonces V tiene dimensión par $2n$ y existe una base $\{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n\}$ de V tal que*

$$\omega = \Sigma_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i,$$

donde $\{\alpha^1, ..., \alpha^n, \beta^1, ..., \beta^n\}$ es la base dual de $\{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n\}$.

Para una demostración de este teorema ver [6].

Ahora estamos listos para pasar a variedades diferenciales.

Definición 1.3. *Una forma simpléctica en una variedad diferencial M, es una 2-forma diferencial cerrada ω tal que para cada $p \in M$ se tiene que ω_p es un tensor simpléctico en T_pM.*

El par (M, ω) se llama variedad simpléctica.

Definición 1.4. *Sean (M, ω) y (N, ρ) variedades simplécticas. Un mapeo diferenciable $F : M \longrightarrow N$ se dice simpléctico si $F^*\rho = \omega$. Si además F es un difeomorfismo entonces F se dice simplectomorfismo.*

Proposición 1.2. *Todo mapeo simpléctico es una inmersión.*

La demostración de esta proposición se ve de manera sencilla. Sean (M, ω) y (N, ρ) variedades simplécticas y $F : M \longrightarrow N$ un mapeo simpléctico. Veamos que para cada $p \in M$ el mapeo lineal $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es inyectivo, en efecto, sea $v \in T_pM$ tal que $F_*(v) = 0$, luego para todo $u \in T_pM$ tenemos

$$\omega_p(v, u) = (F^*\rho)_p(v, u) = \rho_{F(p))}(F_*(v), F_*(u)) = \rho_{F(p))}(0, F_*(u)) = 0,$$

como ω es no degenerada entonces $v = 0$, así concluimos que F_* es inyectiva y por lo tanto F es una inmersión.

El siguiente teorema es fundamental en la geometría simpléctica, es un análogo no lineal del teorema de la forma canónica de un tensor simpléctico.

Teorema 1.2. ***Teorema de Darboux.*** *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, para cada punto $p \in M$ existen coordenadas locales $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ tales que*

$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Aquí hemos usado el convenio de suma de Einstein y lo usaremos de ahora en adelante.

Éstas coordenadas se llaman canónicas o coordenadas de Darboux.

Para una demostración de este teorema ver [6] o [3].

Para finalizar este capitulo, presentamos un ejemplo muy importante (posiblemente el más importante) de variedad simpléctica, a saber, el fibrado cotangente.

Ejemplo 1.1. ***El fibrado cotangente.*** *Sea M una variedad diferencial de dimensión n. Sabemos que el conjunto $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ tiene estructura de variedad diferencial de dimensión $2n$, la cual viene dada por:*

Si $(x^1, ..., x^n)$ son coordenadas locales en M entonces para cada $p \in M$ el el dominio de las coordenadas anteriores, tenemos que

$$\alpha_p = p_i(\alpha_p) dx^i|_p$$

para cada $\alpha_p \in T_p^*M$. Definimos

$$q^i(\alpha_p) = x_i(\pi(\alpha_p)) = (x_i \circ \pi)(\alpha_p),$$

donde $\pi : T^*M \longrightarrow M$ está definido por $\pi(\alpha_p) = p$, luego $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ son coordenadas locales en T^*M.

Ademas T^*M es un fibrado vectorial sobre M con mapeo proyección π, llamado el fibrado cotangente de M.

Para más detalles ver [6].

Sabemos que $\alpha_p \circ \pi_*|_{\alpha_p} \in T_{\alpha_p}^*(T^*M)$.

Definimos el campo de 1-covectores θ en T^*M por

$$\theta_{\alpha_p} = \alpha_p \circ \pi_*|_{\alpha_p},$$

en coordenadas locales $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ se ve que

$$\theta_{\alpha_p} = p_i(\alpha_p) dq^i|_{\alpha_p},$$

esto es

$$\theta = p_i dq^i,$$

luego θ es una 1-forma diferencial en T^*M, la cual llamamos la 1-forma fundamental en T^*M.

Ahora definimos

$$\omega = d\theta = dp_i \wedge dq^i,$$

ω es la 2-forma simpléctica canónica o fundamental en T^*M.

Para más detalles ver [9].

Capítulo 2

Sistemas hamiltonianos

En este capítulo presentamos la teoría básica de los sistemas hamiltonianos.

En la mayoría de los textos sobre sistemas hamiltonianos, se trata solo el caso en el que la funciones implicadas no dependen explicitamente del tiempo, éstos son llamados sistemas hamiltonianos autónomos. Ver [9], [11], [3], entre otros.

Presentamos la teoría general, donde las funciones implicadas pueden depender explicitamente del tiempo, haciendo los comentarios adecuados respecto a los sistemas autónomos.

Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $H \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$. Sea t la coordenada global en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. *Definimos la 2-forma Ω en $\mathbb{R} \times M$ por*

$$\Omega = \omega - dH \wedge dt.$$

La terna $(\mathbb{R} \times M, \Omega, H)$ es un sistema hamiltoniano.

Sean (q^i, p_i) coordenadas canónicas en M, luego Ω tiene la forma coordenada

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt.$$

Tenemos que existe un único campo vectorial X_H en $\mathbb{R} \times M$ tal que $X_H(t) = 1$ y $X_H \lrcorner \Omega = 0$, en efecto, supongamos que existe $X_H = A_i \dfrac{\partial}{\partial p_i} + B^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + C \dfrac{\partial}{\partial t}$ campo vectorial que satisface las condiciones anteriores,

$$X_H(t) = 1 \Longrightarrow C = 1$$

y

$$X_H \lrcorner \Omega = 0 \Longrightarrow (X_H \lrcorner \Omega)(\frac{\partial}{\partial x}) = 0,$$

donde x puede ser cualquiera de las coordenadas (q^i, p_i), veamos qué pasa si $x = q^j$ para algún $j \in \{1, ..., n\}$,

$$
\begin{aligned}
(X_H \lrcorner \Omega)(\frac{\partial}{\partial q^j}) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \omega(X_H, \frac{\partial}{\partial q^j}) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt)(X_H, \frac{\partial}{\partial q^j}) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} A_i & B^i \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} A_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + B^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} & 1 \\ \frac{\partial H}{\partial q^j} & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad A_j + \frac{\partial H}{\partial q^j} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad A_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}.
\end{aligned}
$$

De manera análoga evaluando en $\frac{\partial}{\partial p_j}$ se obtiene que $B^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$.

Así que

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

y está garantizada la existencia y unicidad.

El campo vectorial X_H se llama campo vectorial hamiltoniano asociado a H.

