Roy Gardner
Universidad de Indiana

JUEGOS PARA EMPRESARIOS Y ECONOMISTAS

Traducción de
Paloma Calvo
y
Xavier Vilà
Universidad Autónoma de Barcelona

Antoni Bosch editor

CONTENIDO

4 Juegos con *n* jugadores en forma normal

5 Juegos no cooperativos de mercado en forma normal

Segunda Parte
Juegos con estructura secuencial

6 Credibilidad y equilibrio perfecto en subjuegos

7 Juegos repetidos

8 Estabilidad evolutiva y racionalidad acotada

Tercera Parte
Juegos con información imperfecta

9 Juegos de señalización y equilibrio secuencial

10 Juegos entre un principal y un agente

Primera Parte
Teoría básica de los juegos

1. Una introducción a los juegos y a su teoría

1.1 ¿Qué es un juego?

En el lenguaje común, un **juego** es cualquier pasatiempo o diversión. Esta definición es muy amplia. Vamos a tratar de poner orden de alguna forma; podemos empezar por identificar las diferentes variedades de juegos. En primer lugar, están los juegos que se juegan sobre un tablero, los *juegos de mesa*. Éstos incluyen el Ajedrez, las Damas y el Monopoli.[1] Tanto en el Ajedrez como en las Damas hay dos jugadores, mientras que en el Monopoli puede haber desde dos hasta ocho jugadores. En el Ajedrez y las Damas, el resultado del juego es ganar, perder o tablas: o bien un jugador gana y el otro pierde, o bien ambos empatan. En el Monopoli, el jugador con más propiedades al final del juego es el ganador, todos los demás pierden. En segundo lugar, están los juegos en los que se utilizan cartas, los *juegos de cartas*. Aquí se incluyen el Solitario, el Póquer y el Blackjack. El Solitario es especial, ya que sólo tiene un jugador. El Póquer y el Blackjack pueden tener desde dos hasta siete jugadores (los estudiaremos en los dos próximos capítulos). En tercer lugar están los juegos que se desarrollan en una pantalla de vídeo contra un ordenador, los *videojuegos*. Estos juegos son más bien como el Solitario en cuanto que sólo hay un jugador humano. Los ordenadores pueden jugar muchos juegos; más adelante veremos cómo y por qué. Finalmente, están los juegos que se desarrollan sobre un campo o una pista, los *juegos deportivos*. Éstos incluyen el Béisbol, el Fútbol americano, el Baloncesto y el Hockey, que son los deportes profesionales más importantes en Estados Unidos. Los juegos deportivos son jugados por dos grupos de jugadores, los equipos contendientes, que están compuestos por individuos, los componentes de cada equipo.

A todo esto se le llama juegos, por lo que, de acuerdo con la teoría de las categorías de Aristóteles, deben tener alguna característica en común que haga que

[1] Los juegos, como las personas, tienen nombres propios, y por ello en este libro los escribimos con inicial mayúscula.

todos reciban el mismo nombre.[2] Vamos a ver cuál podría ser esta característica o conjunto de características. En primer lugar, todos los juegos tienen *reglas*. Las reglas indican lo que un jugador puede y no puede hacer. Al jugador que no cumple las reglas se le castiga (también de acuerdo con las reglas) y en casos extremos se le puede expulsar del juego. En segundo lugar, en todo juego *la estrategia es importante*. Existen estrategias buenas y malas, y a los jugadores se les puede criticar (y son criticados) por escoger malas estrategias. Una de las tareas de la teoría de juegos es diferenciar entre buenas y malas estrategias. En tercer lugar, existe un *resultado* del juego; por ejemplo, un jugador gana y el otro pierde. En cuarto lugar, este resultado depende de las estrategias escogidas por cada uno de los jugadores, fenómeno éste que llamamos **interdependencia estratégica**. Incluso una mala estrategia puede resultar ganadora si el contrario escoge una aún peor. Combinamos estas características para definir un juego como *cualquier situación gobernada por reglas con un resultado bien definido caracterizado por una interdependencia estratégica*. Esto describe la categoría aristotеliana a la que pertenecen los juegos.

Existen muchas cosas a las que no se les llama juegos en el lenguaje común y que satisfacen esta definición. Considere el caso de varias empresas compitiendo en el mismo sector. Existen normas que regulan esta competencia, entre ellas leyes y costumbres mercantiles, que establecen lo que una empresa puede y no puede hacer. Una empresa que no cumple las normas puede ser castigada, y en casos extremos como la quiebra, puede incluso ser expulsada del juego. El resultado de la competencia entre empresas es normalmente algo observable, como lo que cada empresa gana o la cuota de mercado que tiene cada una. Estos resultados aparecen normalmente en los informes financieros de una empresa. Como veremos, las estrategias de una empresa pueden ser los precios, las cantidades, la publicidad, en qué mercado operar, qué tipo de contratos ofrecer a sus empleados, etcétera. Finalmente, y ésta es la verdad más importante en este libro, *el resultado que obtiene una empresa cualquiera no sólo depende de la estrategia que escoge, sino también de las estrategias que sus competidores eligen*. Una empresa puede tener la mejor gama de productos del mundo y aun así ser destrozada por la competencia si sus estrategias no son buenas. Cuando las empresas compiten en un mercado se mueven en un entorno regido por normas, con resultados bien definidos caracterizados por una interdependencia estratégica. Tenemos un nombre para esto: es un *juego*, en este caso un **juego empresarial**. Las empresas que compiten en un mercado participan en un juego tanto como los jugadores que se sientan alrededor de una mesa de Póquer. Es cierto, sin embargo, que casi siempre una empresa pone en juego sumas mucho más elevadas, pero lo que empezó como una metáfora a principios de siglo se ha convertido en una verdad categórica.

[2]Ver Aristóteles, *Categories and De Interpretatione*, J. L. Ackrill, ed., Oxford: Oxford University Press, 1963.

Utilicemos un ejemplo que satisface los dos aspectos, el literal y el metafórico, de un juego: el de un equipo profesional, los Chicago Bulls.[3] Los Bulls juegan al baloncesto profesional en la National Basketball Association (NBA), y lo hacen muy bien; han ganado el campeonato tres años seguidos. Los Bulls también son una empresa (propiedad de inversores privados principalmente del área de Chicago) que pretende ganar dinero cada año. Cuantos más partidos ganen los Bulls en la pista, más dinero ganan los propietarios por la venta de entradas, derechos de emisión y concesiones. Aunque ganar al baloncesto no es lo mismo que ganar en los negocios, ambas cosas están estrechamente relacionadas en este caso.

Otro ejemplo, que nada tiene que ver con el mundo de los deportes, es la industria de las bebidas de cola. La cola fue inventada en Atlanta en 1886. Más tarde, su inventor fundó la Coca-Cola Corporation. Desde los años veinte, Coca-Cola y Pepsi-Cola han dominado, con las cuotas de mercado más altas y los beneficios mayores, el mercado estadounidense y han luchado cuerpo a cuerpo por el negocio de la cola. La competencia entre ellas, comúnmente conocida como las guerras de la cola,[4] ha incluido guerras de precios, competencia en nuevos productos (Pepsi Clear es la última novedad en Estados Unidos), nuevos envases (la botella de plástico de 2 litros) y campañas publicitarias (¡Es Coca-Cola!, La generación Pepsi). Lo que Pepsi gane con sus actividades depende de lo que Coca-Cola haga y viceversa. Ésta es la manifestación en el mercado de la interdependencia estratégica.

Pero el mundo de los negocios no es el único terreno en el que encontramos juegos en un sentido amplio del término; también aparecen en el corazón de la economía. Considere unas negociaciones, como las que hay entre la Casa Blanca y el Congreso estadounidense sobre temas de política económica, el presupuesto por ejemplo; o entre la Casa Blanca y la Reserva Federal sobre política monetaria. Considere también unas negociaciones sobre temas económicos a nivel internacional, como las que hay entre los países del Grupo de los Siete sobre comercio y finanzas internacionales.[5] **Negociaciones económicas** como éstas tienen todas las características de un juego. Existen reglas (leyes interiores e internacionales) que delimitan lo que cada una de las partes puede hacer. La estrategia es importante; si alguien está ausente de la negociación, no es de extrañar que sus intereses no sean representados. Existe un resultado claramente definido: el *statu quo* si las negociaciones se rompen o algún tipo de acuerdo si las negociaciones concluyen felizmente. Finalmente, el resultado de una negociación depende no sólo de lo que una parte haga, sino también de

[3] Todos los ejemplos de este libro provienen del mundo real; nunca se utilizan en este libro ejemplos abstractos.

[4] El título es de J. C. Louis, *The Cola Wars*, Nueva York: Everest House, 1980.

[5] El Grupo de los Siete está formado por los siete países más desarrollados del mundo: Estados Unidos, Japón, Alemania, Francia, Reino Unido, Italia y Canadá. Sus representantes se reúnen frecuentemente para negociar temas relativos a las relaciones económicas que existen entre ellos.

lo que haga la otra parte. Varias formas de negociación y arbitrio (todos los juegos con al menos un elemento de cooperación) se estudiarán en la última parte del libro.

1.2 ¿Qué es la teoría de juegos, y por qué?

La **teoría de juegos** es la ciencia que estudia los juegos con el rigor necesario para resolverlos. La teoría de juegos es un producto del siglo XX, la creación intelectual de uno de los grandes cerebros del siglo, John von Neumann.[6] Von Neumann descubrió una de las regularidades más importantes de los juegos, la solución de los juegos de suma cero con dos jugadores, que se estudiará en el capítulo 2. Proporcionó el marco que usamos en este libro para estudiar los juegos más complejos. Junto con Oskar Morgenstern, su compañero de exilio contra el fascismo, Von Neumann fue el primero en resolver juegos aplicados a la empresa y a la economía.[7]

La teoría de juegos se parece mucho al cálculo diferencial. Utilizamos el cálculo diferencial para resolver problemas de maximización y minimización. Utilizamos la teoría de juegos para resolver juegos. Así como la solución a un problema de maximización debe indicar cuál es el valor máximo y cómo obtenerlo, una solución a un juego debería indicar a cada jugador qué resultado esperar y cómo alcanzarlo. En sus orígenes, la teoría de juegos era matemática aplicada, y este libro pretende hacerla lo más asequible posible basándose en el dicho de que al que aprende hay que decirle la verdad, pero no toda la verdad. Si usted está aprendiendo y llega a dominar este libro, estará listo para textos más avanzados, como las lecturas adicionales que se sugieren al final. De momento, se le ahorrarán al lector las sutilezas teóricas y la jerga profesional que ni necesita ni puede aún valorar. La teoría de juegos es una disciplina que, por sí misma, se complica rápidamente. Piense en ella como una piscina en la que la parte menos profunda ya le cubre.

No sólo la teoría de juegos se parece mucho al cálculo diferencial; en realidad, utiliza el cálculo como parte del proceso de resolución de un juego. Esto no debería sorprender. Los participantes en un juego intentan hacerlo lo mejor que pueden para conseguir el mejor resultado posible; se trata por tanto de un problema de

[6] Además de crear la teoría de juegos, Von Neumann proporcionó también las bases matemáticas de la mecánica cuántica, diseñó las lentes de implosión para la bomba atómica y creó la arquitectura de los ordenadores. Una excelente biografía es Norman McRae, *John von Neumann*, Nueva York: Pantheon Books, 1992.

[7] El título de su obra magna, John von Neumann y Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press, 1944, muestra de qué forma su trabajo se inspiró en la posibilidad de desarrollar aplicaciones en economía. Más tarde, después de la creación de la teoría de juegos, se vio que algunos economistas anteriores, entre ellos Cournot, Bertrand, Edgeworth y Stackelberg, también habían encontrado soluciones a juegos.

maximización, uno para cada jugador. Un juego con tres jugadores es como tres problemas de maximización a la vez. Esto quiere decir que resolver un juego es más difícil que resolver un problema de maximización, mucho más difícil, y por ello tiene su propia teoría.

