La derivada

La derivada

Se presenta la definición formal de la derivada de una función, así como su interpretación geométrica.

Definición formal de la derivada

Si $y = f(x)$ es función, la *derivada* de f en x es

$$f'(x) = \frac{f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Geometría

Una *recta tangente* a una curva es aquella que la corta (localmente) en un sólo punto. Sea h ”pequeño”. Entonces la recta que pasa por (x_0, y_0) y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ tiene pendiente

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

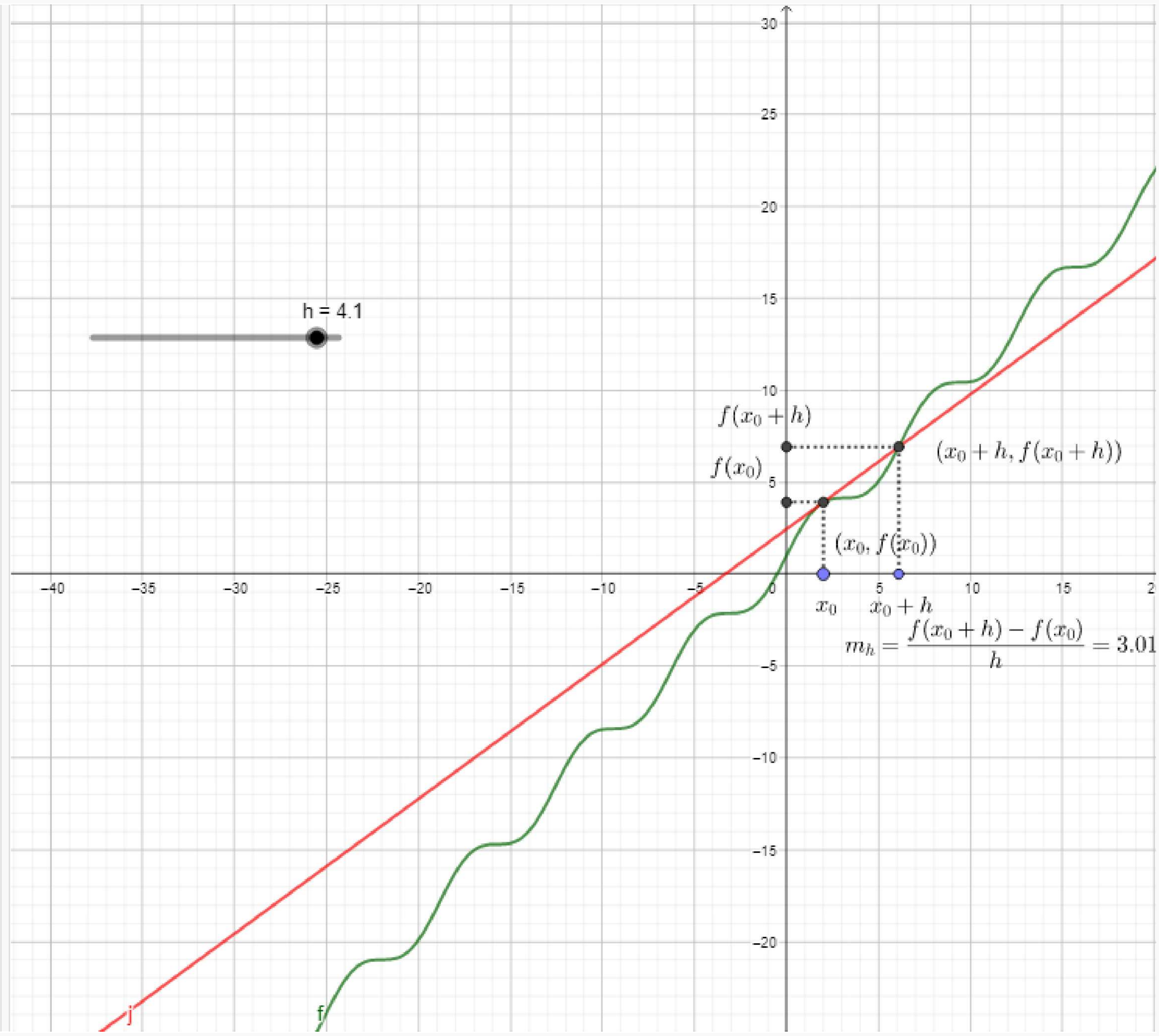
Luego, la *pendiente* de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto x_0 tiene que ser

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

que coincide con la derivada de $y = f(x)$ en x_0.

Actividad de GeoGebra

Con el mouse mover el pequeño círculo negro sobre la barra negra del lado superior izquierdo. Para agradar la imagen puede hacer click en C BAUTISTA.



Autoría: **C BAUTISTA <https://www.geogebra.org/m/gagscbny>**

Ejemplo

Halle la ecuación de la recta tangente a $y = x^2$ en $(3, 9)$.

Solución: Sea $f(x) = x^2$. La recta tangente en $(3, 9)$ tiene ecuación

$$y - 9 = m_t(x - 3)$$

donde

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3^2 + 6h + h^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6 + h) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación pedida es

$$y - 9 = 6(x - 3).$$

Ejemplo

Ejemplo

Si $f(x) = 1/(x-1)$, calcular $f\prime(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)-1} - \frac{1}{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-1-(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}}{\frac{h}{1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= -\frac{1}{(x-1)^2}, \text{ por continuidad.}
\end{aligned}$$

Tarea

Duración: 60:00

1. Encuentre la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto P: $y = (x-1)^2$, $P = (1, 0)$.
2. Derive usando la definición de derivada: $f(x) = x^2 + x$.

Rúbrica

En la siguiente tabla se presentan los criterios de calificación de la tarea.

Rúbrica para evaluar un trabajo escrito Aplicar

	4 Excelente	3 Satisfactorio	2 Mejorable	1 Insuficiente
Aspectos formales	Se presenta en plazo, cumple con las indicaciones de extensión mínima, portada, índice y estructura. (4)	Se presenta en plazo, cumple con casi todas las indicaciones de extensión mínima, portada, índice y estructura. (3)	Se presenta en plazo, cumple con algunas indicaciones de extensión mínima, portada, índice y estructura. (2)	No se presenta en plazo o no se cumple con las indicaciones de extensión mínima, portada, índice y estructura. (1)
Contenidos	Están bien organizados todos los contenidos y se ajustan al tema establecido. (4)	Están bien organizados casi todos los contenidos y se ajustan al tema establecido. (3)	Están bien organizados algunos de los contenidos y se ajustan al tema establecido. (2)	No están bien organizados los contenidos ni se ajustan al tema establecido. (1)
Expresión y ortografía	Está redactado de forma correcta y cumple con las normas ortográficas y gramaticales. (4)	Está redactado de forma correcta y cumple con casi todas las normas ortográficas y gramaticales. (3)	No tiene una redacción correcta, pero cumple con casi todas las normas ortográficas y gramaticales. (2)	No está redactado de forma correcta ni cumple con las normas ortográficas y gramaticales. (1)

Lectura adicional

Para una lectura adicional, como parte de la cultura matemática, se puede consultar el siguiente libro de acceso abierto:

Ekkehard Kopp, Making Up Numbers: A History of Invention in Mathematics Cambridge, UK: Open Book Publishers, 2020, **https://doi.org/10.11647/OBP.0236 <https://doi.org/10.11647/OBP.0236>**