Las curvas integrales de X_H vienen dadas por $\gamma(s) = (t(s), q^i(s), p_i(s))$ donde

$$\dot{t}(s) = 1,$$

$$\dot{q}^i(s) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(s))$$

y

$$\dot{p}_i(s) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\gamma(s)).$$

De la primera ecuación obtenemos $t(s) = s + t_0$ con t_0 constante y como las curvas integrales siguen siendo curvas integrales bajo traslaciones del parámetro s (ver [6] capítulo 17), entonces podemos considerar $t(s) = s$, así podemos escribir las curvas integrales de X_H como $\gamma(t) = (t, q^i(t), p_i(t))$ donde

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t))$$

y

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\gamma(t))$$

estas son las ecuaciones de Hamilton.

En el caso de sistemas autónomos el campo vectorial hamiltoniano tiene la forma local

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

las curvas integrales de X_H vienen dadas por $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ y las mismas ecuaciones de Hamilton.

Definición 2.2. *Una constante de movimiento del sistema hamiltoniano* $(\mathbb{R}\times M, \Omega, H)$ *es una función* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}\times M)$ *que es constante en cada curva integral de* X_H*, o equivalentemente*

$$L_{X_H}\phi = 0$$

donde $L_{X_H}\phi$ *es la derivada de Lie de* ϕ *con respecto al campo vectorial* X_H*.*

Definición 2.3. *Un campo vectorial* A *en* $\mathbb{R}\times M$ *se dice una simetría de* Ω *si* $L_A\Omega = 0$*.*

La formula de Cartan dice

$$L_A\Omega = A\lrcorner d\Omega + d(A\lrcorner\Omega).$$

Como $d\Omega = 0$ entonces A es simetría de Ω si y solo si $A\lrcorner\Omega$ es una 1-forma cerrada.

Ahora como cada 1-forma cerrada es localmente exacta, entonces si A es una simetría de Ω, existe localmente una función $\psi \in C^\infty(U)$ con $U \subset \mathbb{R}\times M$ abierto, tal que $A\lrcorner\Omega = -d\psi$, luego ψ es una constante de movimiento local, en efecto,

$$\begin{aligned} L_{X_H}\psi &= X_H(\psi) \\ &= d\psi(X_H) \\ &= X_H\lrcorner d\psi \\ &= -X_H\lrcorner(A\lrcorner\Omega) \\ &= A\lrcorner(X_H\lrcorner\Omega) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\psi \in \mathbb{R}\times M$ es una constante de movimiento, entonces existe un campo vectorial A tal que $A\lrcorner\Omega = -d\psi$, en efecto, supongamos que existe $A = A_i\frac{\partial}{\partial p_i} + B^i\frac{\partial}{\partial q^i} + C\frac{\partial}{\partial t}$ campo vectorial en M que satisface la ecuación anterior, esto es,

$$\begin{aligned} -d\psi &= A\lrcorner\Omega \\ &= A\lrcorner(dp_i\wedge dq^i - dH\wedge dt) \\ &= A(p_i)dq^i - A(q^i)dp_i - A(H)dt + CdH. \end{aligned}$$

Luego

$$A_i = -\frac{\partial\psi}{\partial q^i} - C\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

$$B^i = -\frac{\partial\psi}{\partial p_i} + C\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

y C es cualquier función diferenciable a valores reales. Luego A está definido definido localmente por

$$A = \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial\psi}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + CX_H$$

y nuevamente está garantizada su existencia.

Notemos que A no es único ya que C es cualquier función diferenciable.

Así que cualquier constante de movimiento esta asociada a una simetría de Ω.

Definición 2.4. *Sean f_1, f_2 constantes de movimiento, definimos su paréntesis de Poisson por*

$$\{f_1, f_2\} = F_1(f_2)$$

donde F_1 es uno de los campos vectoriales en $\mathbb{R} \times M$ tal que $F_1 \lrcorner \Omega = -df_1$.

Teorema 2.1. ***Propiedades del paréntesis de Poisson.*** *Dadas $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(R \times M)$ constantes de movimiento y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:*

1. *Bilinealidad: $\alpha\{f_1, f_2\} = \{\alpha f_1, f_2\} = \{f_1, \alpha f_2\}$.*
2. *Antisimetría: $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$.*
3. *Identidad de Jacobi: $\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\} = 0$.*

Demostración. Primero notemos que en coordenadas canónicas locales (t, q^i, p_i) tenemos que

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q^i} - \frac{\partial f_1}{\partial q^i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i},$$

en efecto ,

$$\begin{aligned}
\{f_1, f_2\} &= F_1(f_2) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q^i} - \frac{\partial f_1}{\partial q^i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} + CX_H(f2) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q^i} - \frac{\partial f_1}{\partial q^i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} + CL_{X_H}(f2) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q^i} - \frac{\partial f_1}{\partial q^i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i}.
\end{aligned}$$

Así vemos que el paréntesis de Poisson está bien definido, éste no depende de la elección de la función C.

Con esta forma local se verifica de manera directa la antisimetría y la bilinealidad.

Ahora veamos que el paréntesis de Poisson de dos constantes de movimiento es también una constante de movimiento, en efecto,

$$\begin{aligned} L_{X_H}\{f_1, f_2\} &= X_H\{f_1, f_2\} \\ &= X_H(F_1(f_2)) \\ &= X_H(F_1(f_2)) - F_1(X_H f_2) \\ &= [X_H, F_1](f_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

la ultima igualdad se tiene ya que se verifica con un simple cálculo que el campo vectorial $[X_H, F_1]$ es proporcional a X_H.

Ahora veamos que la identidad de Jacobi se obtiene de la siguiente manera. Denotemos por F al campo vectorial en $\mathbb{R} \times M$ tal que $F \lrcorner \Omega = -d\{f_1, f_2\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} F \lrcorner \Omega &= -d(\{f_1, f_2\}) \\ &= -d(F_1(f_2)) \\ &= -d(L_{F_1}(f_2)) \\ &= -L_{F_1} d f_2 \\ &= L_{F_1}(F_2 \lrcorner \Omega) \\ &= (L_{F_1} F_2) \lrcorner \Omega + F_2 \lrcorner L_{F_1} \Omega \\ &= [F_1, F_2] \lrcorner \Omega + F_2 \lrcorner (F_1 \lrcorner d\Omega) + d(F_1 \lrcorner \Omega) \\ &= [F_1, F_2] \lrcorner \Omega + F_2 \lrcorner (F_1 \lrcorner 0 - d(d f_1)) \\ &= [F_1, F_2] \lrcorner \Omega + F_2 \lrcorner (F_1 \lrcorner 0) \\ &= [F_1, F_2] \lrcorner \Omega, \end{aligned}$$

aquí hemos ocupado propiedades de la derivada de Lie y la formula de Cartan, para detalles ver [6].

$$\begin{aligned} \{\{f_1, f_2\}, f_3\} &= F(f_3) \\ &= [F_1, F_2] f_3 \\ &= F_1 F_2 f_3 - F_2 F_1 f_3 \\ &= F_1(\{f_2, f_3\}) - F_2(\{f_1, f_3\}) \\ &= F_1(\{f_2, f_3\}) + F_2(\{f_3, f_1\}) \\ &= \{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} \\ &= -\{\{f_2, f_3\}, f_1\} - \{\{f_3, f_1\}, f_2\}. \end{aligned}$$

Así tenemos el resultado deseado. $\square$

Definición 2.5. *Una transformación de coordenadas* $Q^i = Q^i(t, q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ $P_i = P_i(t, q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ *se llama transformación canónica si*

$$\{Q^i, Q^j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \qquad \{P_j, Q^i\} = \delta^i_j$$

donde

$$\{X_\mu, X_\nu\} = \frac{\partial X_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial X_\nu}{\partial q^i} - \frac{\partial X_\mu}{\partial q^i}\frac{\partial X_\nu}{\partial p_i}$$

con X_μ *cualquiera de las coordenadas* $(Q^1, ...Q^n, P_1, ..., P_n)$.