Aunque la teoría de juegos empezó siendo matemática aplicada, se ha convertido en una forma de razonamiento dominante en el mundo de la empresa y la economía. El conocido macroeconomista Robert Lucas sostiene que la contribución más importante a la macroeconomía desde Keynes ha sido el resultado de formular los problemas macroeconómicos como juegos y su posterior resolución.[8] Es fácil ver por qué esto es verdad. Durante el apogeo de la macroeconomía keynesiana, los economistas diseñaban políticas para que las utilizaran los gobiernos suponiendo que las expectativas de la gente, del gobierno, de otros gobiernos, etcétera, no se verían afectadas. Este supuesto es equivalente a creer que la gente y los demás gobiernos no participan en el juego. Ahora se sabe más. Las expectativas de la gente, que se manifiestan por ejemplo en las decisiones de inversión y financieras que se toman en el sector privado, tienen un enorme impacto sobre el resultado de la política económica. Cuando algo es un juego, y la economía ciertamente lo es, se ha de tratar como un juego si realmente se quiere entender del todo.

Otro ejemplo, que aparece tanto en la empresa como en la economía, es el llamado *diseño de mecanismos*. Suponga que quiere alcanzar un cierto objetivo, por ejemplo, recaudar un billón y medio de dólares en impuestos, y que quiere conseguir ese objetivo de la forma menos onerosa posible. Necesita diseñar un mecanismo (en este caso un sistema impositivo) para lograr dicho objetivo. Este proceso define un juego en la medida en que los contribuyentes tienen estrategias para responder a las diferentes figuras impositivas. Si no tiene en cuenta las estrategias de los contribuyentes en su mecanismo, puede estar seguro de que éste fracasará estrepitosamente; es como si el Chicago Transit Authority[9] pensara que puede doblar sus ingresos doblando las tarifas. En este libro estudiaremos un tipo particular de diseño de mecanismos, los contratos basados en incentivos, en el capítulo 10.

Existen varias razones puramente egoístas, más allá del deseo por conocer la verdad que esta ciencia puede ofrecer, para estudiar la teoría de juegos. Estas razones podrían ser de utilidad algún día para su trabajo o su carrera, aun en el caso de que usted no vaya a ser el próximo Robert Lucas. En primer lugar, la teoría de juegos puede mejorar su toma de decisiones estratégicas. Le hace más consciente de cuándo se encuentra ante una situación en la que la estrategia es decisiva y, aún más importante, le hace más consciente de las sutilezas estratégicas de sus

[8]Lucas es uno de los arquitectos principales de la revolución de las expectativas racionales y Premio Nobel de Economía en 1995. Véase su *Models of Business Cycles*, Oxford: Basil Blackwell, 1987.

[9]Ente público que dirige el sistema de transportes metropolitanos del área de Chicago. (N. del T.).

competidores u oponentes. En segundo lugar, puede mejorar su capacidad para dirigir un negocio y para evaluar cambios en política económica. Las frases "ventaja competitiva", "precios bajos cada día" y "maldición del ganador" tendrán mucho más sentido después de que se hayan explicado desde una perspectiva estratégica (en los capítulos 2, 3 y 11 respectivamente). Finalmente, la teoría de juegos puede ayudarle a ser un mejor economista o un mejor directivo. La teoría de juegos es el paradigma central de la economía y las finanzas. Contiene o explica todos los términos de moda como fallos del mercado, credibilidad, contratos con incentivos, OPAs hostiles y formación de coaliciones, por nombrar sólo unos cuantos. Y, si le interesan estos temas, la teoría de juegos puede convertirle en un mejor jugador de Póquer. Por supuesto, si ninguna de estas cosas le interesa, entonces probablemente estudiar teoría de juegos no sea para usted.

Como cualquier otra teoría que utiliza las matemáticas, no existe un camino fácil para entender la teoría de juegos. Es necesario seguir los razonamientos, entender las demostraciones, realizar los ejercicios (los hay al final de cada capítulo), estudiar los ejemplos y pensar todo el rato en términos de su propia vida y su propio trabajo. Si se esfuerza, acabará el libro sabiendo cómo formular y resolver un buen arsenal de juegos y, aún más importante, sabiendo cómo pensar sobre juegos de forma inteligente. No será presa fácil de argumentos estratégicamente poco sólidos; al contrario, sabrá qué preguntas capciosas hacer y cuándo hacerlas, ante comentarios absurdos, desde una perspectiva estratégica.

El libro está organizado de la siguiente manera: la primera parte cubre la materia básica, las ideas y técnicas que se utilizan en la teoría de juegos. La segunda parte estudia los juegos dentro de juegos (subjuegos), los juegos repetidos y los juegos fuera del equilibrio. La tercera parte se preocupa especialmente de los juegos con información imperfecta. La cuarta parte se centra en los juegos en los que vale la pena cooperar (negociación y arbitraje). La quinta parte trata de la relación entre juegos, mercados y política, y presenta su relación con la micro y la macroeconomía.

Hay mucho material que ver, así que vamos a empezar. Teoría es algo que se hace, no algo que se dice que se hace. Empezamos con los juegos más simples posibles, aquellos con un único jugador e información perfecta.

1.3 Juegos con un solo jugador e información perfecta

Los juegos con un único jugador constituyen el caso más simple posible. Tales juegos son *degenerados* en el sentido que, aun teniéndose que tomar decisiones estratégicas, no existe interdependencia estratégica entre jugadores. Un Solitario constituye un claro ejemplo; es usted, el jugador, contra una baraja de cartas. En cualquier ciencia, es aconsejable empezar con problemas simples que levanten la moral. La resolución de estos problemas le preparará para atacar otros más difíciles. Por este motivo empezamos con juegos de un jugador.

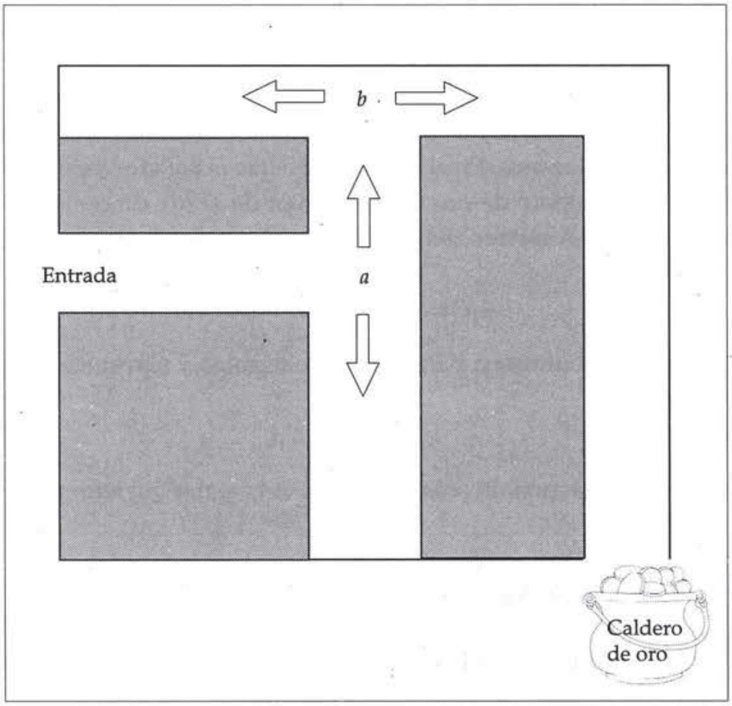

Figura 1.1. El laberinto.

La información de que disponen los jugadores tiene gran importancia para determinar lo que pueden o deben hacer. Un jugador tiene **información perfecta** si conoce exactamente lo que ocurre cada vez que tiene que tomar una decisión. Un juego tiene información perfecta si cada jugador tiene información perfecta. El Ajedrez es un juego con información perfecta. Mientras los dos jugadores puedan ver el tablero, pueden ver exactamente lo que pasa cada vez que tengan que jugar.[10] Si algún jugador no tiene información perfecta, el juego es de **información imperfecta**. El Póquer es un juego con información imperfecta. Un jugador no sabe (a menos que haga trampas) qué cartas se le han repartido a otro jugador. Los juegos con información imperfecta son muy importantes, pero más difíciles de resolver que los juegos con

[10]Existe una versión de Ajedrez, llamada *Kriegspiel*, en la que los jugadores no ven el tablero. *Kriegspiel*, por tanto, tiene información imperfecta.

información perfecta. En esta sección estudiamos juegos con información perfecta; los juegos con información imperfecta los abordaremos más adelante.

Como paradigma de los juegos con un jugador e información perfecta, considere el caso de un jugador a punto de entrar en el laberinto de la figura 1.1. Asignemos a este jugador un número, por ejemplo el 1. Aunque no es necesario identificar a un único jugador con un número, los números resultan útiles para identificar jugadores cuando existen varios. La acción empieza cuando el jugador 1 entra en el laberinto. El objetivo del jugador 1 es llegar al caldero de oro al final del laberinto sin chocar antes con alguno de los muros. En el momento en que el jugador tope con una pared el juego se acaba. El caldero de oro tiene un valor de D (de dinero) dólares, y si el jugador lo consigue, el resultado del juego es D. El jugador 1 gana la cantidad D, lo que denotamos como

$$u_1(\text{caldero de oro}) = D$$

Si el jugador 1 choca contra una pared, el juego termina y el resultado es 0. Esto lo denotamos como

$$u_1(\text{pared}) = 0$$

En este libro, y en la mayoría de ocasiones en la vida real, el jugador prefiere cuanto más dinero mejor:

$$u_1(\text{caldero de oro}) = D > 0 = u_1(\text{pared})$$

Éstos son los dos resultados posibles cuando el jugador entra en el laberinto de la figura 1.1.

Vamos ahora a andar con el jugador 1 por el laberinto. El jugador 1 llega a un *punto de decisión*, indicado por a, poco después de haber entrado en el laberinto. En este punto de decisión, el jugador 1 tiene dos opciones: ir a la izquierda o ir a la derecha. Si va a la derecha, topará con una pared y el juego se acabará. Si va a la izquierda, se encontrará con un segundo punto de decisión, indicado por b. En este punto de decisión, el jugador 1 puede ir o bien a la derecha o bien a la izquierda. Si va a la izquierda, encontrará un muro y acabará el juego. Si el jugador 1 va a la derecha, alcanzará el caldero de oro.

Veamos ahora cómo la teoría de juegos estudia este laberinto. La teoría de juegos tiene una forma precisa de describir cualquier juego, una descripción llamada la **forma extensiva** del juego. La figura 1.2 muestra la forma extensiva del laberinto de la figura 1.1. Al juego lo llamamos ahora El caldero de oro. Andaremos por la forma extensiva de El caldero de oro y veremos después algunas definiciones.

El desarrollo de un juego consiste en las decisiones que el jugador toma. Por ello empezamos la descripción de El caldero de oro con el primer punto de decisión, a, tal como aparece en el círculo con la a y el 1 a la izquierda de la figura 1.2. Un círculo

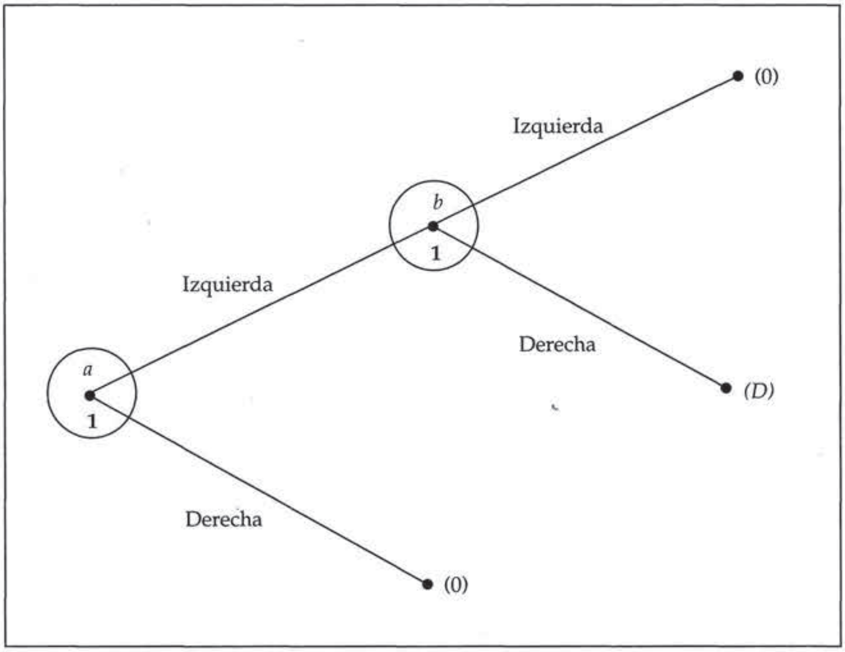

Figura 1.2. Caldero de oro, forma extensiva.

significa que algún jugador tiene que tomar una decisión en ese punto. El número del jugador al que corresponde decidir, en este caso el jugador 1, aparece en el interior del círculo. De este punto de decisión salen dos líneas rectas. Estas rectas representan las dos opciones del jugador 1 en el punto de decisión *a*: izquierda o derecha. La línea denominada Derecha conduce a una pared, haciendo que el juego se acabe. El final del juego se representa con un *punto terminal*. Cada punto terminal lleva asociado un resultado. Como topar con una pared supone ganar 0 dólares, el resultado 0 es el que se asocia a ese punto terminal. Si el jugador 1 va a la izquierda, llegará a otro punto de decisión, *b*. En este punto de decisión, el jugador 1 tiene dos opciones, izquierda o derecha. Estas opciones (también llamadas jugadas) se representan nuevamente por medio de rectas que salen del punto de decisión *b*, denominadas Izquierda y Derecha. Si el jugador 1 va a la izquierda, topará de nuevo con una pared (un punto terminal) y el resultado será cero. Si va a la derecha, saldrá del laberinto y conseguirá el caldero de oro; el resultado *D*.