Una transformación de coordenadas de este tipo preserva la forma de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i},$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$$

para alguna función K *de las nuevas coordenadas.*

Notemos que si la transformación es canónica se tiene

$$dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt = dP_i \wedge dQ^i - dK \wedge dt$$

la cual es equivalente a

$$d(p_i dq^i - Hdt - P_i dQ^i + Kdt) = 0$$

y esto es equivalente a la existencia de una función $F = F(t, q^i, Q^i)$ tal que

$$p_i dq^i - Hdt - P_i dQ^i - Kdt = dF.$$

Recíprocamente, dada una función $F = F(t, q^i, Q^i)$ satisfaciendo

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial Q^j}\right) \neq 0$$

y $p_i dq^i - Hdt - P_i dQ^i - Kdt = dF$, podemos definir una transformación canónica por

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial Q^i}, \quad K - H = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

F se llama función generadora de la transformación canónica.

Para más detalles ver [10].

A continuación definimos las transformaciones canonoides, éstas son transformaciones más generales que las transformaciones canónicas. A saber, las transformaciones canónicas son un caso especial de transformaciones canonoides.

Definición 2.6. *Una transformación de coordenadas* $(Q^i(t, q^j, p_j), P_i(t, q^j, p_j))$ *que preserva la forma de las ecuaciones de Hamilton, esto es,*

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$$

para alguna función $K = K(t, Q^i, P_i)$ *se llama transformación canonoide.*

Definición 2.7. *Sean* u, v *dos coordenadas del conjunto* (t, q^i, p_i)*, definimos el paréntesis de Lagrange de* u *y* v *con respecto a las nuevas coordenadas* Q^i, P_i *por*

$$[u, v] = \frac{\partial Q^i}{\partial u}\frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u}\frac{\partial Q^i}{\partial v}.$$

Con simples cálculos, que omitimos aquí, se ve que el paréntesis de Lagrange es antisimétrico, esto es

$$[u, v] = -[v, u]$$

y satisface la propiedad

$$\frac{\partial [u, v]}{\partial w} + \frac{\partial [v, w]}{\partial u} + \frac{\partial [w, u]}{\partial v} = 0.$$

Veamos la siguiente caracterización de las transformaciones canonoides, ésta es fundamental para lo que resta.

Teorema 2.2. *Una transformación de coordenadas* $(Q^i(t, q^j, p_j), P_i(t, q^j, p_j))$ *satisface* $\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$ *y* $\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$ *para alguna función* $K = K(t, Q^i, P_i)$ *si y solo si se tiene*

$$\frac{\partial K}{\partial q^i} = [q^i, p_k]\frac{\partial H}{\partial q^k} - [q^i, q^k]\frac{\partial H}{\partial p_k} + [t, q^i]$$

y

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = [p_i, p_k]\frac{\partial H}{\partial q^k} - [p_i, q^k]\frac{\partial H}{\partial p_k} + [t, p_i].$$

Demostración. Supongamos que tenemos una transformación de coordenadas $(Q^i(t, q^j, p_j), P_i(t, q^j, p_j))$ que satisface $\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$ y $\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$ para alguna función $K = K(t, Q^i, P_i)$. Luego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial q^i} &= \frac{\partial K}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial K}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q^i} \\
&= -\dot{P}_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \dot{Q}^j \frac{\partial P_j}{\partial q^i} \\
&= -(\frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial P_j}{\partial p_k}\dot{p}_k)\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + (\frac{\partial Q^j}{\partial t} + \frac{\partial Q^j}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial Q^j}{\partial p_k}\dot{p}_k)\frac{\partial P_j}{\partial q^i} \\
&= \frac{\partial Q^j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q^i} - \frac{\partial P^j}{\partial t}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + (\frac{\partial Q^j}{\partial q^k}\frac{\partial P^j}{\partial q^i} - \frac{\partial P_j}{\partial q^k}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i})\dot{q}^k + (\frac{\partial Q^j}{\partial p_k}\frac{\partial P^j}{\partial q^i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_k}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i})\dot{p}_k \\
&= \frac{\partial Q^j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q^i} - \frac{\partial P^j}{\partial t}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} - (\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\frac{\partial P_j}{\partial q^k} - \frac{\partial P^j}{\partial q^i}\frac{\partial Q^j}{\partial q^k})\frac{\partial H}{\partial p_k} + (\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P^j}{\partial q^i}\frac{\partial Q^j}{\partial p_k})\frac{\partial H}{\partial q^k} \\
&= [q^i, p_k]\frac{\partial H}{\partial q^k} - [q^i, q^k]\frac{\partial H}{\partial p_k} + [t, q^i].
\end{aligned}
$$

De manera análoga se tiene el resultado para $\frac{\partial K}{\partial p_i}$.

Note que el recíproco se tiene por el mismo cálculo. □

Para más detalles de transformaciones canonoides ver [7].

Capítulo 3

Sistemas integrables

En este capítulo presentamos la definición formal de sistema integrable, este campo de estudio nace junto con la Mecánica Clásica, con una búsqueda de soluciones exactas a las ecuaciones de movimiento de Newton. Fue en el siglo XIX cuando Liouville proporcionó un marco general que caracteriza este tipo especial de sistemas mecánicos en el que las soluciones son obtenidas resolviendo integrales y haciendo algunos cálculos algebraicos.

Sin más que esperar damos la definición de sistema integrable.

Definición 3.1. *Un sistema hamiltoniano $(\mathbb{R} \times M, \Omega, H)$ con M de dimension $2n$ se dice integrable (según Liouville) si existen n constantes de movimiento $F_1, ..., F_n$ en involución y funcionalmente independientes.*

En involución significa que $\{F_i, F_j\} = 0$ y funcionalmente independientes significa que el subconjunto de puntos regulares del mapeo $F = (F_1, ..., F_n)$ es denso en el dominio de definición de F.

A continuación el Teorema de Liouville.

Teorema 3.1. ***Teorema de Liouville.*** *La solución de las ecuaciones de movimiento de un sistema integrable se puede obtener por cuadraturas, es decir, resolviendo un número finito de ecuaciones algebraicas y calculando un número finito de integrales.*

Antes de dar la demostración, recordemos brevemente las nociones elementales de la teoría de Hamilton-Jacobi que nos facilitará la prueba del teorema de Liouville.

Sea $(\mathbb{R} \times M, \Omega, H)$ un sistema hamiltoniano, con $\Omega = \omega - dH \wedge dt$, donde ω una forma simpléctica en M. Dadas coordenadas canónicas (q^i, p_i) en M, la idea es buscar una transformación canónica $(Q^j(t, q^i, p_i), P_j(t, q^i, p_i))$ tal que las nuevas coordenadas sean constantes de movimiento, o equivalentemente, que la nueva hamiltoniana K sea cero. En este caso las ecuaciones de Hamilton

son
$$0 = \frac{\partial K}{\partial P_j} = \dot{Q}^j$$
y
$$0 = -\frac{\partial K}{\partial Q^j} = \dot{P}_j.$$
Como se vio en el capítulo 2, una manera de dar una transformación canónica es dar una función generadora F. Dada una función generadora $F = F(t, q^i, Q^i)$. Sabemos que
$$K - H = \frac{\partial F}{\partial t},$$
así que si K es cero entonces
$$H(t, q^i, p_i) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$
y
$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}.$$

Luego de estas dos ecuaciones tenemos
$$H(t, q^i, \frac{\partial F}{\partial q^i}) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$
esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi.

De lo anterior notamos que resolver las ecuaciones de movimiento es equivalente a resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Notemos que la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación diferencial parcial de primer orden de $n+1$ variables, a saber, $t, q^1, ..., q^n$. Una solución completa de esta ecuación es de la forma
$$F = F(t, q^1, ...q^n, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$$
donde las cantidades $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ son constantes independientes, una de esas contantes es irrelevante, luego podemos escribir
$$F = F(t, q^1, ...q^n, \alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Bajo apropiadas condiciones de regularidad, tal función genera una transformación canónica con coordenadas
$$Q^i = \alpha_i \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial q^i}$$
y estas son constantes de movimiento.

Estamos listos para presentar la demostración del teorema de Liuoville, como se da en [8].

Demostración. Supongamos que tenemos $Q^1 = Q^1(t, q^i, p_i), ..., Q^n = Q^n(t, q^i, p_i)$ n constantes de movimiento en involución y funcionalmente independientes. Supongamos que podemos escribir $p_i = F_i(t, q^j, Q^j)$. Definimos

$$\overline{H}(t, q^i, Q^i) = H(t, q^i, F_i(t, q^j, Q^j))$$

y veamos que la forma diferencial

$$F_i dq^i - \overline{H} dt$$

es exacta, para esto veamos que

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^j} = \frac{\partial F_j}{\partial q^i} \quad y \quad \frac{\partial F_i}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial q^i},$$

en efecto, sustituyendo $p_i = F_i(t, q^j, Q^j)$ en Q^i tenemos

$$Q^i = Q^i(t, q^j, F_j(t, q^k, Q^k))$$

luego

$$0 = \frac{\partial Q^i}{\partial q^m} + \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial q^m} \quad y \quad 0 = \frac{\partial Q^i}{\partial t} + \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial t}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\{Q^i, Q^j\} &= \frac{\partial Q^i}{\partial q^m}\frac{\partial Q^j}{\partial p_m} - \frac{\partial Q^j}{\partial q^m}\frac{\partial Q^i}{\partial p_m} \\
&= -\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial q^m}\frac{\partial Q^j}{\partial p_m} + \frac{\partial Q^j}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial q^m}\frac{\partial Q^i}{\partial p_m} \\
&= -\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial q^m}\frac{\partial Q^j}{\partial p_m} + \frac{\partial Q^j}{\partial p_m}\frac{\partial F_m}{\partial q^k}\frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \\
&= \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial Q^j}{\partial p_m}\left(\frac{\partial F_m}{\partial q^k} - \frac{\partial F_k}{\partial q^m}\right).
\end{aligned}$$

Como $\{Q^i, Q^j\} = 0$ entonces $\dfrac{\partial F_m}{\partial q^k} - \dfrac{\partial F_k}{\partial q^m} = 0$.

De la definición de $\overline{H}$ tenemos

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial F_j}{\partial q^i}$$

luego

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial F_j}{\partial q^i}.$$

Además como las Q^i son constantes de movimiento entonces

$$0 = \frac{dQ^i}{dt} = \frac{\partial Q^i}{\partial t} + \frac{\partial Q^i}{\partial q^m}\frac{\partial H}{\partial p_m} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_m}\frac{\partial H}{\partial q^m},$$

así sustituyendo $\frac{\partial Q^i}{\partial t}$, $\frac{\partial Q^i}{\partial q^m}$ y $\frac{\partial H}{\partial q^m}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial t} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial q^m}\frac{\partial H}{\partial p_m} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_m}(\frac{\partial \overline{H}}{\partial q^m} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F_k}{\partial q^m}) \\ &= -\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}(\frac{\partial F_k}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial q^k}) - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p_m}(\frac{\partial F_k}{\partial q^m} - \frac{\partial F_m}{\partial q^k}) \\ &= -\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}(\frac{\partial F_k}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial q^k}). \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial q^k} = 0.$$

Así podemos concluir que la forma diferencial $F_i dq^i - \overline{H}dt$ es exacta, luego existe una función $S = S(t, q^i, Q^i)$ tal que

$$dS = F_i dq^i - \overline{H}dt$$

y esta es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H(t, q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

□

Notemos que en efecto hemos resuelto las ecuaciones de movimiento por cuadraturas, calculando la función S solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi y realizando algunas manipulaciones algebraicas para expresar cada p_i como función de $t, q^1, ...q^n, Q^1, ..., Q^n$.

Capítulo 4

Extensiones al caso dependiente del tiempo

En este capítulo presentamos algunas relaciones entre primeras integrales de sistemas hamiltonianos, haciendo los comentarios correspondientes para sistemas autónomos, ya que muchos de los resultados presentados aquí son extensiones de resultados establecidos para sistemas autónomos. He aquí la importancia de este trabajo que presenta las definiciones correspondientes y los resultados para cuando las funciones implicadas pueden depender explícitamente del tiempo.

En adelante escribiremos (x_μ) con $\mu = 1, 2, ..., 2n$ para referirnos a las coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$, luego el campo vectorial X_H tiene la forma

$$X_H = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial t}$$

y las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x}_\nu = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial x_\mu}$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ son las coordenadas de la matriz

$$E = (\epsilon_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de orden n. Aquí el primer subíndice μ corresponde a la μ-ésima columna y el segundo subíndice ν corresponde a la ν-ésima fila. Es claro que la matriz E es antisimétrica.