La forma extensiva de la figura 1.2 contiene toda la información sobre El caldero de oro que se necesita para resolverlo. En términos matemáticos, la forma extensiva és un *diagrama de árbol*, llamado así porque parece un árbol si se mira a la derecha desde el punto de partida. Existen términos especiales para los elementos de la forma extensiva. Los puntos destacados del árbol reciben el nombre de *nodos*. Todo juego comienza con un *nodo inicial*. En El caldero de oro, éste es el nodo a. Un nodo con un círculo alrededor y el número de un jugador en su interior recibe el nombre de **conjunto de información**. Un conjunto de información muestra a qué jugador le corresponde jugar y qué es lo que el jugador sabe en ese momento. Las rectas que salen de cada nodo se llaman *ramas*, siguiendo con la metáfora del árbol. Los resultados correspondientes a cada uno de los nodos terminales reciben el nombre de *ganancias*. El caldero de oro tiene información perfecta: en cualquier momento en que hay que tomar una decisión, es decir, en los nodos a y b, el jugador 1 sabe exactamente en qué lugar del laberinto se encuentra. Veremos más adelante cómo representar información imperfecta en un diagrama de árbol.

Existe un método para resolver El caldero de oro y otros juegos similares que siempre funciona: empezar desde el caldero de oro e ir hacia atrás hasta llegar a la entrada. El análisis de un juego empezando por el final hasta llegar al principio para resolverlo recibe el nombre de **inducción hacia atrás** y es el procedimiento que se emplea para resolver cualquier juego de un jugador con información perfecta. Veamos cómo utilizar la inducción hacia atrás para resolver El caldero de oro (véase la figura 1.3).

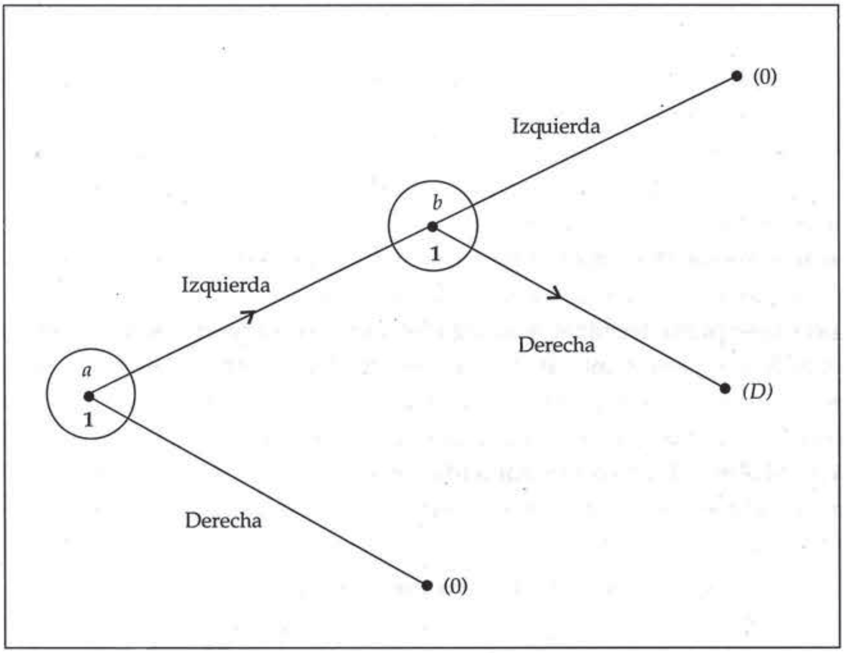

Figura 1.3. Caldero de oro, inducción hacia atrás.

Empecemos por el último punto de decisión del juego, el nodo b. En este nodo, el jugador 1 conseguirá el caldero de oro si va a la derecha. Esto lo indicamos con una flecha sobre la rama que sale del nodo b denominada Derecha. El jugador 1 debería esforzarse ahora por llegar al nodo b, ya que esto le pone en situación de conseguir el oro. La única forma de alcanzar el nodo b es yendo a la izquierda en el nodo a. Indicamos esto con una flecha sobre la rama que sale del nodo a denominada Izquierda. Tenemos ahora una trayectoria completa desde el nodo inicial a hasta el nodo terminal donde está el caldero de oro:

ir a la izquierda en a, ir a la derecha en b

Este plan de juego resuelve El caldero de oro y consigue una ganancia de D, el caldero de oro. Acabamos de solucionar el primer juego.

Es posible obtener una ganancia de cero en El caldero de oro; lo único que hace falta es una mala estrategia. Una **estrategia** es un plan de acción completo en un juego determinado. La estrategia buena en El caldero de oro conduce al caldero de oro. Existen otras tres estrategias en este juego, todas ellas malas porque conducen a una pared y la ganancia que se obtiene es cero. Para construir una estrategia, se identifican primero cada una de las decisiones que un jugador debe tomar. En este caso, el jugador 1 tiene que tomar una decisión en el nodo a y también en el nodo b. En el nodo a, el jugador 1 tiene dos opciones, y en el nodo b también dos opciones. En El caldero de oro se establece una estrategia rellenando los dos espacios en blanco en:

__ en a, __ en b

Como existen dos maneras posibles de llenar el espacio en blanco en a y también dos maneras en b, existen $(2) \times (2) = 4$ estrategias en El caldero de oro. Ya hemos identificado la estrategia buena. He aquí las malas:

ir a la derecha en a, ir a la derecha en b

ir a la izquierda en a, ir a la izquierda en b

ir a la derecha en a, ir a la izquierda en b

Una buena jugada evita estas tres estrategias.

Hemos visto que la forma extensiva de El caldero de oro consiste en nodos, ramas, nodos terminales y ganancias. La teoría de juegos tiene otra forma de describir El caldero de oro. Esta descripción, que se basa sólo en estrategias, se denomina la **forma normal**. La forma normal de un juego con un jugador es un listado de cada una de las estrategias del jugador con su correspondiente ganancia. La figura 1.3 muestra El caldero de oro en forma normal. En ella se listan las estrategias del jugador 1 y la ganancia, 0 o D, junto a cada una de ellas. La forma normal codifica toda la información de la forma extensiva en una matriz, en este caso una matriz con cuatro filas y una columna. En esta codificación resulta fácil encontrar la solución a

Jugador 1	
Izquierda en a, izquierda en b	0
Izquierda en a, derecha en b	D
Derecha en a, izquierda en b	0
Derecha en a, derecha en b	0

Figura 1.4. Caldero de oro, forma normal.

El caldero de oro: escoger la estrategia (ir a la izquierda en a, ir a la derecha en b) que proporciona una ganancia de D.

El lector debería estar preguntándose por qué existen dos representaciones, forma normal y forma extensiva, del mismo juego. Algunos puristas creen que sólo deberíamos estudiar juegos en forma extensiva. Von Neumann y Morgenstern, los creadores de la distinción, pensaron que el estudio de los juegos en forma normal facilitaría su comprensión. Este libro recomienda un enfoque pragmático: escoge la forma que sea más fácil de escribir y resolver. Normalmente, ésta es la forma normal. No obstante, si el juego ya viene dado en forma extensiva, puede resolverse en esa forma sin preocuparse de la forma normal. En juegos de un jugador con información perfecta, se obtiene la misma solución tanto en la forma normal como en la extensiva.[11]

1.4 Utilidad

Antes de adentrarnos en los juegos de un jugador con información imperfecta, necesitamos un nuevo concepto. Este concepto tiene un nombre conocido, utilidad, que

[11] En el capítulo 6 se muestra hasta qué punto esto es cierto en juegos más complicados.

en su sentido original nos dice cómo comparar manzanas con naranjas. "Si la utilidad de cinco manzanas es mayor que la de cinco naranjas, entonces el consumidor prefiere cinco manzanas a cinco naranjas si los precios son los mismos". Sin embargo, con información imperfecta, un jugador tiene que comparar más cosas que manzanas y naranjas; tiene que comparar distribuciones de probabilidad. Esto no es fácil. A la gente le cuesta hacer este tipo de comparaciones.

Para ver por qué son inevitables las comparaciones entre distribuciones de probabilidad cuando la información es imperfecta, considere el problema de comprar una acción en la bolsa. No se sabe si el valor de la acción subirá, se quedará igual o si bajará. Sí que se sabe, no obstante, que cada uno de estos tres sucesos ocurre con una cierta probabilidad. Para cada acción existe una cierta probabilidad de que la acción suba (digamos 1/4), una probabilidad de que no varíe (digamos 3/20) y una probabilidad de que baje (3/5). La gran duda es qué acción comprar. Si identificamos cada acción con su correspondiente distribución de probabilidad, la respuesta es: "Compra la acción que proporcione mayor utilidad, si todas las acciones se venden al mismo precio". En vez de comparar manzanas con naranjas, se compara la distribución de probabilidad de la acción X con la distribución de probabilidad de la acción Y. No obstante, para poder realizar recomendaciones prácticas sobre la compra de acciones, debemos antes dotar de significado a la frase "utilidad de una distribución de probabilidad".

La manera propuesta por Von Neumann y Morgenstern de asignar utilidad a una distribución de probabilidad en teoría de juegos, recibe el nombre de **utilidad esperada**.[12] Como motivación de la utilidad esperada, consideremos más detalladamente el problema de escoger una acción de bolsa. Suponga que todas las acciones, que queremos ordenar de acuerdo con nuestras preferencias, tienen un mismo precio de un dólar por acción y que existen tres sucesos posibles: la acción sube a dos dólares por acción, la acción se queda en un dólar por acción, o la acción cae hasta cero dólares por acción. Denotamos las probabilidades de cada uno de estos tres sucesos mediante $p(\$2)$, $p(\$1)$ y $p(\$0)$. Por ejemplo, la acción que sube con probabilidad 1/4, no varía con probabilidad 3/20 y baja con probabilidad 3/5, se identifica con la distribución de probabilidad $\mathbf{p} = [p(\$2), p(\$1), p(\$0)]$, donde

$$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{3}{5}\right)$$

Cualquier vector $\mathbf{p}$ cuyos componentes sean no negativos y sumen 1 es una distribución de probabilidad y puede representar una acción de bolsa.

[12] La idea de la utilidad esperada se remonta al matemático Bernoulli, quien escribió un artículo en latín sobre el juego con apuestas en 1738.