También sabemos que dada $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ constante de movimiento, existe un campo vectorial F tal que $F \lrcorner \Omega = -df$, F tiene la forma local

$$F = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + CX_H$$

luego el paréntesis de Poisson de dos constantes de movimiento f y g tiene la forma local

$$\{f, g\} = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{\partial g}{\partial x_\nu}.$$

Usando esta notación tenemos que una transformación de coordenadas $(Q^i(t, q^j, p_j), P_i(t, q^j, p_j))$ es una transformación canonoide si y solo si existe una función K tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} &= [x_\alpha, p_k] \frac{\partial H}{\partial q^k} - [x_\alpha, q^k] \frac{\partial H}{\partial p_k} + [t, x_\alpha] \\ &= \epsilon_{\mu\nu} [x_\nu, x_\alpha] \frac{\partial H}{\partial x_\mu} + [t, x_\alpha]. \end{aligned}$$

Sabemos que la existencia local de una función K satisfaciendo la ecuación diferencial parcial de arriba está garantizada por la condición

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Usando las propiedades del paréntesis de Lagrange tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 K}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial [x_\nu, x_\alpha]}{\partial x_\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu} [x_\nu, x_\alpha] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial [t, x_\alpha]}{\partial x_\beta} \\ &-\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial [x_\nu, x_\beta]}{\partial x_\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu} [x_\nu, x_\beta] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \frac{\partial [t, x_\beta]}{\partial x_\alpha} \\ &= \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial [x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu} \frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu} [x_\beta, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu} [x_\alpha, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial [x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Luego la existencia de K está garantizada si el paréntesis de Lagrange satisface

$$\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial [x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu} \frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu} [x_\beta, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu} [x_\alpha, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial [x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} = 0.$$

La ecuación anterior es de gran importancia ya que dada una transformación de coordenadas que cumple con dicha ecuación, se puede concluir que tal transformación de coordenadas es una transformación canonoide.

Ahora, consideremos dada una segunda estructura simpléctica $\overline{\omega}$ sobre M, podemos definir un $(1, 1)$-tensor (es decir, un tensor de tipo mixto una vez covariante y una vez contravariante) S por la relación

$$\overline{\omega}(X, Y) = \omega(SX, Y)$$

para cualquier par de campos vectoriales X y Y.

Definición 4.1. *Decimos que $\overline{\omega}$ es compatible con el sistema hamiltoniano $(\mathbb{R} \times M, \Omega, H)$ si*

$$L_{X_H}\overline{\omega} = 0 \qquad y \qquad N_S = 0$$

donde N_S es un $(2,1)$-tensor llamado tensor torsión de Nijenhuis, definido por

$$N_S(X,Y) = [SX, SY] - S[SX,Y] - S[X,SY] + S^2[X,Y]$$

donde $[X,Y]$ es el corchete de Lie de los campos vectoriales X y Y.

El concepto de compatibilidad de una segunda forma simpléctica con un sistema hamiltoniano es debido a F. Magri, aunque solo el caso de sistemas autónomos. Este ha sido estudiado por varios autores, entre ellos R. Brouzet, ver [2] y [1].

Supongamos que $\overline{\omega}$ es compatible con el sistema hamiltoniano $(\mathbb{R} \times M, \Omega, H)$, existen coordenadas locales (Q^i, P_i) en M, tales que $\overline{\omega}$ tiene la forma canónica

$$\overline{\omega} = dP_i \wedge dQ^i$$

luego

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} &= \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial Q^i}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial Q^i}{\partial x_\mu}\right)dx_\mu \wedge dx_\nu + \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\frac{\partial Q^i}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial Q^i}{\partial t}\right)dt \wedge dx_\mu \\
&= -[x_\mu, x_\nu]dx_\mu \wedge dx_\nu - [t, x_\mu]dt \wedge dx_\mu \\
&= [x_\nu, x_\mu]dx_\mu \wedge dx_\nu - [t, x_\mu]dt \wedge dx_\mu.
\end{aligned}$$

Por otro lado, según la formula de Cartan

$$L_{X_H}\overline{\omega} = X_H \lrcorner d\overline{\omega} + d(X_H \lrcorner \overline{\omega}) = d(X_H \lrcorner \overline{\omega}).$$

Calculemos

$$X_H \lrcorner \overline{\omega} = \theta = \theta_i dx_i.$$

$$\begin{aligned}
\theta_i &= (X_H \lrcorner \overline{\omega})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \overline{\omega}\left(X_H, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\overline{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \overline{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\overline{\omega}_{\nu i} + \overline{\omega}_{ti} \\
&= \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu}[x_i, x_\nu] - [t, x_i],
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
L_{X_H}\overline{\omega} &= d(X_H \lrcorner \overline{\omega}) \\
&= (\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial[x_\alpha, x_\nu]}{\partial x_\beta}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} - \frac{\partial[t, x_\alpha]}{\partial x_\beta} \\
&\quad -\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial[x_\beta, x_\nu]}{\partial x_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} + \frac{\partial[t, x_\beta]}{\partial x_\alpha})dx_\beta \wedge dx_\alpha \\
&= (-\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t})dx_\beta \wedge dx_\alpha \\
&= (\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t})dx_\alpha \wedge dx_\beta.
\end{aligned}$$

Así vemos que la condición $L_{X_H}\overline{\omega} = 0$ es equivalente a que la transformación de coordenadas $(Q^i(t, x_\mu), P_i(t, x_\mu))$ es una transformación canonoide.

Ahora veamos la forma en coordenadas (x_μ) del tensor S,

$$S = S_\alpha^\beta dx_\beta \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

tenemos que $\omega = \epsilon_{\mu\nu}dx_\mu \wedge dx_\nu$ y $\overline{\omega} = \overline{\omega}_{\mu\nu}dx_\mu \wedge dx_\nu$.

Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}(X, Y) = \omega(SX, Y) &\Rightarrow \overline{\omega}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \omega(S\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&\Rightarrow \overline{\omega}_{ij} = \omega(S_k^i\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&\Rightarrow \overline{\omega}_{ij} = S_k^i\omega_{kj} \\
&\Rightarrow [x_j, x_i] = s_k^i\epsilon_{kj} \\
&\Rightarrow S_k^i = \epsilon_{jk}[x_j, x_i] = \epsilon_{kj}[x_i, x_j],
\end{aligned}$$

esto es

$$S_\alpha^\beta = \epsilon_{\alpha\lambda}[x_\beta, x_\lambda]$$

o bien podemos escribir matricialmente $S = EW$, donde W es la matriz $W = ([x_i, x_j]) = \overline{\omega}_{ji}$.

Veamos que la matriz S tiene a lo mas n autovalores diferentes, en efecto, sea λ un autovalor de S, el espacio de autovectores asociados a λ está definido por

$$E_\lambda = ker(S - \lambda I) = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : (S - \lambda I)x = 0\},$$

notemos que

$$\begin{aligned}
(S - \lambda I)x = 0 &\Leftrightarrow (EW - \lambda I)x = 0 \\
&\Leftrightarrow (E - \lambda W^{-1})x = 0.
\end{aligned}$$

Así que
$$E_\lambda = ker(E - \lambda W^{-1}),$$
luego como el espacio imagen de toda matriz antisimétrica es de dimension par y $E - \lambda W^{-1}$ es antisimetrica, entonces $dim(Im(E - \lambda W^{-1}))$ es par, además como $E - \lambda W^{-1}$ es de orden par entonces tenemos que $dim(E_\lambda)$ es par, esto implica que
$$2 \leq dim(E_\lambda) \leq multiplicidad\, algebraica\, de\, \lambda.$$

Concluimos que cada autovalor de S tiene multiplicidad algebraica mayor o igual a 2, por lo tanto S tiene a lo más n autovalores diferentes.

A continuación veremos que los autovalores de S son primeras integrales del sistema hamiltoniano $(\mathbb{R} \times M, \Omega, H)$ y además están en involución.

Definamos el $(1,1)$-tensor U por
$$U_\alpha^\beta = \epsilon_{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\lambda \partial x_\beta}$$
entonces la ecuación $L_{X_H}\overline{\omega} = 0$ es equivalente a
$$\frac{dS_\lambda^\beta}{dt} - S_\lambda^\nu U_\nu^\beta + U_\lambda^\mu S_\mu^\beta = 0$$
en efecto
$$\begin{aligned}
&\frac{dS_\lambda^\beta}{dt} - S_\lambda^\nu U_\nu^\beta + U_\lambda^\mu S_\mu^\beta = \\
&= \epsilon_{\lambda\alpha} \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} + \epsilon_{\lambda\alpha} \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{dt} - \epsilon_{\lambda\alpha}[x_\nu, x_\alpha]\epsilon_{\nu\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \epsilon_{\lambda\alpha} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu] \\
&= \epsilon_{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} + \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu} \epsilon_{\mu\nu} \frac{H}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\nu\mu}[x_\nu, x_\alpha] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\right) \\
&= \epsilon_{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} + \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu} \frac{H}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu] \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\right).
\end{aligned}$$

Luego podemos escribir en forma matricial
$$\frac{dS}{dt} = SU - US$$
donde S y U son las matrices con entradas S_α^β y U_α^β respectivamente, aquí el subíndice α corresponde a la α-ésima columna y el superíndice β corresponde a la β-ésima fila.

Ahora definimos las funciones
$$K_0 = \log|\det S|$$

y para cada entero m no nulo

$$K_m = \frac{1}{m} tr(S^m)$$

estas funciones son constantes de movimiento, en efecto, sabemos que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ y $tr(AB) = tr(BA)$ para cualquier par de matrices cuadradas A y B, luego para $m > 1$ o $m < -1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(K_m) &= \frac{1}{m}\frac{d}{dt}(trS^m) \\
&= \frac{1}{m} tr(\frac{d}{dt} S^m) \\
&= \frac{1}{m} tr(nS^{m-1}\frac{dS}{dt}) \\
&= \frac{1}{m} tr(P[S,U]) \\
&= \frac{1}{m} tr(PSU - PUS) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde hemos escrito $P = mS^{m-1}$.

Para $m = 1$ tenemos

$$\frac{d}{dt}(K_1) = \frac{d}{dt}(trS) = tr(\frac{d}{dt}S) = tr([S,U]) = 0$$

y para $m = -1$ tenemos

$$\frac{d}{dt}(K_{-1}) = \frac{d}{dt}(trS^{-1}) = tr(\frac{1}{ln|S|}\frac{d}{dt}S) = tr(Q[S,U]) = 0$$

donde hemos escrito $Q = \dfrac{1}{ln|S|}$.

Finalmente para ver que K_0 es una contante de movimiento recordemos que el determinante de una matriz cuadrada de orden l se puede escribir como función de las trazas de potencias hasta el orden l de la matriz.

Notemos que estas funciones no son funcionalmente independientes, en efecto, como S es una matriz de orden $2n \times 2n$ entonces K_m para $m \geq 2n + 1$ y $(\det S)^m K_{-m}$ para $m \geq 1$, pueden ser expresadas como polinomios de $K_1, ..., K_{2n}$ y ya sabemos que K_0 se puede escribir como función de las $K_1, ..., K_{2n}$. Así que podemos concentrarnos sólo en las constantes de movimiento $K_1, ..., K_{2n}$.

Como los autovalores de una matriz se pueden escribir como funciones de las trazas de potencias de la matriz, entonces podemos concluir que los autovalores de S son constantes de movimiento.

Para la prueba de involución, recordemos la condición de la nulidad del tensor torsión de Nijenhuis

$$N_S = 0,$$

se ve fácilmente que las coordenadas del tensor torsión de Nijenhuis tienen la forma local

$$N^{\mu}_{\alpha\beta} = S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\beta} - S^{\lambda}_{\beta}\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\alpha} - S^{\mu}_{\lambda}\partial_{\alpha}S^{\lambda}_{\beta} + S^{\mu}_{\lambda}\partial_{\beta}S^{\lambda}_{\alpha}$$

donde por simplicidad hemos escrito ∂_λ para denotar a $\dfrac{\partial}{\partial x_\lambda}$.

Ahora veamos que para $m \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
N^{\mu}_{\alpha\beta}(S^{m-1})^{\beta}_{\mu} &= S^{\lambda}_{\alpha}(\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\beta})(S^{m-1})^{\beta}_{\mu} - (S^{m})^{\lambda}_{\mu}\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\alpha} - (S^{m})^{\beta}_{\lambda}(\partial_{\alpha}S^{\lambda}_{\beta} - \partial_{\beta}S^{\lambda}_{\alpha}) \\
&= S^{\lambda}_{\alpha}(\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\beta})(S^{m-1})^{\beta}_{\mu} - (S^{m})^{\beta}_{\lambda}\partial_{\alpha}S^{\lambda}_{\beta} \\
&= \frac{1}{m}S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}trS^{m} - \frac{1}{m+1}\partial_{\alpha}trS^{m+1},
\end{aligned}$$

esto es

$$N^{\mu}_{\alpha\beta}(S^{m-1})^{\beta}_{\mu} = \frac{1}{m}S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}trS^{m} - \frac{1}{m+1}\partial_{\alpha}trS^{m+1}$$

o

$$N^{\mu}_{\alpha\beta}(S^{m-1})^{\beta}_{\mu} = S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}K_{m} - \partial_{\alpha}K_{m+1}.$$