El conjunto de todas las acciones de bolsa posibles, identificadas según sus distribuciones de probabilidad, se muestra en el triángulo equilátero de la figura 1.5. En los tres vértices del triángulo se encuentran tres acciones "seguras":

$(1,0,0)$: la acción sube a 2 dólares con probabilidad 1
$(0,1,0)$: la acción se queda en 1 dólar con probabilidad 1
$(0,0,1)$: la acción baja a 0 dólares con probabilidad 1

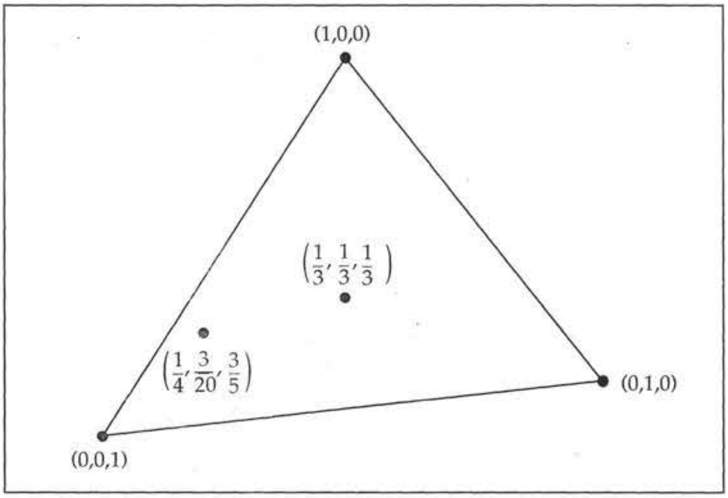

Figura 1.5. Triángulo equilátero de distribuciones de probabilidad.

El centro de gravedad del triángulo es la acción en la que cada posible valor tiene la misma probabilidad:

$$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Representamos también una acción cercana a ésta $(1/4, 3/20, 3/5)$. Cada punto del triángulo equilátero corresponde a una distribución de probabilidad, y queremos asociar una utilidad a cada una de estas distribuciones de probabilidad.

En primer lugar, asignamos utilidades a las acciones "seguras". Para cualquier asignación de utilidades,

$$u(2) > u(1) > u(0)$$

La utilidad esperada extiende este orden a todas las distribuciones de probabilidad de la siguiente manera: denotemos con $Eu(\mathbf{p})$ a la utilidad esperada de la distribución de probabilidad $\mathbf{p}$. Tendremos:

$$Eu(\mathbf{p}) = p(\$2)u(2) + p(\$1)u(1) + p(\$0)u(0)$$

Nótese en primer lugar que la utilidad esperada extiende la ordenación de las acciones "seguras":

$$Eu(1,0,0) = 1u(2) + 0 + 0 > Eu(0,1,0) = 0 + 1u(1) + 0 > 0 + 0 + 1u(0)$$

Además, la utilidad esperada muestra cómo las curvas de indiferencia trazadas sobre las distribuciones de probabilidad son líneas rectas paralelas. Para ilustrar esto, suponga que

$$u(2) = 2, u(1) = 1 \text{ y } u(0) = 0$$

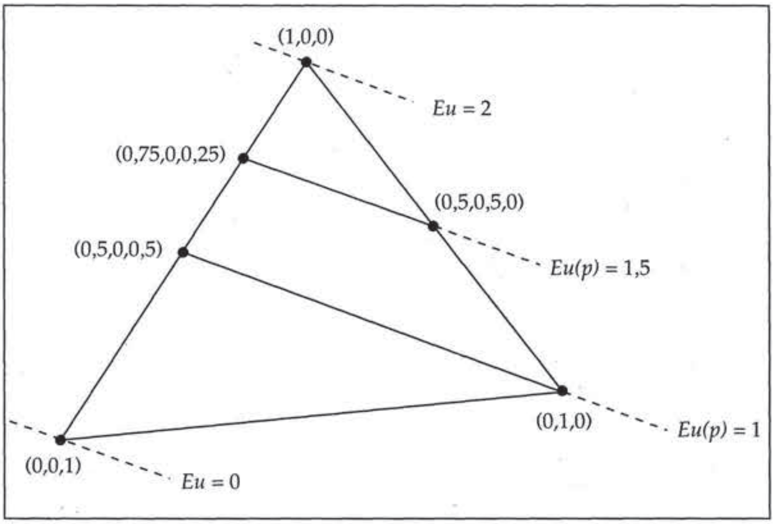

Figura 1.6. Utilidad esperada, curvas de indiferencia.

Todas las acciones con $Eu(\mathbf{p}) = 1$ están sobre la línea recta que conecta las distribuciones de probabilidad $(0,1,0)$, $(1/3,1/3,1/3)$ y $(1/2,0,1/2)$, como en la figura 1.6. Todas las acciones con $Eu(\mathbf{p}) = 1{,}5$ están sobre la línea recta que conecta las distribuciones de probabilidad $(1/2,1/2,0)$ y $(3/4,0,1/4)$. Estas dos rectas son paralelas.

La utilidad esperada, como ordenación de distribuciones de probabilidad, tiene varias propiedades atractivas. En primer lugar, las curvas de indiferencia nunca se cortan, por lo que la ordenación es racional. En segundo lugar, las curvas de indiferencia crecen hacia la derecha. Cuanto más cerca esté una distribución de probabilidad de la mejor acción "segura", mayor será su utilidad. En tercer lugar, las curvas de indiferencia y la ordenación que representan son invariantes ante transformaciones lineales positivas de la utilidad de las acciones "seguras". Esto es, si añadimos una constante a las utilidades de las acciones "seguras" o multiplicamos todas ellas por la misma constante, las curvas de indiferencia no varían. Si

$$u(1) = 0{,}5u(2) + 0{,}5u(0)$$

como en la figura 1.6, entonces también tendremos que

$$u(1) + 1 = 0{,}5[u(2) + 1] + 0{,}5[u(0) + 1] = 0{,}5u(2) + 0{,}5u(0) + 1$$

después de transformar la utilidad de las acciones "seguras" añadiendo 1 y

$$2u(1) = 0{,}5[2u(2)] + 0{,}5[2u(0)] = 2[0{,}5u(2) + 0{,}5u(0)]$$

después de transformar la utilidad de las acciones "seguras" multiplicando por 2. Por tanto, las utilidades esperadas son *utilidades medibles*, exactamente en el mismo sentido que la temperatura es medible. Fijemos el cero y el uno en la escala de utilidad:

$$u(0) = 0; \quad u(1) = 1$$

Entonces, para medir $u(2)$, hallemos la distribución de probabilidad $\mathbf{p}= [p(\$2), 0, p(\$0)]$ tal que

$$p(\$2)u(2) + p(\$0)u(0) = u(1)$$

Sustituyendo el cero y el uno en la escala de utilidad tenemos

$$p(\$2)u(2) = u(1) = 1$$

La medida de la utilidad buscada es

$$u(2) = \frac{1}{p(\$2)}$$

Si un jugador es indiferente entre tener un dólar "seguro", o tener dos dólares con probabilidad $p(\$2)$ o cero dólares con probabilidad $p(\$0)$, entonces el ratio $\frac{1}{p(\$2)}$ mide la utilidad que para este jugador representa el tener dos dólares.

Estas tres propiedades de las curvas de indiferencia (nunca se cortan, crecen hacia la derecha y representan una utilidad medible) son muy atractivas. En particular, nos permiten enfrentarnos a juegos de un jugador con información imperfecta.

1.5 Juegos de un jugador con información imperfecta

En un juego de un jugador, la información es imperfecta si el jugador, en el momento de tomar una decisión, no sabe dónde está en el juego. A causa de fuerzas que están fuera del control del jugador (llamamos azar a esas fuerzas), éste juega a ciegas. Para poder incluir información imperfecta en un juego necesitamos dos "mecanismos" adicionales, uno para representar el azar y otro que muestre los efectos del azar sobre el juego.

La figura 1.7 muestra gráficamente estos dos "mecanismos". Al principio del juego, en el nodo inicial a, vemos el número cero en el interior del círculo. El jugador número cero siempre representa el azar. Un conjunto de información asignado al azar significa que es el azar el que ha de realizar su jugada. Por ejemplo, el reparto de cartas al principio de un juego de cartas es una jugada del azar, como también lo es el lanzamiento de una moneda al principio de un partido de fútbol. Las ramas que parten del nodo a representan las dos direcciones que el azar puede tomar. Estas ramas tienen denominaciones especiales, p(buenas) y p(malas), que representan probabilidades. Lo que el azar hace es crear una distribución de probabilidad. Con probabilidad p(buenas), pasa algo bueno, con probabilidad p(malas), pasa algo malo. En este caso, buenas y malas se refieren a condiciones buenas y malas para los negocios.

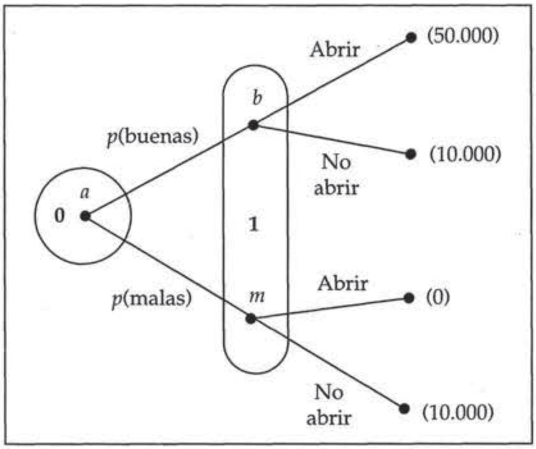

Figura 1.7. Pequeño negocio, información imperfecta.

Una vez que el azar ha realizado su jugada, es el turno del jugador 1. Desgraciadamente para él, no sabe qué es lo que hizo el azar. La información del jugador 1 es imperfecta. El azar puede haber jugado hacia el nodo bueno b o hacia el nodo malo m en el conjunto de información del jugador 1. Cualquier conjunto de información que contiene más de un nodo refleja que el jugador al que le corresponde tomar la decisión tiene información imperfecta. Visualmente, se puede decir si un juego es de información imperfecta si tiene al menos un conjunto de información con dos o más nodos. Por tanto, el juego mostrado en la figura 1.7, llamado Pequeño negocio, tiene información imperfecta. En particular, el jugador 1 no sabe si está en el nodo b o en el m cuando le corresponde hacer su jugada. Lo único que conoce son las probabilidades con las que se llega a cada uno de esos nodos, concretamente p(buenas) y p(malas).

A pesar de que la información sea imperfecta, el jugador 1 debe tomar una decisión, la de si abrir un pequeño negocio o no. Esta decisión está representada por las ramas denominadas Abrir y No abrir que parten de los nodos b y m. Abrir un pequeño negocio es siempre arriesgado. Cuando las condiciones son favorables, un pequeño negocio prospera. Las probabilidades de que el entorno sea propicio para los negocios viene medida por la probabilidad p(buenas). Cuando el clima para los negocios es malo, el pequeño negocio fracasará. Las probabilidades de que el entorno sea adverso viene medida por la probabilidad p(malas). El jugador 1 no sabe qué circunstancias se dan en el momento en que tiene que decidir si abrir o no un pequeño negocio. El jugador 1 tiene 10.000 dólares para invertir: si no abre el negocio, conserva estos 10.000 dólares; si abre un pequeño negocio y las circunstancias son buenas el negocio prospera y obtiene 50.000 dólares. Si abre el negocio y las circunstancias son malas, el negocio fracasa y gana 0 dólares. La rama denominada Abrir, que sale del nodo b, conduce a la mejor ganancia de todas, 50.000 dólares. La rama denominada Abrir que sale del nodo m conduce a su peor ganancia, 0 dólares. La razón por la cual estas dos ramas tienen la misma denominación es porque son consecuencias de la misma decisión por parte del jugador 1, abrir un pequeño negocio. Por otra parte, las dos ramas denominadas No abrir conducen a una ganancia de 10.000 dólares. Si el jugador 1 no abre ningún negocio, su ganancia no se ve afectada por el azar.