Si el tensor torsión de Nijenhuis de anula entonces

$$S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}K_{m} = \partial_{\alpha}K_{m+1}$$

esto es

$$\epsilon_{\alpha\theta}[x_\lambda, x_\theta]\partial_{\lambda}K_{m} = \partial_{\alpha}K_{m+1}$$

luego

$$[x_\lambda, x_\theta]\partial_{\lambda}K_{m} = \epsilon_{\theta\alpha}\partial_{\alpha}K_{m+1}.$$

Con este resultado podemos probar la involución de las $K_1, ..., K_{2n}$, lo cual evidentemente implica la involución de los valores propios de S. Procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\{K_m, K_l\} &= \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial K_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial K_l}{\partial x_\nu} \\
&= [x_\lambda, x_\mu]\frac{\partial K_{l-1}}{\partial x_\lambda}\frac{\partial K_m}{\partial x_\mu} \\
&= -[x_\mu, x_\lambda]\frac{\partial K_m}{\partial x_\mu}\frac{\partial K_{l-1}}{\partial x_\lambda} \\
&= -\epsilon_{\lambda\alpha}\frac{\partial K_{m+1}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial K_{l-1}}{\partial x_\lambda} \\
&= \epsilon_{\alpha\lambda}\frac{\partial K_{m+1}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial K_{l-1}}{\partial x_\lambda} \\
&= \{K_{m+1}, K_{l-1}\}.
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $l > m$, así que iterando el cálculo anterior $m - l$ veces tenemos que

$$\{K_m, K_l\} = \{K_l, K_m\} = 0.$$

Así queda demostrada la involución de las funciones $K_1, ...K_{2n}$.

Hemos probado que los autovalores de S los cuales son a lo mas n, son constantes de movimiento en involución y también lo son las funciones $K_1, ..., K_{2n}$. Cabe mencionar que en la referencia [4], se encuentra, para el caso de sistemas autónomos, la manera de obtener las constantes $K_1, ..., K_{2n}$ partiendo de dos sistemas que describen el mismo sistema mecánico, lo que aquí ha sido extendido como compatibilidad de estructuras simplécticas, o bien, a través de transformaciones canonoides.

Para finalizar presentamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1. *Consideremos un sistema hamiltoniano con coordenadas canónicas* (q_1, q_2, p_1, p_2) *y función hamiltoniana*

$$H(t, q_1, q_2, p_1, p_2) = (t^3 - 5t)p_1 + 3t^2 p_2 - tq_1 - \sin tq_2.$$

Consideremos la transformación de coordenadas
$Q_1 = q_2$
$Q_2 = p_2 - 2p_1 + t^2$
$P_1 = p_1(\frac{5}{2}t^2 - \frac{t^4}{4}) + q_1(p_1 - \frac{t^2}{2}) + (p_2 + \cos t)^2 - q_2 + \frac{t^6}{8} - \frac{5}{4}t^4 + t^3 + \sin t^2$
$P_2 = -p_2 - \cos t - 4e^t$.

Se ve fácilmente que ésta es una transformación canonoide con hamiltoniana

$$K(t, Q_1, Q_2, P_1, P_2) = 3t^2 P_1 + \sin tP_2 - 2t\cos t^2 Q_1 + 4e^t Q_2.$$

Por otro lado, la matriz $S = (S_\alpha^\beta)$ *es de la forma*

$$\begin{pmatrix} [p_1, q_1] & [p_2, q_1] & 0 & -[q_2, q_1] \\ [p_1, q_2] & [p_2, q_2] & [q_2, q_1] & 0 \\ 0 & [p_2, p_1] & [p_1, q_1] & [p_1, q_2] \\ -[p_2, p_1] & 0 & [p_2, q_1] & [p_2, q_2] \end{pmatrix}$$

en este caso
$[p_1, q_1] = 0,$
$[p_1, q_2] = -\dfrac{5}{2}t^2 + \dfrac{t^4}{4} - q_1,$
$[p_2, p_1] = -2,$
$[p_2, q_1] = 0,$
$[p_2, q_2] = -2(p_2 + \cos t)$ *y*
$[q_2, q_1] = p_1 - \dfrac{t^2}{2}.$

Luego

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{t^2}{2} - p_1 \\ -\dfrac{5}{2}t^2 + \dfrac{t^4}{4} - q_1 & -2(p_2 + \cos t) & p_1 - \dfrac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\dfrac{5}{2}t^2 + \dfrac{t^4}{4} - q_1 \\ 2 & 0 & 0 & -2(p_2 + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de S son

$$\lambda_1 = -p_2 - cost - \sqrt{(p_2 + cost)^2 - t^2 + 2p_1}$$

y

$$\lambda_2 = -p_2 - cost + \sqrt{(p_2 + cost)^2 - t^2 + 2p_1}.$$

Así que $K_1 = -4(p_2 + \cos t)$ *y* $K_2 = 2t^2 4p_1 - 2t^2 - 4(p_2 + \cos t)^2$*, éstas son primeras integrales funcionalmente independientes y en involución.*

Podemos concluir que el sistema considerado es integrable.

Ahora, veremos que el tensor torsión de Nijenhuis no se anula, en efecto

$$\begin{aligned} N_{12}^2 &= S_1^\lambda \partial_\lambda S_2^2 - S_2^\lambda \partial_\lambda S_1^2 - S_\lambda^2 \partial_1 S_2^\lambda + S_\lambda^2 \partial_2 S_1^\lambda \\ &= S_1^4 \partial_4 S_2^2 - S_2^1 \partial_1 S_1^2 - 0 + 0 \\ &= -4 - 0 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{24}^{1} &= S_2^{\lambda}\partial_{\lambda}S_4^1 - S_4^{\lambda}\partial_{\lambda}S_2^1 - S_{\lambda}^1\partial_2 S_4^{\lambda} + S_{\lambda}^1\partial_4 S_2^{\lambda} \\ &= S_2^3\partial_3 S_4^1 - 0 - 0 + S_2^1\partial_4 S_2^2 \\ &= 2 - 0 - 0 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

entre otras.

Este ejemplo muestra que la nulidad del tensor torsión de nijenhuis no es una condición necesaria para la involución de las primeras integrales encontradas.

Veamos otro interesante ejemplo.

Ejemplo 4.2. *Consideremos un sistema hamiltoniano con coordenadas canónicas* $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ *y función hamiltoniana*

$$H(t, q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = tp_1 + \frac{p_2^3}{3} - e^t p_3 - 5q_2 - \sin tq_3.$$

Consideremos la transformación de coordenadas
$Q_1 = p_2$
$Q_2 = p_1^2 + p_3$
$Q_3 = q_3 + e^t - t^4$
$P_1 = p_1(p_2 - 5t)(q_2 - \frac{p_2^3}{15})$
$P_2 = q_1 - p_3 - t^2 p_1 - e^t - \cos t$
$P_3 = q_3(p_3 + \cos t + 1) + e^t(p_3 + \cos t),$
ésta es una transformación canonoide con hamiltoniana

$$K(t, Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3) = 5P_1 + \operatorname{sen} tP_2 - 4t^3 P_3 + e^t Q_2 + e^t Q_3.$$

La matriz $S = (S_{\alpha}^{\beta})$ *tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} [p_1,q_1] & [p_2,q_1] & [p_3,q_1] & 0 & -[q_2,q_1] & -[q_3,q_1] \\ [p_1,q_2] & [p_2,q_2] & [p_3,q_2] & [q_2,q_1] & 0 & -[q_3,q_2] \\ [p_1,q_3] & [p_2,q_3] & [p_3,q_3] & [q_3,q_1] & [q_3,q_2] & 0 \\ 0 & [p_2,p_1] & [p_3,p_1] & [p_1,q_1] & [p_1,q_2] & [p_1,q_3] \\ -[p_2,p_1] & 0 & [p_3,p_2] & [p_2,q_1] & [p_2,q_2] & [p_2,q_3] \\ -[p_3,p_1] & -[p_3,p_2] & 0 & [p_3,q_1] & [p_3,q_2] & [p_3,q_3] \end{pmatrix}$$

en este caso
$[p_1, q_1] = 2p_1$
$[p_1, q_2] = 0$
$[p_1, q_3] = 0$
$[p_2, q_1] = 0$

$[p_2, q_2] = p_1(p_2 - 5t)$
$[p_2, q_3] = 0$
$[p_2, p_1] = (\frac{p_2^3}{15} - q_2)(5t - p_2)$
$[p_3, q_1] = 1$
$[p_3, q_2] = 0$
$[p_3, q_3] = -q_3 - e^t$
$[p_3, p_1] = 2p_1 - t^2$
$[p_3, p_2] = 0$
$[q_2, q_1] = 0$
$[q_3, q_1] = 0$
$[q_3, q_2] = 0$
entones

$$S = \begin{pmatrix} 2p_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1(p_2-5t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_3-e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{p_2^3}{15}-q_2)(5t-p_2) & 2p_1-t^2 & 2p_1 & 0 & 0 \\ (q_2-\frac{p_2^3}{15})(5t-p_2) & 0 & 0 & 0 & p_1(p_2-5t) & 0 \\ t^2-2p_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -q_3-e^t \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de S son

$$\lambda_1 = 2p_1,$$
$$\lambda_2 = p_1(p_2 - 5t)$$

y

$$\lambda_3 = -q_3 - e^t,$$

éstas son primeras integrales funcionalmente independientes y en involución.

En este caso, igual que en ejemplo anterior, vemos que el tensor torsion de Nijenhuis no se anula, en efecto

$$N_{23}^2 = (5t - p_2)(2p_1 - t_2)$$

y otras.

En el siguiente ejemplo tenemos un tensor torsión de Nijenhuis nulo.

Ejemplo 4.3. *Consideremos el sistema hamiltoniano con coordenadas canónicas* (q_1, q_2, p_1, p_2) *y función hamiltoniana*

$$H(t, q_1, q_2, p_1, p_2) = -5tq_1 + 3t^2q_2 + \sin t p_2.$$

Consideremos también la transformación de coordenadas

$Q_1 = \frac{q_1^2}{2},$

$Q_2 = p_2 + t^3 + e^t$,
$P_1 = p_1$,
$P_2 = p_2(1 - q_2 - \cos t) - t^3 q_2 - t^3 \cos t - e^t$, *ésta es una transformación canonoide con hamiltoniana*

$$K = -5tQ_1 + (3t^2 + e^t)Q_2 + e^t P_2.$$

Ahora calculemos la matriz S,
$[p_1, q_1] = -q_1$,
$[p_1, q_2] = 0$,
$[p_2, p_1] = 0$,
$[p_2, q_1] = 0$,
$[p_2, q_2] = -p_2 - t^3$ *y*
$[q_2, q_1] = 0$.

Luego

$$S = \begin{pmatrix} -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 - t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_1 & \\ 0 & 0 & 0 & -p_2 - t^3 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de S *son*

$$\lambda_1 = -q_1 \qquad y \qquad \lambda_2 = -p_2 - t^3,$$

éstas son primeras integrales funcionalmente independientes.

En este caso se verifica fácilmente que el tensor torsión de Nijenhuis se anula.

Conclusión

Podemos extender de manera natural al caso dependiente del tiempo, algunos resultados establecidos para sistemas autónomos. Vimos que para el caso dependiente del tiempo podemos definir de la misma manera que para sistemas autónomos, la compatibilidad de una segunda estructura simpléctica, probamos su equivalencia con la existencia de una transformación canonoide y vemos que podemos obtener primeras integrales, posiblemente dependientes explicitamente del tiempo, en involución.

Tenemos ejemplos donde tanto la hamiltoniana como las primeras integrales encontradas dependen explicitamente del tiempo. Con algunos de ellos, vimos que la nulidad del tensor torsión de Nijenhuis no es una condición necesaria para la involución de las primeras integrales encontradas.

Bibliografía

[1] R. BROUZET *About the existence of recursion operators for completely integrable Hamiltonian systems near a Liouville torus*, J. Math. Phys. 34, 1309-1313, 1993.

[2] R. BROUZET, P. MOLINO AND F. TURIEL *Géométrie des systèmes bihamiltoniens*, Indagationes, Montpellier Francia, 1993.

[3] M. CRAMPIN, F. A. E. PIRANI *Applicable Differential Geometry*, Cambridge University Press, ISBN 0521231906, 1986.

[4] A. DAS *Integrable Models*, World Scientific, Singapore, ISBN 9971509105, 1989.

[5] H. GOLSTEIN, C. POOLE AND J. SAFKO *Classical Mechanics.Third edition*, Addison Wesley, San Francisco, ISBN 8177582836, 2001.

[6] JOHN LEE *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, ISBN 0387954481, 2002.

[7] G.F TORRES DEL CASTILLO *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*, en preparación.

[8] G.F TORRES DEL CASTILLO *Applications and extensions of the Liouville theorem on constants of motion*, Rev. Mex. Fís. 57, 245-249, 2011.

[9] G.F TORRES DEL CASTILLO *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, Birkhäuser Science, New York, ISBN 9780817682705, 2012.

[10] G.F TORRES DEL CASTILLO *The generating function of a canonical transformation*, Rev. Mex. Fís. E 57, 158-163, 2011.

[11] G. VILASI *Hamiltonian Dynamics*, World Scientific, Singapore, ISBN 9810233086, 2001.