Supongamos que p(buenas) = 0,2 y p(malas) = 0,8, como en la figura 1.8. Estas probabilidades se corresponden, aproximadamente, con las tasas reales de éxito y fracaso de los pequeños negocios en Estados Unidos. Para solucionar Pequeño negocio, el jugador 1 tiene que preguntarse si 10.000 dólares con certeza son preferibles o no a la distribución

50.000 dólares con probabilidad 0,2
0 dólares con probabilidad 0,8

Se trata de una comparación entre una distribución de probabilidad y una cantidad cierta, una comparación para la que está diseñada la utilidad esperada. Que un jugador prefiera abrir un pequeño negocio con respecto a no abrirlo depende de las utilidades que el jugador asigne a las cantidades ciertas 0, 10.000 y 50.000 dólares. Consideremos en primer lugar una persona para quien la utilidad del dinero es el dinero:

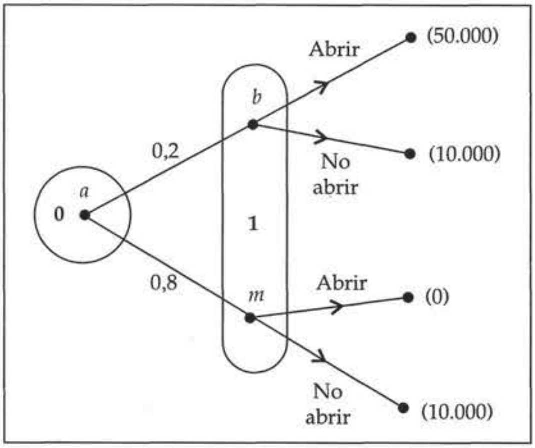

Figura 1.8. Pequeño negocio, jugador neutral ante el riesgo.

$$u_1(d_1) = d_1$$

En esta expresión, u_1 es la función de utilidad del jugador 1, y d_1 es la cantidad de dinero que el jugador 1 recibe. Para esta persona, $u_1(10.000) = 10.000$ dólares; ésta es la utilidad de no abrir el negocio. Comparemos ahora este resultado con la utilidad esperada de abrir un pequeño negocio, que denotamos con Eu_1(abrir) como abreviatura de la utilidad esperada de la distribución de probabilidad con la que se encuentra al abrir un pequeño negocio. Sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} Eu_1(\text{abrir}) &= p(\text{buenas})u_1(50.000) + p(\text{malas})u_1(0) \\ &= (0{,}2)(50.000) + (0{,}8)(0) \\ &= 10.000 \end{aligned}$$

Para este jugador se da un empate: abrir un pequeño negocio y no abrirlo están en la misma curva de indiferencia, con utilidad igual a 10.000 en cada caso. Este resultado se indica con las dos flechas asociadas a las dos ramas, Abrir y No abrir, en la figura 1.8. Ésta es la solución a Pequeño negocio, según las probabilidades dadas, cuando la utilidad coincide con el dinero.

No todos los jugadores tienen el mismo orden de preferencia respecto de abrir un pequeño negocio y no abrirlo. En realidad, cómo un jugador ordena estas dos estrategias depende crucialmente de su actitud ante el riesgo, que pasamos a describir en la siguiente sección.

1.6 Las tres actitudes ante el riesgo

Jugadores con actitudes ante el riesgo diferentes miran el mundo y reaccionan ante él de forma diferente. Principalmente, existen tres actitudes ante el riesgo. Si un jugador es **neutral ante el riesgo**, un dólar con certeza es equivalente a un dólar esperado. El jugador de la sección anterior, para quien el dinero es utilidad, es neutral ante el riesgo. Para tal jugador, 10.000 dólares con certeza son equivalentes a una distribución de probabilidad cuyo valor esperado sea de 10.000 dólares. El riesgo no afecta el proceso de toma de decisiones de este jugador si no afecta el valor esperado, de ahí el nombre de neutral ante el riesgo. Existen dos tipos de actitudes no neutrales ante el riesgo. Para un jugador **averso al riesgo**, un dólar con certeza es mejor que un dólar esperado. Los jugadores aversos al riesgo, lo evitan a no ser que las probabilidades estén lo suficientemente a su favor. Si un jugador es **amante del riesgo**, un dólar esperado es mejor que un dólar seguro. Los amantes del riesgo corren riesgos a no ser que las probabilidades estén lo suficientemente en contra.

Estas tres actitudes ante el riesgo pueden identificarse con la curvatura de la función de utilidad del dinero seguro que posee el jugador, $u_1(d_1)$. Jugadores neutrales ante el riesgo tienen funciones de utilidad lineales

$$u_1(d_1) = d_1$$

o cualquier transformación lineal positiva de ellas. Sólo jugadores neutrales ante el riesgo representan directamente las ganancias en dólares como utilidades cuando evalúan los resultados en un árbol de decisión. Los demás jugadores transforman dólares a una medida diferente, y esas transformaciones no son lineales. Recordemos que una función cóncava es la que tiene una segunda derivada no positiva, mientras que una función convexa es aquella cuya segunda derivada es no negativa. Un jugador averso al riesgo tiene una función de utilidad cóncava, y un amante del riesgo una convexa.

En este libro utilizamos la siguiente familia de funciones de utilidad, que engloba los tres tipos de actitudes ante el riesgo como casos particulares:

$$\begin{aligned} u_1(d_1) &= \frac{d_1^a}{a} \qquad \text{cuando } a \neq 0 \\ &= \log(d_1) \quad \text{cuando } a = 0 \end{aligned}$$

Cuando $a = 1$, el jugador 1 es neutral ante el riesgo; cuando $a > 1$, el jugador 1 es amante del riesgo. Por ejemplo, con $a = 2$, $u_1(d_1) = d^2/2$, una función convexa. Cuando $a < 1$, el jugador 1 es averso al riesgo. Por ejemplo, con $a = 0{,}5$, $u_1(d_1) = d_1^{0,5}/0{,}5 = 2d_1^{0,5}$, una función cóncava. El parámetro a refleja la actitud del jugador ante el riesgo. Cuanto mayor sea a, menos averso al riesgo es el jugador.

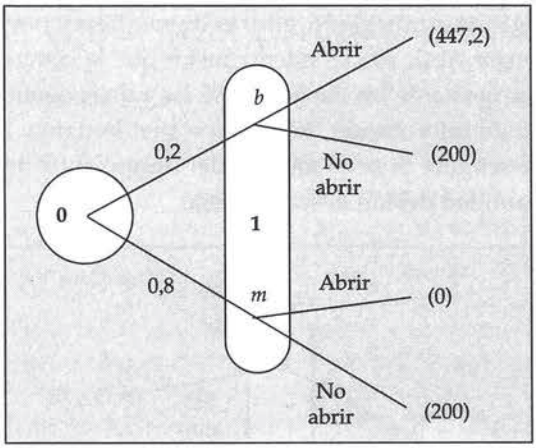

Figura 1.9. Pequeño negocio, jugador averso al riesgo.

Hemos visto con anterioridad que un jugador neutral ante el riesgo es indiferente entre abrir o no un pequeño negocio. Veremos a continuación que un jugador amante del riesgo prefiere claramente abrir un pequeño negocio y que un jugador averso al riesgo prefiere claramente no abrirlo.

La figura 1.9 muestra cómo un jugador averso al riesgo con $a = 0{,}5$ ve el juego Pequeño negocio. Las ganancias han sido transformadas de dólares a utilidad. Por ejemplo, $u(50.000) = 2(50.000)^{0,5} = 447{,}2$. Al calcular la utilidad esperada por el jugador 1 de la estrategia Abrir, que denotamos como Eu_1(abrir), obtenemos

$$Eu_1(\text{abrir}) = 0{,}2(447{,}2) + 0{,}8(0) = 89{,}4$$

La utilidad esperada por este jugador de la estrategia No abrir es

$$Eu_1(\text{no abrir}) = 2(10.000)^{0,5} = 200$$

Como $200 > 89{,}4$, la estrategia No abrir es claramente mejor que la estrategia Abrir. Este resultado se indica por medio de dos flechas sobre las ramas denominadas No abrir, que parten del conjunto de información del jugador 1. Este resultado tiene sentido. Si se es tan averso al riesgo, ¿por qué abrir un pequeño negocio cuando el riesgo de que fracase es tan alto?

La figura 1.10 muestra cómo un jugador amante del riesgo con $a = 2$ ve el juego Pequeño negocio. Las ganancias han sido nuevamente transformadas de dólares a utilidad. Por ejemplo, $u(10.000) = (10.000)^2/2 = 10^8/2 = 50$ millones. Al calcular la utilidad esperada por el jugador 1 de la estrategia Abrir obtenemos

$$Eu_1(\text{abrir}) = 0{,}2(2.500 \text{ millones}) + 0{,}8(0) = 500 \text{ millones}$$

La utilidad esperada de la estrategia No abrir es de sólo 50 millones. Para este amante del riesgo, la estrategia Abrir es claramente mejor que la estrategia No abrir. Esta conclusión se indica mediante las flechas sobre las ramas denominadas Abrir que parten del conjunto de información del jugador 1 en la figura 1.10. Una vez más, este resultado tiene sentido. Si se es amante del riesgo, abrir un pequeño negocio proporciona gran cantidad del tan deseado riesgo.

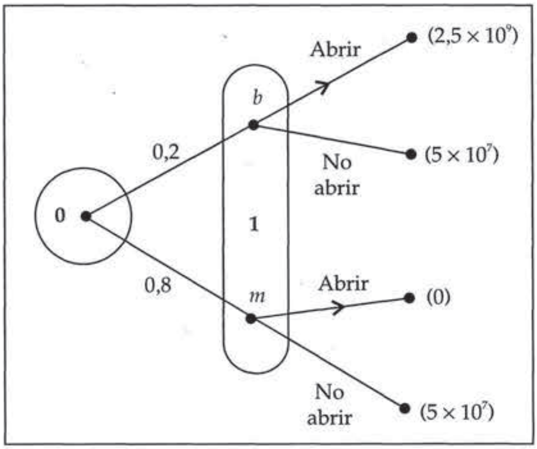

Figura 1.10. Pequeño negocio, jugador amante del riesgo.

La mayoría de las veces suponemos en este libro que los agentes son neutrales ante el riesgo y ven el juego exactamente como cuando las ganancias están en dólares. Cuando las actitudes ante el riesgo son cruciales para la solución del juego, como en Pequeño negocio, se advierte al lector, y se efectúan las transformaciones necesarias para resolver el juego.

En algunos casos, las tres actitudes ante el riesgo coinciden en que una decisión es mejor que otra. Considere el juego de la figura 1.11, llamado Pequeño negocio subvencionado. Si el entorno no es propicio para los negocios, entonces aparece el Estado compensando totalmente el fracaso del pequeño negocio; en caso contrario, el juego es el mismo que Pequeño negocio. Nótese que la estrategia No abrir no puede de ninguna manera ser mejor que la estrategia Abrir. Si las circunstancias son malas para los negocios, ambas estrategias producen las mismas ganancias. Si las circunstancias son propicias a los negocios, la estrategia Abrir es mucho más beneficiosa que la estrategia No abrir. Formalmente, comparar

$$Eu_1(\text{abrir}) = p(\text{buenas})u(50.000) + p(\text{malas})u(10.000)$$

con

$$Eu_1(\text{no abrir}) = u(10.000)$$

Para cualquier función de utilidad y distribución de probabilidades tenemos que

$$Eu_1(\text{abrir}) \geq Eu_1(\text{no abrir})$$

y el único caso en el que son iguales es cuando p(malas) = 1. Si existe una posibilidad, aunque remota, de que el pequeño negocio tenga éxito, entonces la solución para cualquiera que juegue Pequeño negocio subvencionado es abrir un pequeño negocio.

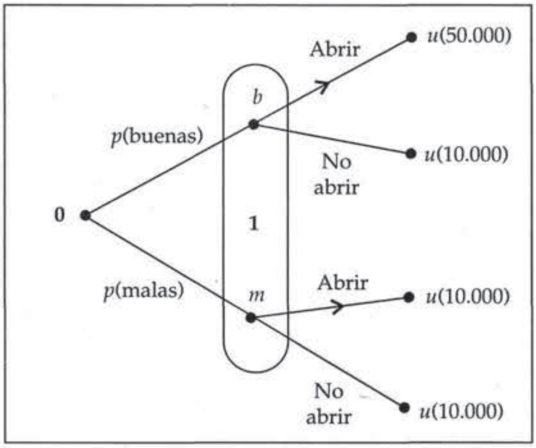

Figura 1.11. Pequeño negocio subvencionado.

Ordenar en términos de preferencias las distribuciones de probabilidad resulta controvertido, y existen muchas maneras de ordenarlas además de por el método de la utilidad esperada. Una alternativa que ha tenido gran impacto, desarrollada por los psicólogos Kahneman y Tversky, recibe el nombre de *Teoría prospectiva*.[13] No obstante, todas las maneras razonables de ordenar distribuciones de probabilidad coinciden en un punto. Una distribución de probabilidad **domina estocásticamente** a otra si nunca proporciona una ganancia menor y a veces proporciona una ganancia mayor. Más en general, si una distribución de probabilidad asigna mayor probabilidad a ganancias altas y menor probabilidad a ganancias bajas que otra distribución de probabilidad, la primera domina estocásticamente a la segunda. Por ejemplo, en Pequeño negocio subvencionado, la distribución de probabilidad asociada con la apertura de un pequeño negocio domina estocásticamente a la distribución de probabilidad (certeza) asociada con no abrir el negocio. Nunca proporciona una ganancia inferior a 10.000 dólares y con probabilidad p(buenas) proporciona una ganancia mayor. Cualquier ordenación razonable de distribuciones de probabilidad coincide con la dominancia estocástica. Uno de los atractivos principales de la utilidad esperada, atractivo

[13]No veremos esta teoría aquí. Ver Daniel Kahneman y Amos Tversky, "Prospect Theory", *Econometrica* 47, 1979, págs. 263-291.

que comparte con la teoría prospectiva y otras muchas teorías de utilidad no esperada, es que coincide con la dominancia estocástica.

1.7 Juegos de dos jugadores con información perfecta

Los juegos estudiados hasta ahora eran degenerados en el sentido de que sólo tenían un jugador. El resto de este capítulo y los próximos dos capítulos están dedicados a juegos con dos jugadores. Por el momento, restringimos nuestra atención a juegos de dos jugadores con información perfecta. Un ejemplo sencillo se muestra en la figura 1.12, El caldero de oro con dos jugadores.

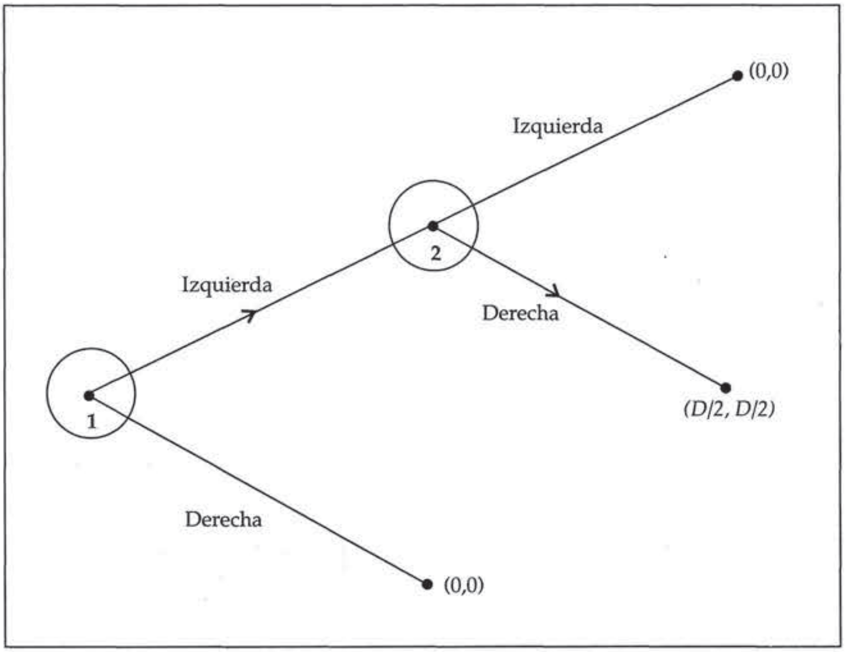

Figura 1.12. Caldero de oro para dos jugadores, forma extensiva.

El jugador 1 juega en primer lugar, y puede ir hacia la derecha o hacia la izquierda. Si el jugador 1 va a la derecha, el juego termina. En el nodo terminal hay asociado un vector de ganancias $\mathbf{u}$ dado por

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (0, 0)$$

En este punto terminal, cada jugador obtiene 0. Si el jugador 1 va a la izquierda, le llega el turno al jugador 2. El jugador 2 puede ir a la izquierda o a la derecha. Si el jugador 2 va a la izquierda, el juego se acaba con el vector de ganancias

$$\mathbf{u} = (0, 0)$$

Si el jugador 2 va a la derecha, el juego también termina. En este caso, los jugadores han encontrado el caldero de oro, el valor del cual se reparten equitativamente:

$$\mathbf{u} = (\frac{D}{2}, \frac{D}{2})$$

La resolución de El caldero de oro con dos jugadores no es diferente de la resolución con un jugador. Utilizamos la inducción hacia atrás, empezando con el jugador 2, el último en jugar. El jugador 2, que prefiere la mitad del caldero de oro a nada, jugará hacia la derecha. Esto nos lleva a la jugada del jugador 1. El jugador 1, que también prefiere la mitad del caldero de oro a nada, jugará hacia la izquierda. Esta solución se indica mediante las flechas de la figura 1.12. Acabamos de resolver nuestro primer juego con dos jugadores.

El caldero de oro con dos jugadores es una alegoría, cuenta una historia muy larga en pocas palabras. Considere cualquier acuerdo empresarial con un potencial beneficioso para ambas partes. El caldero de oro valorado en D representa el acuerdo. Lo que ambas partes deben hacer es encontrar el camino para llegar a este acuerdo. La trayectoria "1 va a la izquierda, 2 va a la derecha" representa la manera en que las dos partes llegan al acuerdo. Esta trayectoria recibe el nombre de *trayectoria de solución*. En El caldero de oro con dos jugadores existe una única trayectoria de solución, la que conduce al caldero de oro. Las otras trayectorias obtienen una ganancia de cero. Naturalmente, la mayoría de los acuerdos empresariales son mucho más complicados que El caldero de oro con dos jugadores. Trataremos esta complejidad en capítulos posteriores.

Aunque la forma extensiva de El caldero de oro con dos jugadores se parece mucho a la forma extensiva de la versión de un jugador (compare las figuras 1.2 y 1.12), sus formas normales son muy diferentes (compare las figuras 1.4 y 1.13). Para construir su forma normal, listamos las estrategias de cada jugador. El jugador 1 tiene un único conjunto de información con dos estrategias, por lo que el jugador 1 tiene $(1) \times (2) = 2$ estrategias. Éstas son Izquierda y Derecha. Similarmente, el jugador 2 tiene un único conjunto de información con dos estrategias, por lo que el jugador 2 también tiene dos estrategias, Izquierda y Derecha. Colocamos estas estrategias en una matriz 2×2 (es decir, una matriz con dos filas y dos columnas). Las filas corresponden a las dos estrategias del jugador 1; las columnas a las dos estrategias del jugador 2. Situamos los vectores de ganancias de los puntos terminales de la forma extensiva en las casillas correspondientes de la matriz de la forma normal. Por ejemplo, el par de estrategias

1 va a la izquierda, 2 va a la derecha

conduce al vector de ganancias $(D/2, D/2)$, que aparece en la fila 1 (el jugador 1 va a la izquierda) y columna 2 (el jugador 2 va a la derecha) de la matriz. En teoría de juegos, los juegos 2×2 resultan útiles como alegorías de cuestiones más complejas, una buena razón para utilizarlos tan a menudo como sea posible. Veamos ahora una clase muy especial de juegos con dos jugadores con información perfecta, juegos tipo Ajedrez.

Jugador 1 \ **Jugador 2**	Izquierda	Derecha
Izquierda	(0,0)	$\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)$
Derecha	(0,0)	(0,0)

Figura 1.13. Caldero de oro para dos jugadores, forma normal.

1.8 Juegos tipo Ajedrez

Un juego de dos jugadores con información perfecta es tipo Ajedrez si satisface los dos requisitos siguientes. En primer lugar, los jugadores juegan de forma alternada. En segundo lugar, cada jugador tiene como máximo un número finito de estrategias. En tercer lugar, los resultados posibles se limitan a ganar, perder o empatar. O bien gana el jugador 1 y el 2 pierde (g,p), o ambos empatan (e,e), o el 1 pierde y el 2 gana (p,g). Éstas son las características del Ajedrez. El primer teorema que se demostró sobre juegos dice:

***Teorema sobre Juegos tipo Ajedrez.* En *juegos tipo Ajedrez,* una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdad: el jugador 1 puede garantizarse la victoria, el**

jugador 2 puede garantizarse la victoria o cada jugador puede garantizarse un empate.[14]

Demostraremos este teorema para la clase de juegos tipo Ajedrez en forma extensiva ilustrada en la figura 1.14, de la cual todas las formas normales son 2×2. El jugador 1 juega en primer lugar y puede ir a la derecha o a la izquierda. Si el jugador 1 va a la derecha, el juego termina con un vector de ganancias **x**. Si el jugador 1 va a la izquierda, le llega el turno al jugador 2, que puede ir a la derecha o a la izquierda. Si el jugador 2 elige ir a la izquierda, el vector de ganancias es **u**, si el jugador 2 escoge ir a la derecha, el vector de ganancias es **v**. Los vectores de ganancias **u**, **v** y **x** pueden adoptar cualquiera de las siguientes formas:

$$(g,p)(e,e)(p,g)$$

Dado que cada posible vector de ganancias puede adoptar únicamente una de estas tres formas y hay tres vectores de ganancias, existen $3^3 = 27$ posibles juegos representados en la figura 1.14. La siguiente demostración se aplica a cada uno de estos 27 juegos.

La demostración se efectúa utilizando la inducción hacia atrás. Empecemos con el jugador 2 al final del juego. El jugador 2, dados los vectores de ganancias **u** y **v**, maximiza su utilidad. Existen tres posibles casos para el jugador 2:

Caso 1. El jugador 2 puede conseguir la victoria en al menos uno de los vectores **u** o **v**. En este caso, si el juego llega al jugador 2, éste puede garantizarse la victoria.

Caso 2. El jugador 2 no puede conseguir la victoria en ningún caso, pero puede conseguir un empate en al menos uno de los vectores **u** o **v**. En tal caso, eso hará el jugador 2. Si el juego llega al jugador 2, éste puede garantizarse un empate.

Caso 3. El jugador 2 se enfrenta a una derrota haga lo que haga: **u** = **v** = (g,p). En este caso, es el jugador 1 el que puede garantizarse la victoria escogiendo ir a la izquierda. El juego llegará al jugador 2, que seguro que pierde.

Vamos ahora al principio del juego, a la jugada del jugador 1. En el caso 2, lo peor para el jugador 1 es obtener el empate. Si el vector de ganancias es **x** = (g,p), el jugador 1 elegirá ir a la derecha y garantizarse una victoria. En caso contrario, el jugador 1 escogerá ir a la izquierda y garantizarse el empate. Finalmente, supongamos que estamos en el caso 1. Si **x** = (p,g), entonces el jugador 1 pierde haga lo que haga. En este caso el jugador 2 tiene la victoria garantizada. Si **x** = (e,e), el jugador 1 se asegura el empate eligiendo ir a la derecha. Finalmente, si **x** = (g,p), el jugador 1 tiene la victoria segura. Esto finaliza la demostración.

Existen muchos juegos tipo Ajedrez. El Tres en raya es un ejemplo. Para el Tres

[14] Este teorema fue enunciado y demostrado por primera vez por el matemático Zermelo en 1911.

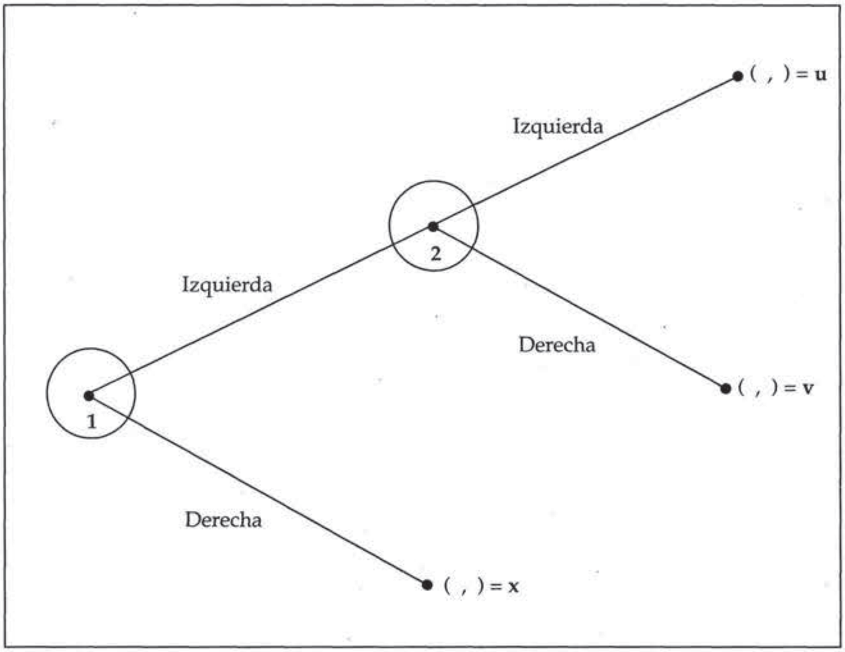

Figura 1.14. Juegos tipo Ajedrez.

en raya, el teorema puede afinarse más en el siguiente sentido: cada jugador en el Tres en raya puede garantizarse un empate. El Ajedrez es mucho más complicado que el Tres en raya. Por ejemplo, en Ajedrez el jugador 1 (blancas) tiene 20 aperturas posibles, y el jugador 2 (negras) 20 respuestas posibles a cada una de las aperturas del blanco. En este punto la forma extensiva ya está por encima de las capacidades gráficas convencionales del ser humano. Se estima que la forma extensiva del Ajedrez requeriría un gráfico del orden de los 10^{30} nodos. El Ajedrez es tan complicado que, de hecho, aún no se sabe si las blancas pueden garantizarse la victoria, aunque la evidencia empírica ciertamente sugiere que el mover primero es una ventaja.

Los juegos tipo Ajedrez son importantes, y no sólo como entretenimiento. En el capítulo 6 se muestra cómo, tan sólo con una ligera modificación de las ganancias de la figura 1.14, obtenemos uno de los juegos más importantes que se juegan en el mundo empresarial, concerniente a la posible entrada en un mercado y a los esfuerzos por parte de las empresas ya establecidas de evitar esta entrada.[15] Los juegos tipo Ajedrez muestran con claridad cristalina la importancia de la estrategia. Suponga que es usted el jugador 1 en un juego de esta clase, y se sabe que el jugador 1 puede

[15]Este juego recibe el nombre de Telex contra IBM, por razones que se verán claras en el capítulo 6.

asegurarse la victoria. Sin embargo, de alguna manera, usted pierde. No tiene excusa. No puede echarle la culpa a la suerte porque el azar no interviene. No puede echarle la culpa a la falta de información porque tiene información perfecta. La única razón por la que ha perdido es porque ha escogido una mala estrategia. Perdió cuando tenía las de ganar. No puede echarle la culpa a nadie más que a usted si escoge una mala estrategia y obtiene un mal resultado.

Los juegos tipo Ajedrez fueron los primeros juegos que las máquinas pudieron jugar. Lo único que una máquina necesita para jugar un juego tipo Ajedrez es un programa para determinar su estrategia. Una vez la máquina tiene un plan de juego completo o una regla para calcular los diferentes elementos del plan de juego, está lista para jugar. En un juego tipo Ajedrez, la estrategia es lo único que importa. Las máquinas que juegan al Ajedrez han subido constantemente en las clasificaciones mundiales en los últimos veinte años. En 1996, la mejor máquina, Deep Blue, puso en serias dificultades al campeón del mundo, Kasparov. El campeón humano del mundo no había perdido nunca hasta entonces ante una máquina en un torneo de Ajedrez; sin embargo, en partidas rápidas, donde cada jugador tiene una limitación estricta del tiempo para cada jugada, la situación es muy diferente. Fritz2, una de las tres mejores máquinas de jugar al Ajedrez en el mundo,[16] puede ganar al campeón mundial Kasparov, como muestra la figura 1.15.[17]

1.9 Forma extensiva, forma normal y forma función de coalición.

Algunas veces, la frontera entre un juego tipo Ajedrez y juegos que no lo son no está muy clara. Considere los dos juegos en forma extensiva de la figura 1.16. El juego de la figura 1.16*a* es tipo Ajedrez, y el jugador 1 puede asegurarse el empate si escoge ir a la izquierda. El juego de la figura 1.16*b* no es tipo Ajedrez puesto que tiene información imperfecta. No obstante, si consideramos las formas normales de estos dos juegos observaremos que son exactamente iguales. La forma normal de ambos juegos es la que aparece en la figura 1.17. Cada jugador tiene un conjunto de información en el que existen dos estrategias disponibles, por lo que cada jugador tiene dos estrategias. Esto hace que, en ambos casos, la forma normal sea una matriz 2×2. Cuando los dos jugadores van a la izquierda, el resultado es un empate (e,e), y así sucesivamente, de forma que las ganancias coinciden en ambos juegos. Aunque el juego de la figura 1.16*b* no es tipo Ajedrez, es lo suficientemente similar como para tener la misma forma normal que un juego que sí es tipo Ajedrez.

[16]Las otras dos mejores máquinas son Deep Thought y Deep Blue, ambas construidas en la Universidad de Carnegie Mellon. Fritz2 es una máquina alemana.

[17]Esta historia está extraída de Shelby Lyman, "Chess", *Chicago Tribune*, 18 de abril de 1993, sec. 13, pág. 35.

Ajedrez

Por Shelby Lyman

Si le cuesta vencer a su máquina de jugar al Ajedrez o a su ordenador personal armado con programas para jugar al Ajedrez, está en buena compañía.

A finales de diciembre, Gari Kasparov jugó una sesión histórica de partidas rápidas en Colonia, Alemania, contra el programa de Ajedrez Fritz2. El sorprendente resultado, según informó el especialista en Ajedrez por ordenador Frederick Friedel, fue: el programa ganó nueve partidas e hizo tablas en 4 partidas de un total de 37 que jugaron.

Al finalizar, el campeón del mundo, un jugador excepcional de partidas rápidas, ofreció su evaluación de Fritz:

"No es demasiado bueno en las aperturas. Es estratégicamente débil pero tácticamente muy peligroso. Y antes de rendirse, siempre encuentra una forma de crear dificultades.".

Naturalmente, el resultado de Kasparov contra Fritz es engañoso. Jugando bajo un control estándar de tiempo más lento, Kasparov no habría, probablemente, perdido ni una sola partida contra el programa.

Pero los ordenadores son contrincantes temibles en Ajedrez rápido. Los seres humanos necesitan un tiempo mínimo por jugada para que la capacidad de juzgar e intuir resulte efectiva. Al contrario que las máquinas, los humanos (incluso los campeones) suelen cometer errores cuando tienen poco tiempo para pensar las jugadas.

La verdadera prueba de "el hombre contra la máquina" tendrá lugar durante el próximo año 1996, cuando Kasparov juegue una partida con límites de tiempo convencionales contra Deep Blue, una versión actualizada, 1000 veces más rápida, de Deep Thought, que durante años ha sido la máquina de Ajedrez más poderosa del planeta.

A continuación se ofrece una de las victorias de Fritz2 en Colonia.

Fritz2	Kasparov
1. C3AR	P4D
2. P4D	P3R
3. P4AD	P3AD
4. P3R	P4AR
5. A3D	A3D
6. P5AD	A2AD
7. C3AD	D3AR
8. P3TR	C3TR
9. A2D	C2D
10. 0-0	P4CR
11. P3CD	P5CR
12. P×P	C×P
13. D2AD	T1CR
14. A1AD	C1AR
15. A2CD	D3CR
16. P3CR	D3TR
17. C2R	C3CR
18. R2CR	D2CR
19. T1TR	P4R
20. P×P	C(6)×P(5)
21. A×P	D2AD
22. A×C(4)	A×A
23. C(3)4D	P4TR
24. C4AR	0-0-0
25. P3AR	A2D
26. C×PTR	T(D)1AR
27. C4AR	C×PAR
28. R×C	T×PCR+
29. R×T	A×C+
30. R2AR	A5R+
31. R1R	A4CR
32. D2CR	T1CR
33. C5CD	D2R
34. C×P+	R1CD
35. A×A+	D×A
36. C×P+	P×C
37. D2TR	D×D

y la negras abandonan.

Figura 1.15. Fritz2 vence a Kasparov.

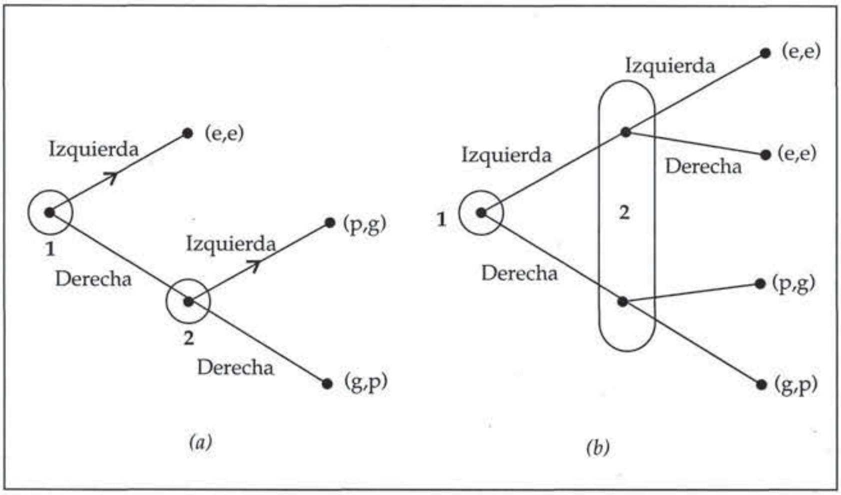

Figura 1.16. Juegos casi tipo Ajedrez.

Ocurre a menudo que juegos con formas extensivas diferentes tienen la misma forma normal; esto es debido a que la forma normal suprime algo de la información disponible en la forma extensiva. Por ejemplo, puede verse inmediatamente que el juego de la figura 1.16*a* tiene información perfecta, pero este hecho ya no se refleja en la forma normal. Cada forma extensiva tiene una única representación en forma normal. Sin embargo, para cada juego en forma normal existen habitualmente varios juegos en forma extensiva que podrían dar lugar a esa forma normal. Por tanto, lo que es verdad para juegos tipo Ajedrez podría también ser verdad para juegos casi tipo Ajedrez.

En la figura 1.16*b*, como en la figura 1.16*a*, el jugador 1 puede asegurarse un empate si va a la izquierda. Esto se ve en la forma extensiva por medio de la inducción hacia atrás. En la forma normal, lo vemos de otra manera. Si el jugador 1 escoge la estrategia Izquierda, alcanzará un empate en cualquiera de las casillas de la fila correspondiente en la matriz. Si el jugador 1 escoge la estrategia Derecha y si el jugador 2 escoge Izquierda (que sería lo lógico), el jugador 1 pierde. Como un empate es mejor que una derrota, el jugador 1 irá a la Izquierda. Por tanto, obtenemos el mismo resultado en la forma normal y en la forma extensiva, aunque el razonamiento es ligeramente diferente.

Además de las formas normal y extensiva existe una tercera forma de representar juegos, llamada **forma función de coalición**, especialmente útil para juegos que poseen un alto carácter cooperativo. En esta forma tan sólo se necesita responder las dos cuestiones siguientes: ¿cuál es el mínimo que puede conseguir cada jugador por sí mismo? y ¿cuál es el mínimo que pueden conseguir los dos jugadores actuando

Jugador 1 \ Jugador 2	Izquierda	Derecha
Izquierda	(e,e)	(e,e)
Derecha	(p,g)	(g,p)

Figura 1.17. Juegos en forma normal.

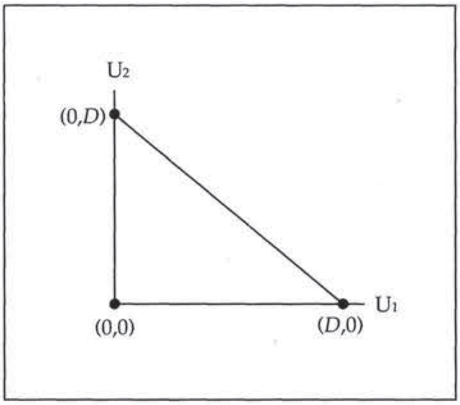

Figura 1.18. Caldero de oro con dos jugadores, forma función de coalición.

juntos? Para un juego en el que se gana, se pierde o se empata, como el de la figura 1.16*a*, la forma función de coalición simplemente dice que tanto el jugador 1 como el jugador 2 pueden asegurarse el empate. Los dos jugadores actuando conjuntamente no pueden garantizarse un resultado mejor que éste. Para El caldero de oro de dos jugadores, la forma función de coalición dice que el jugador 1 puede conseguir como mínimo 0 (si el jugador 2 va a la izquierda), el jugador 2 puede conseguir como mínimo 0 (si el jugador 1 va a la derecha), pero juntos pueden obtener *D* (si el jugador 1 va a la izquierda y el 2 a la derecha). Esta forma función de coalición aparece en la figura 1.18. La forma función de coalición se utiliza principalmente para estudiar cómo se reparten las ganancias de la cooperación entre los participantes en el acuerdo, tema que se estudiará en el capítulo 12.

La mayoría de las veces, si un juego es de información imperfecta no se parecerá en absoluto al Ajedrez. Es fácil construir contraejemplos al teorema para juegos tipo Ajedrez si relajamos cualquiera de sus hipótesis. En el capítulo 4 se muestra que en un juego tipo Ajedrez con tres jugadores ya no se cumple el resultado del teorema.

El lector podrá construir otros contraejemplos en los problemas que hay al final de este capítulo. La resolución de problemas es una parte esencial de la teoría de juegos. El dominio de la teoría se demuestra a través de los juegos que se solucionan (y sólo a través de los juegos que se solucionan).

Resumen

1. Un juego es cualquier situación estratégica gobernada por reglas con un resultado bien definido, caracterizada por la interdependencia estratégica entre los jugadores.
2. Existe una gran variedad de juegos en sentido literal: juegos de mesa, juegos de cartas, videojuegos y juegos deportivos. Tanto en la economía como en el mundo empresarial se utilizan los juegos en un sentido amplio del término. Los Chicago Bulls son un ejemplo de ambos sentidos.
3. La teoría de juegos es la ciencia que estudia los juegos con la suficiente profundidad como para resolverlos. La teoría de juegos empezó siendo matemática aplicada, pero ahora es uno de los puntales del pensamiento económico y empresarial.
4. Los juegos sirven como modelos de relaciones empresariales y negociaciones económicas. Las guerras de la cola entre Coca-cola y Pepsi son un ejemplo de un juego en el mundo empresarial; las negociaciones entre los siete países más desarrollados son un ejemplo de un juego en economía.
5. La forma extensiva es la descripción básica de un juego. Una forma extensiva es un diagrama de árbol, con nodos, ramas, nodo inicial, conjuntos de información y puntos terminales.
6. Un juego de un jugador con información perfecta puede ser resuelto por inducción hacia atrás, empezando por el final y retrocediendo hasta el principio.
7. Un juego es de información perfecta si cada conjunto de información contiene un único nodo. Un juego con información imperfecta necesita que un jugador ordene de acuerdo con sus preferencias las distribuciones de probabilidad, lo que requiere una noción ampliada de utilidad.
8. La utilidad esperada ordena según preferencias las distribuciones de probabilidad. En esta teoría, las curvas de indiferencia son líneas rectas paralelas, y

existen tres actitudes fundamentales ante el riesgo: neutral ante el riesgo, averso al riesgo y amante del riesgo. Cada actitud representa un modo sistemático de ver el mundo y significa un modo sistemático de jugar, como muestra el juego Pequeño negocio.

9. Una distribución de probabilidad domina estocásticamente a otra cuando nunca paga menos y algunas veces paga más. En este caso, su utilidad esperada es más alta, independientemente de la actitud ante el riesgo.
10. Los juegos de dos jugadores con información perfecta pueden ser resueltos por inducción hacia atrás, como los juegos de un jugador con información perfecta.
11. Para un juego tipo Ajedrez uno y sólo uno de los enunciados siguientes es verdad: el jugador 1 puede garantizarse la victoria, el jugador 2 puede garantizarse la victoria o cada jugador puede garantizarse un empate.
12. Un ordenador puede ahora ganar al campeón mundial de Ajedrez.
13. Existen tres representaciones de los juegos: la forma extensiva, la forma normal y la forma función de coalición. La forma normal se centra en las consecuencias de las diferentes estrategias, en tanto que suprime parte de la minuciosidad de la forma extensiva. La forma función de coalición suprime incluso más detalles que la forma normal y se utiliza principalmente para estudiar la cooperación entre jugadores.

Conceptos clave

juego
juego empresarial
teoría de juegos
forma extensiva
inducción hacia atrás
forma normal
neutral/averso al riesgo,
amante del riesgo
juegos tipo Ajedrez
interacción estratégica
negociación económica
información perfecta / imperfecta
conjunto de información
estrategia
utilidad esperada
dominancia estocástica
forma función de coalición

Problemas

1. Dé ejemplos de interacción estratégica en cada una de las siguientes industrias: ocio, cervecera, automóvil y servicios financieros.
2. Dibuje la forma extensiva del laberinto de la figura 1.19 y a continuación resuélvalo.

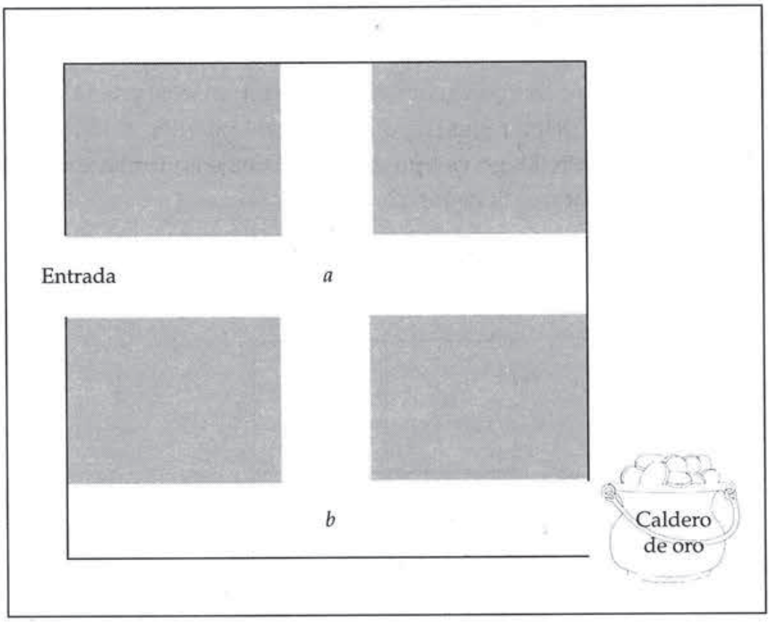

Figura 1.19. El laberinto II.

3. Está considerando abrir un cine multisalas. Tiene 100.000 dólares para invertir. Si abre el cine, la probabilidad de ganar 300.000 dólares es de 0,35 (incluida la inversión) y la de perder todo el dinero es de 0,65. Si no abre el cine, conserva los 100.000 dólares. El azar juega antes que usted. Dibuje el árbol del juego. ¿Qué debería hacer si es neutral al riesgo? ¿Cambiaría su estrategia si la probabilidad de éxito fuera 0,3 en lugar de 0,35?
4. Rehaga el problema 3 de las dos formas siguientes: a) es usted averso al riesgo y su función de utilidad es $u = d^{1/3}$; b) es usted amante del riesgo y su función de utilidad $u = d^3$. Explique la diferencia, si existe, entre los jugadores aversos al riesgo, amantes del riesgo y neutrales al riesgo.
5. Muestre en detalle que los tres tipos de actitudes ante el riesgo colocan Abrir un pequeño negocio por delante de No abrir un pequeño negocio, en Pequeño negocio subvencionado.
6. En un casino, el valor esperado de todos los juegos es negativo. ¿Cuál de las actitudes ante el riesgo, si existe alguna, jugará con toda certeza? ¿Cuál no jugará con toda certeza?
7. Considere el esquema de la figura 1.14. Halle los vectores de ganancias **u, v** y **x** tales que a) el jugador 1 pueda asegurarse la victoria, b) el jugador 2 pueda asegurarse la victoria y c) cualquier jugador pueda asegurarse el empate.

8. Suponga que juega a Tres en raya en un tablero de 2×2, como muestra la figura 1.20. Se aplican las reglas habituales. El jugador 1, que empieza, pone una X en una casilla cualquiera. A continuación, el jugador 2 pone una O en una de las casillas restantes. El primer jugador que complete una fila, columna o diagonal gana. Muestre que este juego es tipo Ajedrez. Dibuje su forma extensiva. ¿Qué jugador puede asegurarse la victoria?

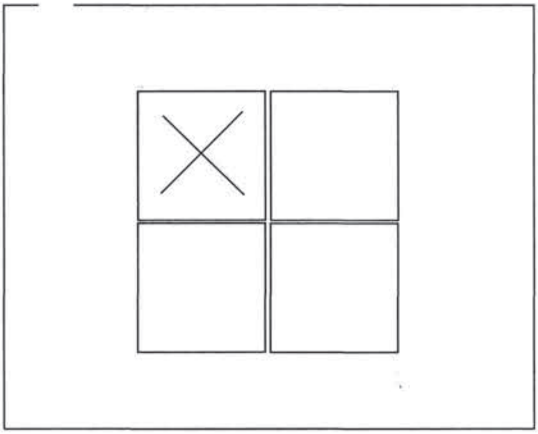

Figura 1.20. Tres en raya en un tablero 2×2. El jugador 1 acaba de jugar.

Altere cualquiera de las condiciones que hacen que un juego sea tipo Ajedrez y puede que este juego ya no satisfaga las conclusiones del teorema para juegos tipo Ajedrez. Éste es el tema de las dos preguntas siguientes.

9. El juego Elija el número mayor es un juego de dos jugadores con información perfecta en el que se gana, se pierde o se empata. El jugador 1 elige un número cualquiera. El jugador 2 oye el número del jugador 1 y a continuación elige otro número. Si el número del jugador 1 es mayor que el del jugador 2, el juego termina con la victoria del jugador 1. Si el número del jugador 1 es igual al del jugador 2, el juego termina con empate. Si el número del jugador 1 es menor que el del jugador 2, el jugador 1 puede elegir de nuevo. Si el jugador 1 elige un número mayor que el del jugador 2, el juego continúa. Muestre que Elija el número mayor no es tipo Ajedrez en un aspecto crucial. A continuación, muestre que nunca termina.
10. El juego Fuga y evasión que muestra la figura 1.21 es un juego finito de dos jugadores en el que se gana, se pierde o se empata. El jugador 1, el fugitivo, acaba de escaparse de prisión y puede ir hacia arriba o hacia abajo. El juga-

dor 2, el carcelero, también puede ir hacia arriba o hacia abajo, pero no sabe hacia dónde ha ido el fugitivo. Si el carcelero va en el mismo sentido que el fugitivo, lo atrapará, con lo que gana. Si el carcelero va en sentido contrario al fugitivo, éste se escapa y gana. Muestre que Fuga y evasión tiene información imperfecta. A continuación, muestre que ningún jugador puede garantizarse la victoria.

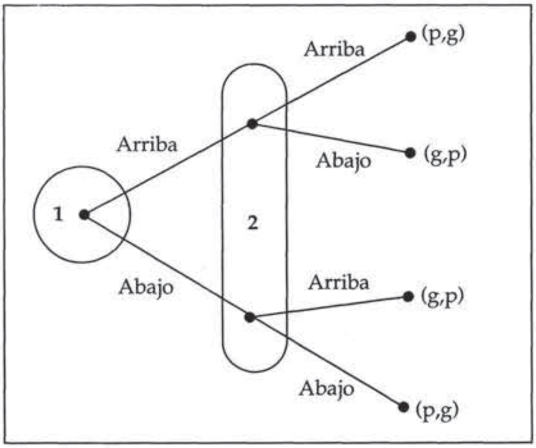

Figura 1.21. Fuga y evasión.

11. Según la teoría de la utilidad esperada, los mismos criterios rigen en el juego El caldero de oro, tanto si D es \$1 o \$1.000.000. Exprese su acuerdo o desacuerdo y explique el porqué.